CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

AVRIL 2001

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE

I- En utilisant les formules de dérivées relatives au logarithme et à la tangente , il vient immédiatement :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

II-

$$I_0(x) = \int dx = x + C$$

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C$$

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

III - Pour n>1 , on écrit $I_n(x) = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} . \frac{dx}{\cos^2 x}$

Intégrons par parties en posant

$$u(x) = \cos^{2-n} x, v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u'(x) = (n-2)\cos^{1-n} x.\sin x, v(x) = \tan x$$

Ainsi :

$$I_n(x) = \cos^{2-n} x \tan x - (n-2)\int \tan x \cos^{1-n} x \sin x dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\left[I_n(x) - I_{n-2}(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow I_n(x) = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}(x)$$

IV- $I_3(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

PROBLEME I

I-

Au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow e^x \tan x = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

II-

1- $f'(x) = e^x \tan x + e^x(1+\tan^2 x) > 0$ puisque u²+u+1 n'a pas de racine réelle et est toujours positif.

f est donc strictement croissant de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to R$

Nous savons alors que f admet une fonction réciproque g définie et croissante sur R telle que g(0)=0
Par ailleurs , f étant formée de fonctions indéfiniment dérivables sur I est elle-même indéfiniment dérivable sur I.

2-Nous avons vu que f admet une fonction réciproque g.

Si t =f(x) $\leftrightarrow$ x= g(t) on a $g'(t) = \dfrac{1}{f'(g(t))}$ définie sur R puisque f'(x)>0 , $g''(t) = -\dfrac{f''(g(t))}{f'^2(g(t))}\dfrac{1}{f'(g(t))}$,elle même encore dérivable ,et ainsi de suite :g(t) est donc indéfiniment dérivable sur R puisqu'il en est ainsi de f'(x) par rapport à x.

Donc g(t) admet des développements limités de tous ordres quand t tend vers 0 , donnés théoriquement par la formule de Mac Laurin Young :

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2!}g''(0) + ... + \frac{t^n}{n!}g^{(n)}(0) + o(t^n)$$

On a g(0)=0, $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$,le développement de g est donc de la forme : $g(t) = t + at^2 + bt^3 + o(t^3)$

Plus simplement que la formule Mac-Laurin , nous obtiendrons a et b en écrivant que f(g(t))=t d'où :

$$\begin{aligned} f(g(t)) &= g(t) + g^2(t) + \frac{5}{6}g^3(t) + o(t^3) \\ &= t + at^2 + bt^3 + (t^2 + 2at^3) + \frac{5}{6}t^3 + o(t^3) \\ &= t + (a+1)t^2 + (b + 2a + \frac{5}{6})t^3 + o(t^3) = t \end{aligned}$$

d'où par identification : $g(t) = t - t^2 + \dfrac{7}{6}t^3 + o(t^3)$ (1)

III-1- et 2-

$$e^{n\pi+\alpha_n}\tan\alpha_n = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha_n}\tan\alpha_n = e^{-n\pi} \Leftrightarrow \alpha_n = g(e^{-\pi n})$$ puisque $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

3-Quand $n \to +\infty, e^{-n\pi} \to 0, \alpha_n \approx e^{-n\pi}$ d'après (1)

4- Si on pose $t = e^{-n\pi}$ alors $\beta_n = e^{2n\pi}(\alpha_n - e^{-n\pi}) = \dfrac{1}{t^2}[g(t) - t]$

Si $t = e^{-n\pi} \to 0, g(t) - t \approx -t^2$ d'après (1) et $\beta_n \to -1 = l$

Enfin , $\beta_n - l = \beta_n + 1 = \dfrac{1}{t^2}[g(t) - t + t^2] \approx \dfrac{1}{t^2}\dfrac{7}{6}t^3 = \dfrac{7}{6}t \Leftrightarrow \beta_n - l \approx \dfrac{7}{6}e^{-n\pi}$

IV-

1-Si f est indéfiniment dérivable sur I et f'(0) différent de 0, f' est continue sur I et il existe un voisinage de 0,soit $J =]\alpha,\beta[, a \le \alpha < 0 < \beta \le b$ sur lequel f' garde un signe constant , celui de f'(0)
Donc f est strictement monotone sur J et admet une fonction réciproque g.

