

AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 HEURES)

Calculatrice permise.

Les exercices et le problème sont indépendants et de difficultés diverses.

Exercice 1:

On considère la fonction

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

1) Etudier rapidement cette fonction sur \mathbb{R} (Continuité, dérivabilité). La représenter (approximativement) sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2) On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$$

et

$$h(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0}(g(x)) = 0$. En déduire que g est continue sur \mathbb{R} .

b) Montrer que pour $x > 0$,

$$g(x) < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + |h(x)|.$$

En déduire la limite de $g(x)$ quand $x \rightarrow \infty$.

c) Déterminer la dérivée de $g(x)$.

Exercice 2 :

Soit la fonction définie de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans \mathbb{R} par

$$\phi(x) = \tan(x) - x.$$

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 < x < \varepsilon$ on a

$$\phi(x) \leq x^3.$$

b) Montrer que ϕ est bijective : on note $\psi = \phi^{-1}$ son inverse définie de \mathbb{R} dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

c) Etudier la limite des suites $u_n = \psi\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ et $v_n = \psi\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

d) Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sont-elles convergentes?

e) Soit la suite à double indice définie par

$$u_{m,n} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^m - \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^m.$$

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = -1/2$. Que vaut $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m}$?

Problème :

On utilise dans tout le problème les notations suivantes:

P_n^0 est l'ensemble des polynômes de $[-1,1]$ dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à n ,

P_n est la partie de P_n^0 composée des polynômes de degré n ,

$F[0,1]$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans \mathbb{R} .

Pour $f \in F$ dérivable m fois, $f^{(m)}$ désigne la dérivée d'ordre m .

$\|\cdot\|$ est la norme sur P_n^0 définie par , pour $P \in P_n^0$, $\|P\| = \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$.

Préliminaire :

1) Montrer par récurrence, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout n entier positif, on a

$$|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$$

En déduire que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \frac{1}{n}.$$

Première partie : Les polynômes de Féjer-Tchebichev

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit T_n et U_n dans $F[0,1]$ par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T_{n+1}^{(1)}(x).$$

a) Calculer T_0 et T_1

b) Montrer que T_n satisfait l'équation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(x)$ appartient à P_n , de coefficient dominant égal à 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

d) Calculer explicitement $T_1, T_2, T_3, T_4, U_0, U_1, U_3, U_4$.

2) Montrer que les zéros de T_n sont exactement les réels ordonnés par ordre strictement croissant,

$$\alpha_{k,n} = \cos\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi\right)\right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

3) Montrer que $U_n(x)$ est un polynôme de P_n . Quel est son coefficient dominant? Montrer que U_n vérifie pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}.$$

4) Montrer que T_n est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n^{(1)}(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

En déduire une équation différentielle satisfaite par $U_n(x)$.

5) Pour $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{k,l} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_l(x) dx.$$

Montrer que ces intégrales impropres sont bien définies et que $I_{k,l} = 0$ pour $l \neq k$.

Calculer $I_{k,k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

6) Déduire de ce qui précède une base orthonormée de P_n^0 pour le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle_M = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P(x) Q(x) dx.$$

2ème Partie : Théorème de la Norme de Markov.

1) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\|$ et $\|U_n\|$. Préciser en quels points le suprémum est atteint, respectivement pour T_n et U_n .

2) En déduire l'inégalité

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}} \right| \leq n^2.$$

(Aide : on calculera la dérivée de $\log(T_n(x)) = \frac{T_n'(x)}{T_n(x)}$).

3) Pour $0 \leq i \leq n-1$, on définit le i ème polynôme interpolateur de Lagrange $L_{i,n-1}$ associé à $(\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n-1,n})$ comme l'unique polynôme de degré $n-1$ tel que $L_{i,n-1}(\alpha_{j,n}) = 0$, pour tout $i \neq j$ et $L_{i,n-1}(\alpha_{i,n}) = 1$. Expliciter sa forme et exprimer $\frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}}$ en fonction de $L_{k,n-1}$.

