ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Pourquoi revenir sur le passé ?

SUJET n° 2

La parole suffit-elle à faire échec à la violence ?

SUJET n° 3

Quels peuvent être les effets de la mondialisation sur les spécificités socio-culturelles ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Trouver un équivalent, au voisinage de 2, de l'expression :

$$y = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} - \frac{3}{2}$$

Exercice n° 2

A l'aide de la formule du binôme, calculer les nombres suivants : 998^2 ; 13^4

Exercice n° 3

Le chef du personnel d'une entreprise vient d'embaucher 18 ouvriers interchangeables qu'il doit répartir entre les quatre ateliers de l'usine. Sachant qu'il doit affecter au moins quatre ouvriers à l'atelier 1, au moins deux ouvriers aux ateliers 2 et 3 et au moins un ouvrier à l'atelier 4, de combien de façons peut-il le faire ?

Exercice n° 4

La publicité d'un nouveau véhicule automobile est axée sur la longévité sur le thème : « pas de grosse réparation avant 100.000 kilomètres ». Le service des études techniques du constructeur a cependant fourni au service commercial les probabilités d'apparition avant 100.000 kilomètres des cinq plus grosses pannes :

Pour les cardans, cette probabilité est de 0,001
Pour le moteur, cette probabilité est de 0,05
Pour l'embrayage, cette probabilité est de 0,01
Pour les freins, cette probabilité est de 0,013
Pour la boîte de vitesse, cette probabilité est de 0,03

Quelle est la probabilité pour que le banc d'essai des revues spécialisées de l'automobile prenne à défaut la publicité de ce nouveau véhicule, après étude d'une seule voiture ?

Exercice n° 5

A partir des données du tableau ci-dessous, calculer l'indice de Laspeyre des prix de l'année 2001 par rapport à 1995, ainsi que lindice de Paasche des quantités de l'année 2001 par rapport à 1995 :

I	Modèle	Quantités		Prix	
		1995	2001	1995	2001
1	Produit A	50	55	18	22
2	Produit B	69	62	23	25
3	Produit C	96	115	28	25
	Ensemble				

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre d'Albert Jacquard dont le titre est «DE L'ANGOISSE A L'ESPOIR, leçons d'écologie humaine», paru aux éditions Calmann-Lévy en mars 2002.

Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Jusqu'au milieu du XX^{e} siècle, nous avons considéré tout nouveau pouvoir nous permettant de transformer notre environnement comme un progrès humain. Nous avons rarement remis cette évidence en question; nous y sommes maintenant obligés devant le développement extraordinaire de nos capacités d'action, et ce nouveau regard constitue un changement profond du parcours de l'aventure humaine.

A la façon de Prométhée découvrant le feu, nous nous sommes réjouis de chaque progrès. Selon la mythologie grecque, Zeus, créant le monde, avait prudemment caché aux hommes le secret du feu. Prométhée le leur a dévoilé et en a été puni. Nous pourrions métaphoriquement identifier les scientifiques à Zeus et les techniciens à Prométhée ; les premiers proposent des concepts permettant d'expliquer le cosmos, les seconds apportent la capacité à le transformer. Pour le philosophe Francis Bacon, au XVII^{e} siècle, le but de la science et de la technique était de réaliser tout ce qui était rendu possible par notre compréhension. A cette philosophie optimiste, nous sommes obligés de substituer celle d'Einstein, affirmant, le soir d'Hiroshima : « il y a des choses qu'il faudrait mieux ne pas faire ». Nous ne devons plus nous permettre d'utiliser aveuglément les moyens que nous nous donnons. La bombe nucléaire en est un exemple extrême. En découvrant le mystère de l'énergie présente dans la matière, nous nous sommes donnés des pouvoirs que nous ne devons utiliser qu'en les maîtrisant. Il en est de même pour la découverte du mystère des processus qui se déroulent chez les êtres vivants. Comment résoudre les problèmes éthiques posés par la manipulation du patrimoine génétique ?

Au cours de l'histoire, une des rares occasions où, face à un progrès technique, la question a été posée de renoncer à l'utiliser a été provoquée par la mise au point de l'arbalète, arme beaucoup plus efficace que l'arc. Au cours d'un concile, en 1139, l'Eglise romaine a interdit son usage dans les guerres entre chrétiens, mais l'a permis contre des ennemis non chrétiens. Même si la réponse nous fait sourire, constatons que la question a du moins été posée.

