ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

# CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

## PROBLÈME N$^0$1

1. (a) On le montre par récurrence. $u_0 > 0$. Supposons que pour un entier $n$ positif, on a $u_n > 0$. On a alors $\ln(1+u_n) > 0$, soit $u_{n+1} > 0$.

   (b) Soit $g(x) = x - \ln(1+x)$. $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
   $$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$
   $g$ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$. $g$ est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) $g$ étant positive, on en déduit que pour tout entier $n$, on a :
   $$u_n - u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n) \geq 0.$$
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant alors une suite décroissante. Comme, d'après 1.(a), elle est minorée par 0, elle converge vers $l$ tel que $g(l) = 0$. Or 0 est le seul point qui vérifie cela, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. (a) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$, ce qui est le résultat demandé.

   (b) D'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est 1.

   (c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui décroît vers 0, donc d'après le théorème des séries alternées, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge.

3. (a) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, il est clair que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

(b) On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, quand $x$ tend vers 0. Donc :

$$v_n = \frac{u_n}{\ln(1+u_n)} = \frac{u_n}{u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)} = \frac{1}{1 - \dfrac{u_n}{2} + o(u_n)} = 1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n),$$

qui est le résultat demandé.

(c) D'après ce qui précède :

$$\ln v_n = \ln\left(1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n)\right) = \frac{u_n}{2} + o(u_n).$$

Ces deux suites étant à termes positifs, on en déduit que $\sum \ln v_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{2}$ sont de même nature. Comme il est clair que $\sum \dfrac{u_n}{2}$ et $\sum u_n$ sont de même nature, on obtient le résultat.

(d) On a bien :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln v_k = \ln(v_0 v_1 \cdots v_{n-1}) = \ln\left(\frac{u_0 u_1 \cdots u_{n-1}}{u_1 u_2 \cdots u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_0}{u_n}\right).$$

(e) Comme $u_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0}{u_n} = +\infty$. On déduit donc de 3.(d) que $\sum \ln v_n$ diverge. Donc $\sum u_n$ diverge puisque ces deux séries sont de même nature.

## PROBLÈME N$^0$2

1. (a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad -\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = a$ on a en particulier :

$$\exists A_a > 0,\ \forall x > A_a, \quad \frac{f(x)}{x} < a.$$

Comme $x$ est positif, on a bien :

$$\exists A_a > 0,\ \forall x > A_a, \quad f(x) < ax.$$

(b) Soit $b > a$. On peut écrire :

$$f(x) - bx = f(x) - ax + (a-b)x.$$

D'après (a), pour $x > A_a$, $f(x) - ax$ est négatif, d'où :

$$\forall x > A_a, \quad f(x) - bx < (a-b)x.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (a-b)x = -\infty$, on a bien

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - bx) = -\infty.$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. En prenant $a = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $b = \varepsilon$, on a bien $b > a > 0$, le résultat est alors donné par ce qui précède.

2. (a) Soit $f(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$. $f$ est alors positive sur $]0, +\infty[$ et vérifie bien, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty$, en particulier $f(x) - \varepsilon x$ est négatif pour $x$ assez grand, soit :

$$\exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad f(x) - \varepsilon x < 0.$$

Enfin, comme $f$ est positive, on a bien le résultat demandé.

(c) D'après 2.(b), on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon x.$$

$x$ étant positif, on conserve le sens de l'inégalité en divisant par $x$ et on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq \frac{f(x)}{x} < \varepsilon,$$

qui signifie exactement que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

3. (a) $\ln x$ est bien une fonction croissante vérifiant la propriété demandée.

(b) En refaisant le même raisonnement qu'au 2.(b), on trouve :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad f(x) < \varepsilon x.$$

Comme $f$ est croissante, on a pour tout $x$ positif, $f(0) \leq f(x)$. On a alors le résultat demandé :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad f(0) \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En divisant par $x$, on trouve :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x > A_\varepsilon, \quad \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < \varepsilon.$$

Il est clair que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(0)}{x} = 0$. On déduit donc aisément de ce qui précède que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

4. $f(x) = -x$.

(a) Il est clair que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x - \varepsilon x) = -\infty$.

(b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x} = -1 \neq 0$.

(c) On en conclut que si $f$ n'est ni positive ni croissante, le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty$ n'entraîne pas nécessairement que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Cette dernière propriété est donc plus forte puisque l'implication réciproque est toujours vraie.

## $\boxed{\text{PROBLÈME N}^0 3}$

On définit lorsque c'est possible :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1 + \cos u}\, du \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2}\, du.$$

1. (a) Soit $u = \pi - y$. On a :

$$\cos u = \cos(\pi - y) = -\cos y = -1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Donc $\dfrac{\cos u}{1 + \cos u} \sim \dfrac{2}{y^2}$ quand $y = \pi - u$ tend vers 0. Or l'intégrale de $\dfrac{2}{y^2}$ diverge en 0, donc $f$ n'est pas définie en $\pi$. On procède de la même manière pour $g$.