On rappelle que si les réels $(\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n-1,n-1})$ sont tous différents $L_{0,n-1}, \dots, L_{n-1,n-1}$ forme une base de P_{n-1}^0 .

4) Montrer les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) &= 2^n \prod_{j \neq k} (\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n}) \\ &= (-1)^{k-n+1} \frac{n}{\sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2}}. \end{aligned}$$

5) Montrer que, pour tout polynôme P dans P_{n-1}^0 , on a la décomposition

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sqrt{1 - \alpha_{k,n}^2} P(\alpha_{k,n}) \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}}.$$

6) Déduire de ce qui précède que, pour tout P dans P_{n-1}^0 tel que $\sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq 1$ on a $\|P\| \leq n$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans une société, quelles sont les conditions de la réduction des inégalités entre les hommes et les femmes ?

Sujet n° 2

L'homme moderne s'est-il trop éloigné de la nature ?

Sujet n° 3

Les découvertes techniques contribuent-elles à renouveler les questions morales ?

AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 HEURES)

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1 : L'Algorithme de Fletcher-Powell

On note $M_{n,k}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices n lignes, k colonnes sur \mathbb{R} ,
 $SDP_n(\mathbb{R})$ le sous ensemble de $M_{n,n}(\mathbb{R})$, des matrices symétriques, définies positives.
 Y^* désigne la transposée de Y , I_n la matrice identité de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Préliminaire : Soit D une matrice de $SDP_n(\mathbb{R})$ diagonale. On pose pour Y et Z dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle Y, Z \rangle_D = Y^* D Z.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ est un produit scalaire de norme associée $\|\cdot\|_D$ et montrer l'inégalité

$$\langle Y, Z \rangle_D \leq \|Y\|_D \|Z\|_D.$$

1) Soit A et B dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout Y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$Y^* B A X X^* A B Y \leq (X^* A B A X)(Y^* B Y).$$

b) On pose

$$C = B + \frac{X X^*}{X^* A X} - \frac{B A X X^* A B}{X^* A B A X}.$$

Montrer que $C \in SDP_n(\mathbb{R})$.

2) Soit maintenant A dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $H_0 = I_n$, X_0 dans $M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On définit par induction

$$H_{k+1} = H_k + \frac{X_k X_k^*}{X_k^* A X_k} - \frac{H_k A X_k X_k^* A H_k}{X_k^* A H_k A X_k}$$

et

$$X_{k+1} = H_{k+1} Y_{k+1},$$

où Y_{k+1} est tel que $Y_{k+1} \neq 0$ et vérifie $X_j^* Y_{k+1} = 0$ pour $0 \leq j \leq k$, pour $k = 0, \dots, n-1$ (c'est à dire Y_{k+1} est un vecteur orthogonal aux X_j , $0 \leq j \leq k$).

Montrer (par récurrence sur k) que pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, $H_{k+1} A X_j = X_j$ et $X_{k+1}^* A X_j = 0$.

3) En déduire que $H_n = A^{-1}$.

Problème 2 : Sur les sous-groupes des matrices unitaires.

Soit $M_{n,n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à valeurs sur \mathbb{C} , muni de produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*),$$

où $B^* = \overline{B}^t$ (conjuguée de la transposée). On note I la matrice identité, 0 la matrice nulle. On dit que deux matrices A et B commutent si l'on a

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

1) Montrer que $M_{n,n}(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel hermitien, de norme hermitienne

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$$

En donner une base orthonormée.

