ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PROBLÈME N^{0}1

1. Le résultat est vrai pour $n = 0$. Supposons que :
$$0 \leq x_n \leq \sqrt{7} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq y_n \leq \sqrt{14}.$$
On a alors :
$$x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \leq \sqrt{7},$$
et :
$$y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n} \leq \sqrt{7 + \sqrt{7}} \leq \sqrt{7+7} = \sqrt{14}.$$
2. Comme $x_{n+1}^2 = 7 - y_n$, on a bien le résultat demandé.
3. x_{n+1} est positif donc $x_{n+1} + 2 = |x_{n+1} + 2| \geq 2$. D'où :
$$|x_{n+1} - 2| = \left| \frac{3 - y_n}{x_{n+1} + 2} \right| \leq \frac{1}{2} |y_n - 3| .$$
4. On remarque d'abord que :
$$y_{n+1} - 3 = \frac{x_n - 2}{y_{n+1} + 3},$$
puis que $|y_{n+1} + 3| \geq 3$, ce qui donne le résultat.
5. De 3. et 4., on déduit :
$$|x_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{6} |x_{n-1} - 2| .$$
Comme $\frac{1}{6} < 1$, on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 2$. En remplaçant dans l'expression de y_n, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \sqrt{9} = 3$.

PROBLÈME N^{0}2

1. En 0, $\dfrac{e^t}{t} \sim \dfrac{1}{t}$ dont l'intégrale diverge en 0. F n'est donc pas définie pour $x \leq 0$. $\dfrac{e^t}{t}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ l'intégrale est définie pour tout $x > 0$. Finalement, le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a) On montre par récurrence que, pour tout entier n, $F^{(n)}(t) = \dfrac{e^t P_n(t)}{t^n}$ où $P_n(t)$ est un polynôme de degré inférieur où égal à $n-1$.

   (b) On sait, par définition, que :

$$\forall x > 0, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

   Donc :

$$F(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt.$$

   $e^t - 1$ est positif pour tout t positif. Donc $F(x) - \ln x$ est strictement positive sur $[1, +\infty[$ (intégration d'une fonction positive sur un intervalle croissant non réduit à un point), strictement négative sur $]0, 1[$ (intégration d'une fonction positive sur un intervalle décroissant non réduit à un point) et nulle en 1.

   (c) On en déduit aisément $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

   (d) F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée vaut donc $F'(t) = \dfrac{e^t}{t}$, qui est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. F est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. (a) $e^{\frac{t}{2}} > t$ dès que $t > 0$ d'où le résultat.

   (b) On en déduit que :

$$F(x) \geq \int_1^x e^{\frac{t}{2}}\, dt = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{1}{2}}).$$

   F a donc une branche infinie parabolique de direction Oy.

   (c) $F''(t) = e^t \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}\right)$. (1,0) est donc le seul point d'inflexion de F (points dont les abscisses sont les zéros de F'').

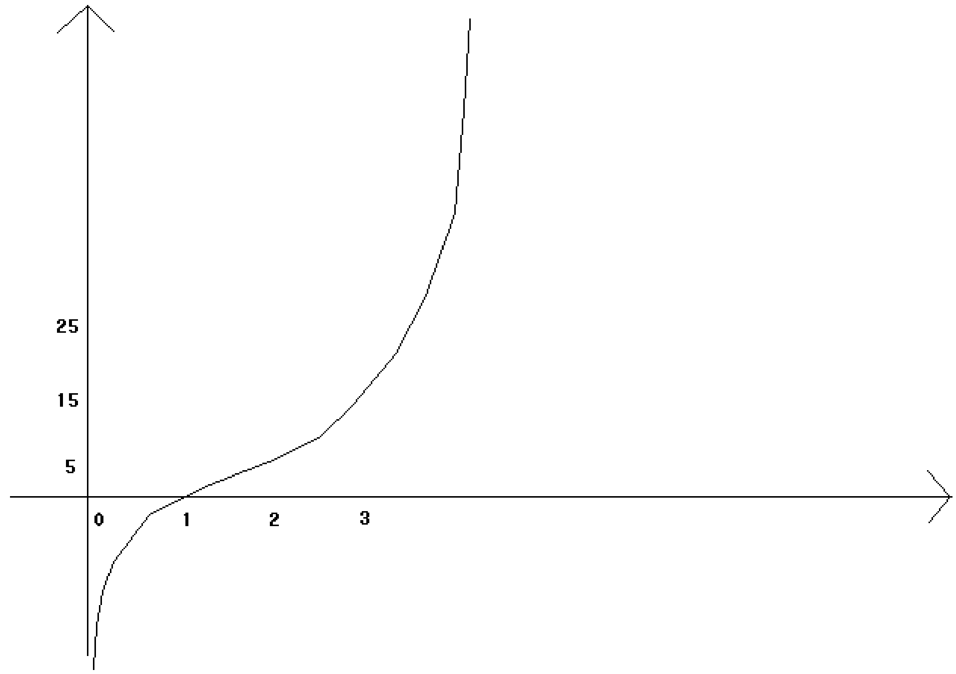
(d) 