(b) Les intégrantes étant paires, on vérifie aisément que $f$ et $g$ sont impaires.

(c) Il est clair que $f$ et $g$ ne sont pas définies pour $x \geq \pi$, puisque l'on ne peut pas définir une intégrale sur un intervalle contenant un point où elle diverge. En tout point de $]0, \pi[$ les intégrales sont définies puisque les intégrantes sont continues. Enfin, par parité, on en déduit que le domaine de définition de $f$ et $g$ est $]-\pi, \pi[$.

(d) On sait classiquement que $f$ et $g$ sont dérivables sur $]-\pi,\pi[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}.$$

Ces fonctions étant des composées de fonctions indéfiniment dérivables sur $]-\pi,\pi[$ (fractions rationnelles et sin et cos), elles sont donc indéfiniment dérivables sur $]-\pi,\pi[$.

2. (a) On part de $f$. On intègre par parties en dérivant le terme $\dfrac{1}{1+\cos u}$ et en intégrant $\cos u$. On trouve alors :

$$f(x) = -g(x) + \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

(b) On a, pour tout $u$ dans $]-\pi,\pi[$, $\sin^2 u = 1-\cos^2 u = (1-\cos u)(1+\cos u)$. Donc :

$$\forall u \in ]-\pi,\pi[, \quad \frac{\sin^2 u}{(1+\cos u)^2} = \frac{1-\cos u}{1+\cos u},$$

d'où le résultat.

(c) La question 2.(a) donne la première ligne du système. On a :

$$\frac{1-\cos u}{1+\cos u} = 1 - 2\frac{\cos u}{1+\cos u}.$$

La question 2.(b) donne donc :

$$\forall x \in ]-\pi,\pi[, \quad g(x) = \int_0^x du - 2f(x) = x - 2f(x),$$

qui est bien la deuxième ligne du système.

(d) En soustrayant la première ligne à la deuxième, on trouve :

$$\forall x \in ]-\pi,\pi[, \quad f(x) = x - \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

En remplaçant cette valeur dans une des deux lignes, on obtient :

$$\forall x \in ]-\pi,\pi[, \quad g(x) = \frac{2\sin x}{1+\cos x} - x.$$

On remarquera que les fonctions $f$ et $g$ ne sont définies que sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ alors que, par exemple $x - \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ est définie pour tout $x$ non congru à $\pi$ modulo $2\pi$.

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ABIDJAN**

**AVRIL 2003**

***CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIE B Option Mathématiques***

# CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

## EXERCICE N$^0$1

$f$ est un endomorphisme de $E$ espace vectoriel de dimension finie, qui vérifie $f \circ f = f$.

1. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. $x$ étant dans l'image de $f$, il existe donc $y$ dans $E$ tel que $x = f(y)$. Mais $x$ est également dans le noyau, donc $f(x) = 0$. Puisque $f^2 = f$, on a donc :
$$0 = f(x) = f\left(f(y)\right) = f(y) = x.$$
On en déduit donc que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Le théorème du rang nous indique que :
$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E,$$
on a donc bien :
$$\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E.$$

2. 
$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Im} f &\iff \exists y,\ f(y) = x \\ &\iff f(x) = x \quad (\text{ car } f \circ f = f) \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}). \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker} f = E$. Comme $E$ est somme directe des sous-espaces propres de $f$, $f$ est donc diagonalisable.

## EXERCICE N$^0$2

$q$ est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = 2x^2+2y^2+5z^2+2xy+4xz+2yz$.

1. $q$ est une forme quadratique en tant que polynôme homogène de degré 2.

2. La matrice du produit scalaire associé à $q$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On peut écrire $q(x,y,z) = 2\left(x + \frac{y}{2} + z\right)^2 + 3\frac{y^2}{2} + 3z^2$. On voit alors que $q$ est bien définie positive.

**PROBLÈME**

**Partie I.** $f$ est un endomorphisme quelconque de $E$.

1. Soient $g_1$ et $g_2$ dans $\mathcal{C}(f)$ et soient $\lambda$ et $\mu$ deux complexes. On a :

$$f \circ (\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda f \circ g_1 + \mu f \circ g_2 = \lambda g_1 \circ f + \mu g_2 \circ f = (\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f,$$

ce qui prouve que $\mathcal{C}(f)$ est bien un espace vectoriel.