2) Soit $U_n(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices unitaires (c'est à dire telles que $UU^* = I$). Montrer que si $U \in U_n(\mathbb{C})$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ on a

$$\|UA\| = \|AU\| = \|A\|.$$

3) Soit A une matrice diagonale et B dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$, montrer que

$$\|AB - BA\| \leq \sqrt{2}\|A\| \|B\|$$

En déduire que ce résultat est vrai pour toute matrice A de $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

4) Soient A et B dans $U_n(\mathbb{C})$ telles que $\|I - A\| < 1/\sqrt{2}$. On considère la suite définie par

$$B_0 = B$$

$$B_{k+1} = AB_k A^{-1} B_k^{-1}$$

Montrer que cette suite est bien définie et que l'on a

$$\|I - B_{k+1}\| \leq \sqrt{2}\|B_k\|$$

et

$$\|I - B_{k+1}\| \leq \sqrt{2}\|I - A\| \|I - B_k\|.$$

En déduire la limite de la suite B_k quand $k \rightarrow \infty$.

Que peut-on dire de la suite B_k , si A et B engendrent un sous-groupe fini de $U_n(\mathbb{C})$.

On suppose pour le reste du problème que A et B sont dans $U_n(\mathbb{C})$. On rappelle le résultat suivant : si $[A, B] = 0$ alors A et B sont diagonalisables simultanément (c'est à dire il existe U dans $U_n(\mathbb{C})$ tel que UAU^{-1} et UBU^{-1} soient diagonales).

5) Montrer que si A et $AB^{-1}A$ sont diagonales alors il existe une matrice V de $U_{n,n}(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\{0,1\}$ telle que

$$BAB^{-1} = V^{-1}AV.$$

6) Montrer que si C est inversible $[A, C] = 0$ implique $[A, C^{-1}] = 0$

7) **On suppose désormais dans toute la suite que $[A, ABA^{-1}B^{-1}] = 0$.** Montrer que A et BAB^{-1} sont diagonalisables simultanément.

8) Montrer que si M est une matrice unitaire de terme générique $m_{i,j}$ telle que $\|I - M\| < 2$ alors $\sum_{i=1}^n |m_{ii}| > n - 2$. Montrer que au moins $(n - 1)$ termes de sa diagonale sont non nuls.

9) Dédurre de tout ce qui précède que si $\|I - B\| < 2$ alors A et B sont diagonalisables simultanément.

10) Soit $V_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini de $U_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout élément A et B de $V_n(\mathbb{C})$ tels que

$$\|I - A\| < 1/\sqrt{2} \text{ et } \|I - B\| < 1/\sqrt{2},$$

on a $[A, B] = 0$.

11) Dédurre de ce qui précède le théorème suivant :

Si $V_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$ engendré par des éléments A tels que $\|I - A\| < 1/\sqrt{2}$, et si tout sous-groupe de $V_n(\mathbb{C})$ à deux générateurs est fini, alors $V_n(\mathbb{C})$ est abélien (commutatif).

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice n° 1

Dans le comité pédagogique d'une école composé de 8 membres, on souhaite représenter les quatre filières de recrutement. Aussi doit-il comporter 1 membre de la filière A, 2 membres de la filière B, 2 membres de la filière C, 3 membres de la filière D.

Sachant que la population de la filière A est de 10, celle de la filière B de 18, celle de la filière C de 22 et celle de la filière D de 30, calculer :

- de combien de façons peut-on composer la représentation de la filière A ?
- même question pour la filière B
- même question pour la filière C
- même question pour la filière D
- de combien de manières peut-on constituer ce comité pédagogique ?

Exercice n° 2

Etudier suivant les valeurs des paramètres réels m et p la limite,

pour $x \rightarrow +\infty$, de $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - mx\sqrt{x+p}$

Exercice n° 3

Le prix du ticket de restaurant étudiant était de 1 euro au 1^{er} octobre 1982. Au 1^{er} octobre 2002, il était de 3 euros, et au 1^{er} octobre 2003 de 3,2 euros.

- De combien le prix du ticket a-t-il augmenté en % entre le 1/10/1982 et le 1/10/2002 ?
- Quel est le taux moyen annuel de variation entre 1982 et 2002 ?
- De combien en % a augmenté le prix du ticket entre le 1/10/2002 et le 1/10/2003 ?
- Si, dans l'avenir, l'augmentation moyenne annuelle observée entre 1982 et 2002 est reconduite chaque année, dans combien d'années le prix du ticket dépassera-t-il la somme de 5 euros ?