En raisonnant comme précédemment , $\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{f'(x)} \\ g''(t) &= -\frac{f''(x)}{f'^3(x)} \end{aligned}$ … et ainsi de suite.

g est donc indéfiniment dérivable sur $]f(\alpha); f(\beta)[$,g(0) est nul puisque f(0)=0 implique que 0=g(0) et g admet des développements limités de tous ordres :

$$g(t) = b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n + o(t^n)$$

2-Pour obtenir les coefficients du développement de g , il suffit d'identifier avec les coefficients du développement limité de f(g(t)), d'où

$$f(g(t)) = a_1(b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n) + a_2(b_1^2 t^2 + 2b_1 b_2 t^3 + ...) + ... + a_n b_1^n t^n + o(t^n) = t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 b_1 = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0 \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

ce qui permet de déterminer de proche en proche : $\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{a_1} \\ b_2 = -\dfrac{a_2}{a_1^3} \\ . \\ . \\ . \\ . \end{cases}$

PROBLEME II

I-La relation de récurrence donne pour n=1 : $u_2 = u_1 - 2u_1^3 = u_1(1-2u_1^2)$

Puisque $0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a $0 < 1-2u_1^2 < 1$ donc $0 < u_2 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En raisonnant par récurrence et en supposant $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}, n \geq 1$,on a donc $0 < u_n^2 < \frac{1}{2}, 0 < 1-2u_n^2 < 1$

d'où encore $0 < u_{n+1} = u_n(1-2u_n^2) < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La suite (u_n) est donc décroissante ,minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$.Elle est convergente et a pour limite

$l \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

La fonction f telle que $f(x) = x - 2x^3$ étant continue ,la relation de récurrence nous donne pour $n \to +\infty$
$l = l - 2l^3$ soit l=0

II-

1-

$$V_n = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1}$$

Quand $n \to +\infty, u_{n+1} \to 0^+, \frac{1}{u_{n+1}} \to +\infty, V_n = v_1 + v_2 + ... + v_n \to +\infty$

2- $v_n = \frac{1}{u_n - 2u_n^3} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-2u_n^2)}{u_n(1-2u_n^2)} = \frac{2u_n}{1-2u_n^2}$, puisque $u_n \neq 0$.

On sait que $0 < u_n < u_1 \Rightarrow 0 < u_n^2 < u_1^2, -u_n^2 > -u_1^2, 1-2u_n^2 > 1-2u_1^2 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1-2u_n^2} < \frac{1}{1-2u_1^2}$ et

$0 < v_n < \frac{2}{1-2u_1^2} u_n$.

On en déduit $u_n > kv_n$ avec $k = \frac{1-2u_1^2}{2} > 0$ d'où $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n > kV_n$ avec $V_n \to +\infty$.

Il s'ensuit que $S_n \to +\infty$.

III- $w_n = \dfrac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \dfrac{u_n^2 - u_n^2(1-2u_n^2)^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \dfrac{1-(1-2u_n^2)^2}{u_n^2(1-2u_n^2)^2} = 4\dfrac{(1-u_n^2)}{(1-2u_n^2)^2}$

Pour $n \to +\infty, u_n \to 0 \Rightarrow w_n \to 4$.

IV-

1-Rappelons :

Si $a_n = l + \alpha_n$ alors $b_n = l + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ .Or $\alpha_k \to 0$ et il suffit de démontrer que $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \to 0$

Pour $n \geq n_0 + 1, s_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}\alpha_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\alpha_k$

$|S_n| \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|\alpha_k| + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|\alpha_k|$

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors $\dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|\alpha_k| < \dfrac{n-n_0}{n}\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\exists n_1 / n \geq n_1 \Rightarrow \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|\alpha_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}, n_0$ étant fixé.

Donc $n \geq n_2 = \sup(n_0, n_1) \Rightarrow |S_n| < \varepsilon$ et $S_n \to 0$ .Ainsi ,

$\alpha_n \to 0 \Rightarrow b_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to l$

2-Appliquons ce résultat à la suite (w_n) ;puisque $w_n \to 4, z_n = \dfrac{1}{n}(w_1 + w_2 + ... + w_n) = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{u_n^2 - u_1^2}) \to 4$

Or $u_{n+1}^2 \to 0^+, \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_1^2} \approx \dfrac{1}{u_{n+1}^2}$ quand $n \to +\infty$.

Donc $nu_{n+1}^2 \approx \dfrac{1}{4}, u_{n+1}^2 \approx \dfrac{1}{4n} \approx \dfrac{1}{4(n+1)}$ ou $u_n^2 \approx \dfrac{1}{4n}$

Comme $u_n > 0,$ on en déduit : $u_n \approx \dfrac{1}{2\sqrt{n}}, n \to +\infty$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

AVRIL 2001

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

PROBLEME

1. Soit $g(x) = 1 + x - x\ln x$ définie sur]0;+∞[.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1 + x - x\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ car $\begin{cases} 1 + x \to 1 \\ x\ln x \to 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(\frac{1}{x} + 1 - \ln x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \frac{1}{x} + 1 \to 1 \\ \ln x \to +\infty \end{cases}$

b) $g'(x) = 1 - (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$

$g'(x) = -\ln x$

$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$ et $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$

Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ +	0	-
$g(x)$	‖ 1 croissante	2	décroissante $-\infty$

c) pour $x \in]0;1]$, $g(x) > 0$

pour $x \in]1;+\infty[$, g est continue et strictement décroissante avec $g(1) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β unique dans]0;+∞[.