2. Soit $g$ dans $\mathcal{P}(f)$. $g$ s'écrit donc sous la forme :

$$g = a_0 \,\mathrm{Id} + a_1\, f + \cdots + a_n\, f^n.$$

On a bien :

$$\begin{aligned} g \circ f &= (a_0 \,\mathrm{Id} + a_1\, f + \cdots + a_n\, f^n) \circ f \\ &= a_0\, f + a_1\, f^2 + \cdots + a_n\, f^{n+1} \\ &= f \circ (a_0 \,\mathrm{Id} + a_1\, f + \cdots + a_n\, f^n) \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

3. Si $f = 0$, il est clair que $\mathcal{P}(f) = \{0\}$ alors que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

4. Supposons qu'il existe un complexe $\lambda$ tel que $f = \lambda \,\mathrm{Id}$. Alors $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$, donc $\dim \mathcal{C}(f) = n^2 \geq 2$. Sinon, $f$ et $\mathrm{Id}$ forment une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$\dim \mathcal{C}(f) \geq \dim \mathcal{P}(f) \geq \dim (\mathrm{Vect}\ (Id, f)) \geq 2.$$

**Partie II.** $f$ est maintenant un endomorphisme de $E$ tel que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.

   (a) Si $f$ n'est pas l'endomorphisme nul, alors il existe un vecteur $y$ tel que $f(y) \neq 0$. Mais, puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, il existe $x$ non nul dans $\operatorname{Ker} f$, d'où le résultat.

   (b) Si $\lambda x + \mu y = 0$, alors $f(\lambda x + \mu y) = 0$. Mais $f(x) = 0$, donc :
   $$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \mu f(y).$$
   D'où $\mu f(y) = 0$, ce qui donne $\mu = 0$ car $f(y) \neq 0$.
   On a alors $\lambda x = 0$, donc $\lambda = 0$ car $x$ est non nul. $\{x, y\}$ est donc bien une famille libre.

   (c) Le théorème de la base incomplète nous permet maintenant d'affirmer qu'il existe des vecteurs $e_3, \cdots, e_n$ tels que $(x, y, e_3, \cdots, e_n)$ forment une base de $E$. Soit alors l'endomorphisme $g$ défini par :
   $$g(x) = y \quad \text{et} \quad g(y) = g(e_3) = \cdots = g(e_n) = 0.$$

   (d) On a alors :
   $$f \circ g(x) = f(y) \neq 0 \text{ (par hypothèse) et } g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

   (e) Ce dernier résultat est contradictoire avec le fait que $g$ et $f$ commutent donc $f$ est forcément l'endomorphisme nul si son noyau est non réduit à $\{0\}$.

2. On suppose maintenant que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

   (a) Soit $x$ quelconque. Si $\{x, f(x)\}$ est une famille libre, le théorème de la base incomplète nous dit que l'on peut trouver des vecteurs $e_3, \cdots, e_n$ tels que $(x, f(x), e_3, \cdots, e_n)$ soit une base de $E$. On définit alors l'endomorphisme $g$ par :
   $$g(x) = x \text{ et } g(f(x)) = g(e_3) = \cdots = g(e_n) = 0.$$
   On a donc :
   $$f \circ g(x) = f(x) \neq 0 \text{ et } g \circ f(x) = 0.$$
   Cela contredit donc le fait que $f$ et $g$ commutent. Donc $x$ et $f(x)$ sont liés quel que soit $x$.

   (b) Si $x \neq 0$, $(x, f(x))$ est une famille liée. Donc il existe un complexe $\lambda(x)$ tel que $f(x) = \lambda(x)x$. Si $x$ est nul, le résultat est évident.

   (c) D'après la question précédente :
   $$f(x) = \lambda(x)x \quad \text{et} \quad f(\mu x) = \lambda(\mu x)(\mu x).$$
   Mais $f(\mu x) = \mu f(x)$, d'où $\mu f(x) = \lambda(\mu x)\mu x$. $\mu$ étant non nul, on a donc $f(x) = \lambda(\mu x)x$. Comme on avait déjà $f(x) = \lambda(x)x$ et que $x$ est non nul, on a donc bien $\lambda(\mu x) = \lambda(x)$.

(d) Soit $x$ et $y$ deux vecteurs libres. On écrit $f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$. Mais $f(x+y) = \lambda(x+y)(x+y)$. En égalant les deux expressions, on trouve :

$$\lambda(x)x + \lambda(y)y = \lambda(x+y)(x+y),$$

soit encore :

$$[\lambda(x) - \lambda(x+y)]\, x + [\lambda(y) - \lambda(x+y)]\, y = 0.$$

$x$ et $y$ étant libres, on a forcément $\lambda(x) - \lambda(x+y) = \lambda(y) - \lambda(x+y) = 0$ ce qui prouve finalement que $\lambda(x) = \lambda(y)$.