Exercice n° 4

A partir du tableau ci-dessous, calculer le nombre moyen d'habitants par médecin dans l'ensemble du pays constitué par les cinq régions étudiées.

Région	Nombre d'habitants pour un médecin	Population (en milliers)
A	200	450
B	150	570
C	180	360
D	300	510
E	210	420

Exercice n° 5

- Mettre sous la forme $a + ib$ le nombre complexe $z = \frac{(4i^{22} - i)^2}{(1 + 2i)^2}$
- Utiliser la formule de Moivre pour exprimer $\cos 3a$ et $\sin 3a$ sous la forme de polynômes en $\cos a$ et en $\sin a$.

Exercice n° 6

Un contrôle de fabrication sur un article devant répondre à des normes assez sévères, est tel que si l'article est correct, il y a 99% de chances de le déclarer comme tel au contrôle. A l'inverse, un article défectueux aura 90% de chances d'être reconnu comme tel au contrôle. Une étude poussée a montré par ailleurs que 95% des articles sont conformes aux normes exigées.

- a) Quelle est la probabilité pour que le contrôleur déclare un article quelconque défectueux ?
- b) Quelle est la probabilité pour que le contrôleur se trompe en déclarant qu'un article est défectueux ?
- c) Quelle est la probabilité pour que le contrôleur prenne une décision erronée ?

Exercice n° 7

Déterminer a et b tels que le premier terme non nul du développement limité, au voisinage de 0, de la fonction suivante, soit le terme en x^3

$$f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$$

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre d'Antonio R. Damasio dont le titre est «*Spinoza avait raison*» – Joie et tristesse, le cerveau des émotions – paru aux éditions Odile Jacob en mai 2003. Il sera résumé en 240 mots, plus ou moins 10%.

Qu'est-ce qu'un sentiment ?

Pour tenter d'expliquer ce que sont les sentiments, je voudrais commencer par poser une question au lecteur : quand vous envisagez n'importe quel sentiment que vous avez éprouvé, agréable ou non, intense ou non, quels en sont selon vous les contenus ? Remarquez bien que je ne vous interroge pas sur la cause du sentiment ; sur son intensité, sur sa valeur positive ou négative, ou encore sur les pensées qui vous sont venues à l'esprit à son occasion. Je vise plutôt les contenus mentaux, les ingrédients, le matériau qui font un sentiment. Afin de faire avancer cette expérience de pensée, voici quelques suggestions : imaginez que vous êtes allongé sur la plage, en fin de journée, que le soleil vous dore doucement la peau, que l'océan vient lécher vos pieds ; imaginez le bruissement des aiguilles de pin quelque part derrière vous, une légère brise estivale souffle, il fait 28°, et il n'y a pas un nuage dans le ciel. Prenez votre temps ; savourez cette expérience. Je suppose que rien ne vient vous contrarier, que vous vous sentez très bien, excessivement bien même, comme aime à dire un ami à moi. La question est : en quoi consiste ce sentiment de bien-être ? Voici quelques indices : votre peau a chaud, et c'est agréable. Vous respirez facilement, vous ne ressentez pas de gêne aux poumons ou à la gorge. Vos muscles sont si détendus que vous n'éprouvez aucun tiraillement aux articulations. Votre corps se sent léger, bien posé mais avec nonchalance. Si vous passez en revue votre organisme, vous pouvez sentir sa machinerie qui fonctionne doucement, sans anicroches, sans douleur, une vraie perfection. Vous avez l'énergie pour bouger mais, d'une certaine manière, vous préférez rester tranquille, combinaison paradoxale entre aptitude et inclination à agir d'un côté, et délectation à rester calme, de l'autre.