Figure 1: Graphe de F

PROBLÈME N^{0}3

1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $[0,1]$. Il est clair que

$$f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x\in[0,1]} f_1(x) + \sup_{x\in[0,1]} f_2(x).$$

   En passant alors au sup, on a le résultat.

2. Soit $u \geq 0$. $f(x) + ug(x)$ est une fonction continue de la variable x. Cette fonction est donc bornée sur $[0,1]$, ce qui implique que $\sup\limits_{x\in[0,1]} (f(x) + ug(x))$ est fini.

3. (a) Par définition de l'inf, pour tout x de [0,1], $\inf\limits_{y\in[0,1]} f(y) \leq f(x)$. Donc pour tout $u \geq 0$, $\inf\limits_{y\in[0,1]} f(y) + ug(x) \leq f(x) + ug(x)$. En passant au sup dans cette dernière expression, on trouve :

$$\sup_{x\in[0,1]} \left(\inf_{y\in[0,1]} f(y) + ug(x) \right) \leq h(u).$$

Mais $\inf_{y\in[0,1]} f(y)$ est indépendant de x donc :

$$\sup_{x\in[0,1]}\left(\inf_{y\in[0,1]} f(y)+ug(x)\right)=\inf_{y\in[0,1]} f(y)+\sup_{x\in[0,1]}(ug(x)).$$

Comme u et g sont positifs :

$$\sup_{x\in[0,1]}(ug(x))=u\sup_{x\in[0,1]}(g(x)).$$

Finalement :

$$\inf_{y\in[0,1]} f(y)+u\sup_{x\in[0,1]} g(x)\leq h(u),$$

qui est le résultat demandé (puisque x et y sont des variables muettes).

(b) Il est clair que pour tout x de $[0,1]$ et tout $u\geq 0$:

$$f(x)\leq\sup_{y\in[0,1]} f(y)\quad\text{et}\quad ug(x)\leq u\sup_{y\in[0,1]} g(y).$$

En ajoutant ces deux inégalités, on trouve :

$$f(x)+ug(x)\leq\sup_{y\in[0,1]} f(y)+u\sup_{y\in[0,1]} g(y).$$

En passant enfin au sup sur x, on obtient bien, pour tout $u\in[0,+\infty[$:

$$h(u)\leq\sup_{y\in[0,1]} f(y)+u\sup_{y\in[0,1]} g(y).$$

(c) D'après (a) et (b), on a :

$$\inf_{x\in[0,1]} f(x)+u\sup_{x\in[0,1]} g(x)\leq h(u)\leq\sup_{x\in[0,1]} f(x)+u\sup_{x\in[0,1]} g(x).$$

Il est alors clair que :

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{h(u)}{u}=\sup_{x\in[0,1]} g(x).$$

(d) Pour que h soit bornée sur $[0,+\infty[$, il est nécessaire que $\lim_{u\to+\infty}\frac{h(u)}{u}=0$. Si h est bornée, on a donc $\sup_{x\in[0,1]} g(x)=0$, soit encore (puisque g est continue) g est nulle sur [0,1]. Réciproquement, si g est nulle sur [0,1], h est constante égale à $\sup_{x\in[0,1]} f(x)$, elle est donc bornée.

4. (a) Soit $u'\geq u\geq 0$. g étant positive, il est clair que pour tout x de [0,1] :

$$f(x)+ug(x)\leq f(x)+u'g(x).$$

En passant au sup sur x, on trouve alors $h(u')\geq h(u)$, ce qui est la croissance de h.