(e) On déduit des deux questions précédentes que, pour tous $x$ et $y$, $\lambda(x) = \lambda(y)$. Donc pour tout $x$, $\lambda(x) = \lambda(0) = \lambda$ indépendant de $x$.

3. On a donc prouvé que si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, alors il existe $\lambda$ tel que, quel que soit $x$, $f(x) = \lambda x$. Si $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, alors $f = 0$, qui est sous la même forme que précédemment avec $\lambda = 0$. Dans tous les cas, si $f$ commute avec tous les endomorphismes, alors $f$ est une homothétie (i.e. $f(x) = \lambda x$). A l'inverse, il est clair que si $f(x) = \lambda x$ alors $f$ commute avec tous les endomorphismes.

**Partie III.** Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable de $E$. On suppose que $f$ possède $p$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ respectivement d'ordre de multiplicité $n_1, \cdots, n_p$.

1. On considère $g$ dans $\mathcal{C}(f)$. Soit $x$ dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$ pour un $i$ dans $\{1, \cdots, p\}$. Comme $f$ et $g$ commutent, on peut écrire :

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x).$$

Donc $g(x)$ est dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$, ce qui signifie que $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$ est stable par $g$. Donc tous les espaces propres de $f$ sont bien stables par $g$.

2. Soit $x$ un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda_i$. Par hypothèse, $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$ est stable par $g$. $g(x)$ est donc dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$, ce qui signifie $f \circ g(x) = \lambda_i g(x)$. D'autre part, $g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$. Donc, pour tout vecteur propre $x$, on a $g \circ f(x) = f \circ g(x)$.

$f$ étant diagonalisable, il existe $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de vecteurs propres de $f$. D'après ce qui précède :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i).$$

$f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base, elles sont donc égales.

3. On vient de montrer que $g$ commute avec $f$ si et seulement si $g$ conserve tous les espaces $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$. On a donc :

$$\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathcal{L}\left(\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2,$$

où $\mathcal{L}\left(\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})\right)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$.

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE B**

**AVRIL 2003**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE**

## EXERCICE n° 1

En posant $u=x-2$, on se positionne au voisinage de 0 et on peut alors appliquer les développements limités connus. On trouve alors comme équivalent : $-(5/96)u$

## EXERCICE n° 2

$998^2 = (1000-2)^2 = 996004$ ;
$13^4 = (10+3)^4 = 28561$

## EXERCICE n° 3

Sur les 18 ouvriers à répartir entre les quatre ateliers de l'usine, 9 sont affectés sur contrainte (quatre ouvriers à l'atelier 1, deux ouvriers aux ateliers 2 et 3 et un ouvrier à l'atelier 4). Il reste 9 ouvriers à affecter dans 4 ateliers, ce qui revient à répartir 9 éléments dans 12 cases (les cases laissées vides correspondant à un changement d'atelier). Ceci donne 220 façons.

**EXERCICE n° 4**

Soit A, l'évènement « l'automobile a une panne des cardans au cours du banc d'essai». La probabilité de A est de 0,001 ;
Soit B, l'évènement « l'automobile a une panne de moteur au cours du banc d'essai». La probabilité de B est de 0,05
Soit C, l'évènement « l'automobile a une panne de l'embrayage au cours du banc d'essai». La probabilité de C est de 0,01
Soit D, l'évènement « l'automobile a une panne des freins au cours du banc d'essai». La probabilité de D est de 0,013
Soit E, l'évènement « l'automobile a une panne de la boite de vitesse au cours du banc d'essai». La probabilité de E est de 0,03

La probabilité demandée s'obtient en utilisant l'événement contraire ; le véhicule ne tombe pas en panne. En utilisant l'indépendance des évènements, on trouve
1-p=(1-0,001)(1-0,05)(1-0,01)(1-0,013)(1-0,03)=0,8995, donc p est égal à 10,05%

**EXERCICE n° 5**

| i | Modèle | Quantités | | Prix | | Ventes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1995 | 2001 | 1995 | 2001 | 1995 | 2001 |
| 1 | Produit A | 50 | 55 | 18 | 22 | 900 | 1210 |
| 2 | Produit B | 69 | 62 | 23 | 25 | 1587 | 1550 |
| 3 | Produit C | 96 | 115 | 28 | 25 | 2688 | 2875 |
| | Ensemble | | | | | 5175 | 5635 |

En utilisant la définition des indices de Laspeyre et de Paasche, on obtient :

$$L_{1/0} = \frac{\sum Q_0 P_1}{\sum Q_0 P_0} = \frac{5225}{5175} = 1{,}0097$$

$$P_{1/0} = \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_1 P_0} = \frac{5635}{5225} = 1{,}0785$$