Bref : votre corps se sent différent, selon un grand nombre de dimensions. Certaines sont assez apparentes, et vous pouvez les situer en vous. D'autres sont plus impondérables. Par exemple, vous ressentez du bien-être et une absence de douleur ; bien que le lieu de ce phénomène soit le corps et ses opérations, cette sensation est si diffuse qu'il est difficile de décrire de façon précise où elle se situe dans le corps.

Cet état a des conséquences mentales. Si vous détournez votre attention du simple bien-être lié à ce moment, si vous parvenez à stimuler les représentations mentales qui ne renvoient pas directement à votre corps, vous découvrez que votre esprit est occupé par des pensées dont les thèmes créent une nouvelle vague de sentiment agréable. L'image d'événements dont vous anticipez ardemment qu'ils seront agréables vous vient à l'esprit, de même que des scènes que vous avez vécues avec plaisir dans le passé. Vous découvrez aussi que votre tournure d'esprit est bienheureuse. Vous avez adopté un mode de pensée dans lequel les images sont précises et s'écoulent en abondance et sans effort. Cela a deux conséquences sur votre sentiment de bien-être. Des pensées apparaissent dont les thèmes correspondent à l'émotion que vous éprouvez ; votre mode de pensée, votre style de processus mental augmente la vitesse avec laquelle les images surgissent et les multiplie. Tel Wordsworth à Tintern Abbey, vous avez «des sensations délicieuses qui cour[ent] dans [votre] sang jusqu'au fond de [votre] cœur» et ces sensations «pass[ent] même dans [votre] esprit le plus pur, calmement retrouvées». Ce que vous considérez d'habitude comme votre «esprit» et comme votre «corps» se mêlent en harmonie. Tout conflit semble désormais s'apaiser. Toutes les oppositions paraissent désormais moins tranchées.

Je dirais que ce qui définit le sentiment agréable lié à ces moments, ce qui fait que le sentiment mérite seul ce terme et qu'il est différent de toutes les autres pensées, c'est la représentation mentale des parties du corps ou de tout le corps opérant d'une certaine manière. Le sentiment, au sens pur et étroit du mot, est l'idée du corps qui est d'une certaine manière. Dans cette définition, on peut remplacer «idée» par «pensée» ou par «perception». Dès qu'on va au-delà de l'objet qui a causé le sentiment, les pensées et le mode de pensée qui s'ensuit on atteint le cœur même du sentiment. Son contenu consiste en une représentation d'un état donné du corps.

La même remarque vaut pour les sentiments de tristesse, pour les sentiments liés à n'importe quelle autre émotion, pour les sentiments liés aux appétits et pour ceux qui sont liés à n'importe quel ensemble de réactions régulatrices se déroulant dans l'organisme. Les sentiments, au sens employé dans ce livre, proviennent de n'importe quel ensemble de réactions homéostatiques, pas seulement des émotions. Ils traduisent l'état vécu actuellement dans le langage de l'esprit. Il me semble qu'il existe des «modes corporels» distincts qui résultent de différentes réactions homéostatiques, depuis l'état de douleur simple jusqu'à son équivalent complexe, et donc des sentiments fondamentaux distincts. Il existe aussi des objets déclencheurs distincts, des pensées correspondantes distinctes et des modes de pensée assortis. Par exemple, la tristesse s'accompagne d'une faible production d'images, mais d'une hyperattention aux images, alors que le bonheur va de pair avec des images qui changent vite et auxquelles on prête peu d'attention. Les sentiments sont des perceptions, et il me semble que leur soubassement se trouve dans les cartes corporelles du cerveau. Celles-ci renvoient à des parties du corps et à des états du corps. Une variation dans le plaisir ou la douleur est un contenu correspondant de la perception que nous appelons sentiment.