L'important aujourd'hui n'est pas d'accélérer les avancées techniques, mais de les orienter en fonction d'objectifs éthiques. Prenons l'exemple controversé du clonage. La célèbre brebis Dolly a montré qu'il est possible de faire agir la totalité des gènes présents dans le noyau d'une cellule, donc de ramener ce patrimoine à l'état qui était le sien lors de la conception, et de réaliser un double de l'individu. La compréhension des mécanismes en action au sein des êtres vivants nous permet d'intervenir à tous les niveaux : ce qui se produit dans le secret des organes sexuels est maintenant observé dans tous les détails. Nous avons le pouvoir de prendre en main, de transformer la réalité biologique des êtres vivants, y compris nous-mêmes. Nous sommes passés du rôle passif de spectateurs au rôle actif d'acteurs ; nous devenons des cocréateurs.

Des phénomènes évolutifs qui nécessitaient des milliers de générations, des innovations que la nature ne produisait que par erreur sont maintenant réalisables à volonté et rapidement dans les laboratoires. Les êtres vivants ne sont que des choses, la frontière entre l'inanimé et le vivant s'estompe, que devient alors la spécificité humaine ?

Cette spécificité ne peut guère être définie par notre dotation génétique, si proche de celle des autres primates. C'est en s'interrogeant sur l'origine de la conscience qu'une réponse peut être proposée.

Cette conscience nous est permise par la richesse fabuleuse de notre cerveau. Il représente l'objet le plus complexe et jouit de ce fait de performances inouïes, notamment la capacité de comprendre et de transformer le monde.

Mais surtout, cette complexité nous a permis de mettre en place un réseau de communication entre les hommes qui fait de leur ensemble, l'humanité, la seule structure qui soit plus complexe que chaque individu, et qui peut, par conséquent, avoir des performances supérieures. Parmi ces performances, la plus décisive est de permettre à chacun, non seulement d'être, mais de se savoir être, d'être conscient, de parvenir à dire « je ».

La clé de la spécificité humaine est donc l'utilisation de nos performances intellectuelles pour créer le surhomme qu'est la communauté des hommes. Cette communauté opère en chacun une métamorphose plus étrange que celle de la chenille devenant papillon : le passage de l'individu créé par la nature en une personne créée par la rencontre des autres.

Pour qu'un individu devienne un homme, pour qu'en lui émerge une personne, il faut qu'il soit immergé dans une collectivité. C'est grâce aux autres que chacun devient lui-même et est en droit d'exiger le respect. Nous devons donc mettre en place une société où chacun regardera tout autre, non comme un obstacle, mais comme une source.

Le rôle du projet

Dans notre univers, seuls interviennent le présent et le passé ; l'avenir n'existe pas. A chaque instant, les événements se déroulent en fonction de l'état actuel des choses, non en vue de réaliser un état futur. Seuls les hommes font exception : ils ont découverts que demain sera et prennent des décisions aujourd'hui en fonction de ce qu'ils désirent pour demain. Ce faisant, ils ont inversé le rôle du temps. Alors que tout ce qui peuple l'Univers subit les contraintes de l'état de choses présent, les hommes, grâce à la richesse fabuleuse de leur système nerveux central, ont eu l'idée fantastique d'inventer le concept d'avenir.

Du coup, leur statut dans le cosmos a été transformé. Au lieu de seulement subir les forces en action, ils ont pour rôle de les orienter, de choisir, de décider ce qui est bien et ce qui est mal, de construire une éthique. La morale est nécessitée par la possibilité du projet.

Ce constat doit être d'autant plus pris au sérieux que les avancées techniques ont rendues solidaires tous les hommes de la planète. Les choix collectifs doivent maintenant être « mondialisés ». La véritable mondialisation ne doit pas être celle de la finance ou du commerce, elle doit être celle de la culture, à condition de préserver la diversité et le respect des différences. Autrement dit, il faut mettre en place une démocratie planétaire de l'éthique.

Parmi les devoirs nouveaux qui s'imposent aux hommes aujourd'hui, l'un des plus urgents est la gestion raisonnée de leur effectif. Jusqu'à il y a quelques siècles, la nécessité était de préserver la survie de l'espèce en luttant contre l'excès de la mortalité. Cette lutte est maintenant victorieuse, du coup, le danger s'est inversé, c'est l'excès de naissances qui est devenu une menace. Le nombre des hommes, relativement stable jusqu'à la renaissance, a connu depuis une croissance exponentielle, qui s'est accélérée durant la seconde moitié du XX^{è} en raison des succès remportés dans la lutte contre la mortalité infantile. Notre attitude envers la procréation doit désormais être inversée : elle était un devoir, elle devient un droit limité.