(b) Soit $u \leq u'$. Posons $f_1(x) = f(x) + ug(x)$ et $f_2(x) = (u' - u)g(x)$. En appliquant le résultat du 1. on trouve bien :

$$h(u') \leq h(u) + (u' - u) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

(c) Soit u et u_0 dans $\mathbb{R}_+$. Si $u \geq u_0$, on sait d'après 4.(a) et 4.(b) que :

$$0 \leq h(u) - h(u_0) \leq (u - u_0) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Si $u \leq u_0$, on a alors :

$$0 \leq h(u_0) - h(u) \leq (u_0 - u) \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$0 \leq |h(u) - h(u_0)| \leq |u - u_0| \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

En faisant tendre u vers u_0, on obtient donc $\lim\limits_{u \to u_0} h(u) = h(u_0)$. h est donc continue en tout point u_0 de $\mathbb{R}_+$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE N^{0}1

1. (a) Les valeurs propres (réelles) sont -1, 1 et 2.

   (b) $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{{}^t(-1,1,0)\right\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{{}^t(1,1,0)\right\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{{}^t(0,0,1)\right\}$

   (c) A a 3 valeurs propres distinctes elle est donc diagonalisable. Elle est également inversible car 0 n'est pas valeur propre.

2. (a) On connait une base de vecteur propre. Un matrice de passage possible est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b)

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Il est clair que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$. Comme $P^{-1}AP$ est diagonale, cela prouve que A^n est diagonalisable dans la même base que A.

   (b) On en déduit alors :

$$\begin{aligned} A^n = P(P^{-1}AP)^nP^{-1} &= P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 & (-1)^{n+1}+1 & 0 \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Il est facile de voir que $P^{-1}A^{-1}P$ est également diagonale. En fait, la forme précédente est valable pour tout n dans $\mathbb{Z}$. On a donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{EXERCICE N}^0\textbf{2}}$

f est un endomorphisme de E de dimension n tel qu'il existe un entier $p \geq 2$ vérifiant $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Comme $f^{p-1} \neq 0$, il existe x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Soit alors p réels $\lambda_0, \cdots \lambda_{p-1}$ vérifiant :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0. \tag{1}$$

L'image par f^{p-1} de cette expression est également nulle. Or :

$$f^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x)\right) = \lambda_0 f^{p-1}(x),$$

car $f^k = 0$ dès que $k \geq p$. Comme, par hypothèse, $f^{p-1}(x) \neq 0$, on a donc $\lambda_0 = 0$. On recommence alors en prenant l'image par f^{p-2} de l'expression (1) et on obtient de même $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on prouve alors que :

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0,$$

ce qui permet d'affirmer que la famille $\{x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x)\}$ est libre.

Réciproquement, si la famille $\{x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x)\}$ est libre, tous les éléments qui la composent sont non nuls et en particulier $f^{p-1}(x) \neq 0$.

2. E étant de dimension n, une famille libre de E ne peut pas comporter plus de n éléments ce qui montre que $p \leq n$.

3. Soit $x \in Kerf^k$. $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = f(0) = 0$, donc $x \in Kerf^{k+1}$. En particulier on a bien $\{0\} \subset Kerf \subset Kerf^{p-1} \subset Kerf^p = E$.

4. Montrons que toutes ces inclusions sont strictes.

   Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$ et soit $1 \leq k \leq p$. Posons $y = f^{p-k}(x)$ (avec par convention $f^0 = Id$). On a alors $f^k(y) = f^p(x) = 0$ et $f^{k-1}(y) = f^{p-1}(x) \neq 0$. Donc $y \in Kerf^k$ et $y \notin Kerf^{k-1}$, ce qui prouve que l'inclusion de $Kerf^{k-1}$ dans $Kerf^k$ est stricte .

PROBLÈME

Partie I

1. Il est clair que la trace est linéaire.

2. Les éléments diagonaux étant invariants par l'opération de transposition, on a bien $\text{tr}(A) = \text{tr}({}^tA)$.

3. (a) Le terme générique de AB est $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ donc :

   $$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}.$$

   De même, terme générique de BA est $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ d'où :

   $$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}.$$

   En permutant les sommes sur i et sur k on obtient le résultat.