La perception du corps s'accompagne de celle de pensées dont les thèmes correspondent à l'émotion et d'une perception d'un certain mode de pensée, d'un style de processus mental. Comment cette perception apparaît-elle ? Elle résulte de la construction de métareprésentations de notre processus mental, opération sophistiquée grâce à laquelle une partie de l'esprit en représente une autre. Cela nous permet d'enregistrer le fait que nos pensées ralentissent ou s'accélèrent selon qu'on leur accorde plus ou moins d'attention ; ou bien le fait que les pensées représentent des objets et des événements de près ou à distance. Mon hypothèse, exprimée sous la forme d'une définition provisoire veut donc qu'un sentiment soit la perception d'un certain état du corps ainsi que celle d'un certain mode de pensée et de pensées ayant certains thèmes. Les sentiments apparaissent lorsque la simple accumulation des détails encartés atteint un certain stade. Dans une perspective différente, la philosophe Suzanne Langer restitue bien la nature de ce moment d'apparition lorsqu'elle dit que, lorsque l'activité d'une partie du système atteint un «pic critique, le processus est ressenti». Le sentiment est une conséquence du processus homéostatique en cours, c'est une étape suivante du cycle.

Cette hypothèse n'est pas compatible avec la conception selon laquelle l'essence des sentiments (ou bien celle des émotions lorsque émotions et sentiments sont pris comme synonymes) serait une collection de pensées pourvues de thèmes allant de pair avec un certain type de sentiment, comme les pensées qui portent sur des situations de perte dans le cas de la tristesse. Je crois que cette conception vide désespérément le concept de sentiment. Si les sentiments étaient seulement des ensembles de pensées ayant certains thèmes, comment pourrait-on les distinguer de n'importe quelles autres pensées ? Comment pourraient-ils posséder l'individualité fonctionnelle qui justifie leur statut en tant que processus mentaux spécifiques ? J'estime plutôt que les sentiments sont fonctionnellement distincts parce que ce sont par essence des pensées qui représentent le corps impliqué dans un processus réactif. Sans cela, la notion de sentiment disparaît. Sans cela, on ne pourrait jamais se permettre de dire : «Je me sens heureux» ; on devrait plutôt dire : «Je pense heureux». Mais cela pose une question légitime : qu'est-ce qui rend «heureuses» des pensées ? Si nous ne vivons pas un certain état du corps ayant une certaine qualité que nous appelons plaisir et que nous trouvons «bonne» et «positive» dans la vie en général, nous n'avons aucune raison de considérer une pensée comme heureuse. Ou comme triste.

L'origine des perceptions qui constituent l'essence du sentiment me semble claire : il existe un objet général, le corps, et il existe de nombreuses parties de cet objet qui sont sans cesse encartées dans un certain nombre de structures cérébrales. Les contenus de ces perceptions sont clairs eux aussi : ce sont divers états du corps dépeints par les cartes représentant le corps selon toute une gamme de possibilités. Par exemple, la micro- et la macrostructure des muscles tendus sont différentes de celles des muscles au repos. C'est vrai également de l'état du cœur lorsqu'il bat vite ou lentement, et pour la fonction d'autres systèmes — respiratoire, digestif — dont le travail peut être tranquille et harmonieux ou difficile et mal coordonné. Autre exemple, le plus important peut-être : la composition du sang relativement à certaines molécules chimiques dont dépend notre vie et dont la concentration, à tout instant, est représentée dans certaines régions du cerveau. L'état particulier de ces composants du corps, représentés dans les cartes corporelles du cerveau, est le contenu des perceptions qui constituent les sentiments. Les substrats immédiats des sentiments sont les encartages de tous ces états du corps dans les régions sensorielles du cerveau conçues pour recevoir les signaux venus du corps.