Un tel retournement, une telle révolution, s'impose dans de multiples domaines ; nous n'y sommes guère prêts, mais l'effort intellectuel qu'implique le raisonnement scientifique peut nous y aider. La science consiste en effet à aller au-delà des informations fournies par nos sens. Imaginer que la boule de feu qui se lève chaque matin est une étoile autour de laquelle nous tournons a exigé des siècles de réflexion. Ce n'est que bien récemment que nous avons compris la source de l'énergie qu'elle rayonne. Le soleil est un concept inventé par les hommes ; de même les protons, les quarks ou les trous noirs ; leur existence, définitivement cachée à ceux qui se contentent de leurs sensations, nous est révélée par notre capacité de raisonner. La connaissance est la naissance, en nous, d'une représentation du monde.

Pour la construire, la science s'impose quelques règles ; notamment, elle récuse les raisonnements finalistes expliquant ce qui se passe aujourd'hui en fonction de ce qui se passera demain, pour la bonne raison que demain n'existe pas. Tout doit être expliqué par des « parce que », et non pas par des « pour que ».

La connaissance toujours améliorée du cosmos est la grande tâche humaine, sa prouesse. Mais l'invention la plus extraordinaire est celle de l'Homme. Quoi de plus prodigieux que l'auto-construction qui nous permet, en nous regardant nous-mêmes, de nous transformer. La réponse de la science à la question de toujours « qu'est-ce qu'un être humain ? » est plus que jamais source d'émerveillement.

Le point d'arrivée : la personne humaine

Nous devons aujourd'hui non seulement être conscients de nos pouvoirs et nous interroger sur le droit de les exercer en assumant notre rôle de cocréateurs du cosmos, mais aussi comprendre comment notre hypercomplexité cérébrale nous permet d'échapper collectivement au sort commun des objets produits par l'Univers.

Rappelons que la « complexité » est la caractéristique d'une structure dont les éléments sont nombreux, sont divers, et sont reliés entre eux par de multiples interactions. Lorsque cette complexité est suffisante, la structure manifeste des performances qui ne peuvent être déduites de la connaissance de chacun de ses éléments. Appliquons ce constat à « l'objet » qu'est l'humanité. Elle est riche de six milliards d'individus, tous différents ; les conditions de nombre et de diversité sont donc remplies. Mais les interactions sont-elles suffisamment subtiles et intenses ? Cela dépend d'eux. S'ils sont capables de mettre en commun non seulement des projets, des angoisses, des espoirs, alors ils ne sont plus une foule, mais un ensemble intégré capable de performances inaccessibles à chacun des humains isolés, et chacun d'eux peut en profiter.

L'important est de comprendre que mettre en relation est différent d'additionner ; deux plus deux font quatre, mais deux et deux peuvent donner tout autre chose que quatre ; cela est vrai en permanence dans notre cosmos, et cette émergence de l'inattendu est particulièrement spectaculaire avec l'aventure de l'humanité. La richesse de notre cerveau nous a permis de manifester une merveilleuse intelligence, mais c'est la complexité du réseau que nous établissons avec les autres qui nous fait accéder à la conscience d'être.

Pour expliquer cette conscience, on peut évoquer une décision spécifique du Créateur ; mais c'est là une affirmation que l'on peut ni prouver, ni démontrer fausse ; elle repose sur une foi, elle n'entre donc pas dans le discours scientifique. Une autre explication est que notre capacité à dire « je » n'a pas été donnée à chacun par la nature, mais a été apportée par les « tu »venant des autres. Grâce à ce réseau, tout homme est plus que lui-même. Chacun le ressent dans le secret et dans le doute ; pour progresser, la meilleure voie est de comprendre que mon « plus », ce sont les autres, et d'en tirer les conséquences.

Pour appartenir à l'humanité, il ne suffit pas d'avoir reçu la dotation génétique caractéristique de l'espèce, il faut aussi avoir été immergé dans une communauté humaine. Il faut distinguer la définition de l'individu de celle de la personne. Le premier est fait de particules associées en cellules, réunies en organes, la seconde est constituée de liens. Il s'agit de deux univers du discours différents ; le premier est de l'ordre des objets, le second de l'ordre des valeurs.

Les liens que nous tissons constituent la meilleure définition de nous-mêmes. Etre un humain signifie être capable de sortir de soi, de dire « je » comme si l'on parlait d'un autre ; Arthur Rimbaud l'a osé : dans son œuvre, « je » se conjugue à la troisième personne.