   (b) Si A et B sont semblables, il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. On peut alors écrire d'après le 3.(a) :

   $$\text{tr}B = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}A.$$

4. Il est clair que $\text{tr}\,(A\,{}^tA - {}^tAA) = 0$ et $\text{tr}I = n$. n étant non nul, le résultat est acquis.

Partie II

1. La trace étant une application linéaire, on a bien le résultat.

2. (a) f est linéaire pour les mêmes raisons que précédemment.

   (b) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $f(A) = 0$. Cela signifie donc que pour tout X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = 0$. Soit la matrice E_{lm} dont tous les éléments sont nuls sauf celui au croisement de la l-ième ligne et de la m-ième colonne qui vaut 1. Les terme diagonaux de AE_{lm} sont :

   $$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{ki} = a_{il} e_{li},$$

   Car e_{ki} est nul si k est différent de l. Mais e_{li} est nul si i est différent de m, donc le seul terme diagonal éventuellement non nul est c_{mm} qui vaut alors a_{ml}. Comme $\mathrm{tr}(AE_{lm}) = 0$, on a en fait $a_{ml} = 0$. En faisant varier l et m entre 1 et n, on trouve donc que tous les éléments de A sont nuls. On a finalement prouvé que :

   $$(f(A) = 0) \Rightarrow (A = 0),$$

   ce qui est exactement l'injectivité de f.

   (c) $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2$.

   (d) f est une application linéaire injective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, qui sont de même dimension, donc f est bijective.

3. (a) Soit $e_1, \cdots, e_{n^2-1}$ une base de E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe u dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(e_1, \cdots, e_{n^2-1}, u)$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La forme linéaire φ_0 définie par $\varphi_0(u) = 1$ et $\varphi_0(e_1) = \cdots = \varphi_0(e_{n^2-1}) = 0$ répond alors à la question.

   (b) L'application f est bijective, donc pour tout φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, il existe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

   $$\varphi = f(A).$$

   Donc, il existe A_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que φ_0 est l'application $M \mapsto \mathrm{tr}(A_0 M)$. On alors bien :

   $$E = \mathrm{Ker}\ \varphi_0 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A_0 M) = 0\}.$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

AVRIL 2002

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE n° 1

1) On forme 5 ! nombres de cette manière, soit 120 nombres.

2) Le plus petit de ces nombres est 12345 et le plus grand 54321. Le 40$^{\text{ème}}$ nombre est 24351 et le rang occupé par le nombre 43251 est le rang 88.

3) En utilisant le fait qu'à chaque position (il y en a 5), chaque nombre (1,2,3,4,5) est utilisé 24 fois et que (1+2+3+4+5)x24=360, on trouve le total de 3.999.960

EXERCICE n° 2

1) La fonction f est continue et dérivable sur l'ensemble de définition. Comme la limite en 0 de cette fonction est $-\infty$ et comme la limite en $+\infty$ est $+\infty$, la fonction f passe par 0 en un point unique.

   Comme f(3) est strictement négatif et f(4) strictement positif, la solution unique est comprise entre 3 et 4.

2) La fonction g est également continue dérivable sur l'ensemble de définition. Sa dérivée est strictement négative, donc g est une fonction décroissante, donc bijective. En calculant g(3) et g(4), on constate que l'image de l'intervalle [3,4] est contenue dans l'intervalle [3,4]

   Pour montrer b), il suffit de calculer la dérivée seconde de g sur l'intervalle [3,4] , de constater que celle-ci est strictement positive, donc la fonction g' est croissante sur cet intervalle, puis de calculer g'(3) qui est égal à -1/12 et g'(4) qui est égal à –1/16.

3) le a) se démontre par récurrence. Pour b), on se sert de g(m)=m et du résultat démontré au 2-b en utilisant le théorème des accroissements finis.

   Pour c), il est évident, compte tenu du résultat précédent 3-b, que la limite de la suite est m,

   On sait que $u_0=3$, on sait que $u_1=g(u_0)=3{,}725$ et que $u_2=g(u_1)=3{,}67121$. Comme u_2-m (en valeur absolue) est inférieur à $(1/12)^2$, on obtient une approximation de m à 3,67 à 0,01 près.

EXERCICE n° 3

Si a=0, alors VAN (projet A)=VAN (projet B) = 255.000 euros

Si a=12%, alors VAN(projet A)=158.918 euros et VAN(projet B) = 108.256euros