On pourrait objecter qu'il ne semble pas que nous enregistrions consciemment la perception de tous ces états des parties de notre corps. Et heureusement que nous ne les enregistrions pas tous. Nous avons une expérience de certains qui est assez spécifique et pas toujours plaisante — rythme cardiaque irrégulier, contraction douloureuse du ventre, etc. Cependant, pour la plupart des autres composants, j'émetts l'hypothèse que nous en faisons l'expérience sous forme «composite». Certaines structures de notre chimie interne, par exemple, enregistrent des sentiments généraux d'énergie, de fatigue ou de gêne. Nous vivons aussi tout un ensemble de changements comportementaux qui deviennent des appétits et des besoins. Évidemment, nous n'avons pas d'«expérience» de notre niveau sanguin de glucose lorsqu'il descend en dessous d'un certain seuil, mais nous faisons rapidement l'expérience des conséquences de cette diminution à travers la façon dont d'autres systèmes opèrent (la musculature, par exemple) et dont certains comportements s'engagent (la faim par exemple).

Vivre un certain sentiment, le plaisir par exemple, c'est percevoir que le corps est d'une certaine manière et percevoir le corps de la manière qui exige des cartes sensorielles dans lesquelles des structures neurales sont en jeu et dont des images mentales peuvent dériver. Je reconnais que l'apparition d'images mentales à partir de structures neurales est un processus qu'on ne comprend pas parfaitement (...). Mais nous en savons assez pour émettre l'hypothèse que ce processus repose sur des substrats qu'on peut identifier — dans le cas des sentiments, plusieurs cartes de l'état du corps situées dans diverses régions du cerveau — et par conséquent qu'il implique des interactions complexes entre régions cérébrales. Ce processus n'est pas localisé dans une aire du cerveau.

En bref, le contenu essentiel des sentiments est l'encartage d'un état donné du corps ; le substrat des sentiments est l'ensemble des structures neurales qui dressent la carte de l'état du corps et dont une image mentale de l'état du corps peut émerger. Un sentiment est par essence une idée — à savoir une idée du corps et plus précisément encore une idée d'un certain aspect du corps, de son intérieur, dans certaines circonstances. Un sentiment d'émotion est une idée du corps lorsqu'il est perturbé par le processus émotionnel. Comme nous le verrons plus loin, cependant, il est peu probable que l'encartage du corps qui constitue l'élément décisif de cette hypothèse soit aussi direct que William James l'imaginait.

Un sentiment est-il davantage qu'une perception d'un état du corps ?

Quand je dis que les sentiments sont en grande partie constitués par la perception d'un certain état du corps ou que la perception d'un état du corps forme une essence d'un sentiment, mon usage des mots «en grande partie» et «essence» n'est pas fortuit. On trouvera la raison de cette subtilité dans l'hypothèse-définition du sentiment qui vient d'être discutée. En maintes circonstances, en particulier lorsqu'on dispose de peu de temps ou qu'on n'en a pas du tout pour examiner les sentiments, ils sont seulement la perception d'un certain état du corps. Toutefois, dans d'autres circonstances, le sentiment implique la perception d'un certain état du corps et celle d'un certain état d'esprit l'accompagnant — soit les changements dans le mode de pensée auxquels je me référais plus haut en tant qu'ils font partie des conséquences du sentiment. Dans ces circonstances, nous avons des images du corps qui est ceci ou cela et, parallèlement, des images de notre style de pensée.

Dans certaines circonstances, peut-être dans la variété la plus avancée du phénomène, le processus est tout sauf simple. Il comporte ceci : les états du corps qui sont l'essence du sentiment et lui confèrent un contenu distinct ; le mode altéré de pensée qui accompagne la perception de cet état du corps essentiel ; et la forme de pensée qui va, en termes de thème, avec la sorte d'émotion ressentie. Dans ces occasions, si on prend l'exemple d'un sentiment positif, on pourrait dire que l'esprit se représente davantage que le bien-être. Il se représente aussi le bien-penser. La chair opère de façon harmonieuse ou du moins l'esprit le dit, et notre puissance de penser est à son sommet ou peut s'y élever. De même, le sentiment de tristesse ne porte pas sur une maladie du corps ou sur un manque d'énergie pour continuer à vivre. Il renvoie souvent à un mode inefficace de pensée suscitant un nombre limité d'idées de perte.