Cette conscience a été donnée aux hommes au prix d'un long effort qui a sans doute nécessité la succession de milliers de générations ; elle est un cadeau que les hommes se sont faits à eux-mêmes. Nous avons fait l'humanité, et elle nous a transformés. Il ne s'agit pas d'un cercle vicieux constamment recommencé, mais d'une spirale vertueuse faisant toujours apparaître des possibilités nouvelles. La nature a produit, au terme provisoire d'une longue évolution, des individus ; nous avons créé les personnes.

En tant qu'individus, chacun est un objet parmi d'autres ; il est défini par ses caractéristiques biologiques résultant de son patrimoine génétique ; son histoire peu à peu le façonne, lui donnant une personnalité spécifique ; mais il ne devient véritablement une personne que lorsque la communauté humaine lui reconnaît des droits. Ce concept de droit est inconnu du cosmos ; rien parmi tous les objets qui le constituent, n'est source de droits ; chacun est aveuglément soumis aux forces qui s'exercent sur lui. Evoquer des droits, c'est changer d'univers. L'individu, le sujet, la personnalité appartiennent à l'ordre des réalités que nous pouvons constater et décrire ; la personne appartient à l'ordre du sacré, de l'infiniment respectable, de l'inviolable, défini collectivement par une décision humaine.

A quel stade de son histoire un individu devient-il une personne ? A cette question, il n'y a de réponse qu'arbitraire. Tout au plus pouvons nous évoquer des problèmes liés aux deux extrémités du parcours de vie : la conception, d'où l'interrogation concernant l'avortement, la mort, d'où l'interrogation concernant l'euthanasie.

Un ovule, un spermatozoïde ne sont pas, isolés, le support d'une personne, mais ils se fondent l'un dans l'autre, multiplient les cellules et commencent à former un individu ; celui-ci est alors capable de devenir une personne par l'échange des liens avec les autres. Le lien mère-fœtus introduit la réalité d'une personne dans l'amas de cellules qui se forment et qui, dans l'esprit de la mère, est l'équivalent de « quelqu'un ». Elle a conscience du fait qu'un enfant se forme, et cette conscience rend cet enfant sacré. Dans cette voie, le problème de l'avortement est affronté en admettant que l'embryon devient une personne en fonction de l'attitude de sa mère.

De même, la fin de la vie pose des problèmes nouveaux dus au développement de nos moyens techniques. Autrefois, la mort était la conséquence de processus naturels. Aujourd'hui, dans la plupart des cas, l'instant précis de la mort est le résultat d'une décision technique. Une possibilité de réflexion est de recourir au concept de « mourir », défini comme cette période de la vie qui est ressentie comme ultime. Le rôle de ceux qui assistent le mourant est de lui permettre de vivre son mourir en respectant un équilibre difficile entre la conscience, la lutte contre la douleur et la durée. Une mort plus sereine peut parfois être obtenue au prix d'une vie moins longue.

Entre une conception imprécise et une mort mal définie, il y a toute une vie qui consiste à multiplier les liens, à sortir de soi-même, ce qui est l'objectif dans l'éducation.

Il nous faut maintenant poursuivre cette construction de l'humanité et adopter un projet digne de ce que nous pouvons réaliser.

**ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN**

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

Option Mathématiques

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

PROBLÈME N^{0}1

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

   (b) Étudier la fonction $g(x) = x - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite l que l'on déterminera .

2. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

   (b) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n$.

   (c) Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

3. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $v_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.

(b) Montrer que :

$$v_n = 1 + \frac{u_n}{2}(1+\varepsilon(n)), \quad \text{où } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

(c) En déduire que les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont de même nature.

(d) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \ln v_k = \ln\left(\frac{u_0}{u_n}\right)$.

(e) Conclure quant à la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

PROBLÈME N^{0}2

Dans tout le problème, f désigne une fonction définie sur $]0,+\infty[$.

1. On suppose que f vérifie $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

   (a) Soit $a > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $A_a > 0$ tel que :

   $$\forall x > A_a, \quad f(x) - ax < 0.$$

   (b) En déduire que si $b > a$ alors :

   $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - bx) = -\infty.$$

   (c) Prouver finalement que, pour tout $\varepsilon > 0$:

   $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

2. On suppose que f est positive sur $]0,+\infty[$ et vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$:

   $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

   (a) Donner un exemple simple d'une telle fonction.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que :

   $$\forall x > A_\varepsilon, \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$

3. On suppose maintenant que f est croissante sur $]0, +\infty[$ et vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(a) Montrer que $f(x) = \ln x$ est une telle fonction.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x > A_\varepsilon, \quad f(0) \leq f(x) < \varepsilon x.$$

(c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$

4. Soit $f(x) = -x$.

(a) Montrer que l'on a bien, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \varepsilon x) = -\infty.$$

(b) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) Qu'en concluez-vous?

PROBLÈME N^{0}3

Pour x réel, on pose, lorsque ces intégrales existent :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1 + \cos u}\, du \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1 + \cos u)^2}\, du.$$

1. (a) Montrer que f et g ne sont pas définies en $x = \pi$.

(b) Montrer que f et g sont impaires sur leur domaine de définition.

(c) Déduire de (a) et (b) que le domaine de définition de f et g est $]-\pi, \pi[$.

(d) Montrer que f et g sont indéfiniment dérivables sur $]-\pi, \pi[$.

2. (a) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre $f(x)$ et $g(x)$, pour tout x appartenant à $]-\pi, \pi[$.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1+\cos u)^2}\, du = \int_0^x \frac{1-\cos u}{1+\cos u}\, du.$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que l'on a pour tout x dans $]-\pi, \pi[$:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \\ 2f(x) + g(x) = x \end{cases}$$

(d) En déduire les valeurs respectives de $f(x)$ et $g(x)$ sur $]-\pi, \pi[$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N^{0}1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f une application linéaire de E dans E vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, où Id désigne l'application identité de E.

3. Déduire de tout ce qui précède que f est diagonalisable.

EXERCICE N^{0}2

Soit q l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 2yz.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.

2. Quelle est la matrice associée du produit scalaire associé à q?

3. Montrer que q est définie positive.

PROBLÈME

Définitions et notations :

• E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$.
• On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E.
• On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.
• Pour un endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$, on appelle **commutant de** f, l'ensemble :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f\}.$$

• On désigne par $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
• Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et f un élément de $\mathcal{L}(E)$, on définit l'endomorphisme $P(f)$ par :

$$P(f) = a_0 \,\mathrm{Id} + a_1\, f + \cdots + a_n\, f^n,$$

où Id désigne l'application identité de E et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

• On notera $\mathcal{P}(f) = \{P(f),\ P \in \mathbb{C}[X]\}$.

Partie I. Soit f un endomorphisme quelconque de E.

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que $\mathcal{P}(f) \subset \mathcal{C}(f)$.

3. Montrer, par un exemple très simple, que l'inclusion précédente peut être stricte.

4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(f) \geq 2$.

Partie II. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$. L'objectif de cette partie est de trouver la forme de f.

1. Supposons que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. On veut montrer que f est l'endomorphisme nul.

   (a) Montrer que si f n'est pas l'endomorphisme nul, alors on peut trouver deux vecteurs non nuls x et y tels que :

   $$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(y) \neq 0.$$

   (b) Montrer que (x, y) est un système libre.

   (c) Montrer que l'on peut construire g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $g(x) = y$.

(d) Montrer que f et g ne commutent pas.

(e) Conclure que si $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, alors f est forcément l'endomorphisme nul.

2. Supposons dorénavant que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. On veut montrer que f est nécessairement une homothétie.

   (a) Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que si $(x, f(x))$ est une famille libre, on peut construire un endomorphisme g qui ne commute pas avec f.

   (b) En déduire que pour tout vecteur non nul x de E, il existe $\lambda(x)$ dans $\mathbb{C}$ tel que $f(x) = \lambda(x)\ x$.

   (c) Soit x un vecteur non nul de E et soit μ dans $\mathbb{C}^*$. En écrivant $f(\mu x)$ de deux façons, montrer que $\lambda(\mu x) = \lambda(x)$.

   (d) Soit x et y deux vecteurs libres. En écrivant $f(x + y)$ de deux façons, montrer que $\lambda(x) = \lambda(y)$.

   (e) En déduire que f est nécessairement une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda\ \mathrm{Id}$, où Id est l'application identité de E.

3. Donner finalement tous les endomorphismes f de E qui vérifient $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

Partie III. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E. On suppose que f possède p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ respectivement d'ordre de multiplicité $n_1, \cdots, n_p$.

1. Soit g appartenant à $\mathcal{C}(f)$. Montrer que les espaces propres de f sont stables par g.

2. Réciproquement, montrer que si g conserve tous les espaces propres de f alors g est dans $\mathcal{C}(f)$.

   Indication : on montrera que, si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de f, alors pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$, $f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i)$.

3. En déduire que $\dim \mathcal{C}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$.