d) pour $x \in]0;\beta[$, $g(x) > 0$

pour $x \in]\beta;+\infty[$, $g(x) < 0$

e) $g(3{,}5) \approx 0{,}115$

$g(3{,}6) \approx -0{,}011$

donc 3,5 < β < 3,6

2. Soit $f(x) = 2 + \dfrac{\ln x}{1+x}$ définie sur]0;+∞[

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 + \dfrac{1}{1+x} \cdot \ln x)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \dfrac{1}{1+x} \to 1 \\ \ln x \to -\infty \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2 + \dfrac{\ln x}{x} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}})$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ car $\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} \to 0 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} \to 1 \end{cases}$

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}(1+x) - \ln x}{(1+x)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x} + 1 - \ln x}{(1+x)^2} = \dfrac{1 + x - x\ln x}{x(1+x)^2} = \dfrac{g(x)}{x(1+x)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ car $x(1+x)^2 > 0$ sur]0;+∞[.

Tableau de variation de f

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	croissante	$f(\beta)$	décroissante	2

c) L'abscisse du point A intersection de C et de la droite D d'équation $y = 2$ est solution de l'équation $\begin{cases} f(x) = 2 \\ x \in]0;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \dfrac{\ln x}{1+x} = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Le point A a donc pour abscisse 1 et pour ordonnée 2.

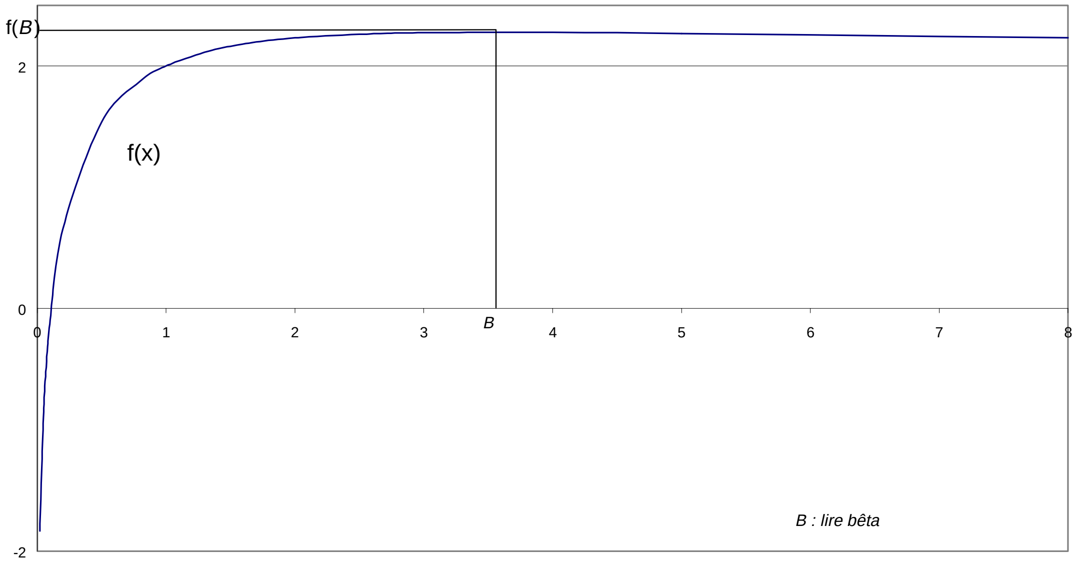
Pour déterminer la position de C par rapport à D, étudions le signe de $f(x) - 2$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$$f(x) - 2 = \frac{\ln x}{1+x}$$

Comme $1 + x > 0$, le signe de $f(x) - 2$ est le même que celui de $\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-2$	‖	-	0	+	
	‖	C en dessous de D	A	C au-dessus de D	

On peut noter que D est asymptôte à C au voisinage de l'infini car $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2) = 0$.



3. Soit $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{1+x}\, dx$ pour $t \geq 1$

a) Comme $Ln(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, $I(t)$ représente l'aire en unités d'aire de la portion de plan définie par $\begin{cases} 1 \leq x \leq t \\ 2 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

b) Soit $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x}\, dx$ pour $t \geq 1$

Posons $p = \ln x$ ou $x = e^p$

La fonction $p \mapsto e^p$ est dérivable et strictement croissante d'où

$$J(t) = \int_{\ln 1}^{\ln t} \frac{p}{e^p}\, e^p \, dp = \int_0^{\ln t} p \, dp = \left[\frac{1}{2} p^2 \right]_0^{\ln t} = \frac{1}{2} (\ln t)^2$$

c) Soit $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ pour $t \geq 1$

Intégrons par parties en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$K(t) = \left[-\frac{1}{x}\ln x \right]_1^t - \int_1^t -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$K(t) = -\frac{1}{t}\ln t - \left[\frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$K(t) = -\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t} + 1$$

$$K(t) = 1 - \frac{1+\ln t}{t}$$

• $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ avec $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ positive sur $[1;t]$, $\forall t \geq 1$.
Donc $K(t) \geq 0$ pour $t \geq 1$.

• $1 - K(t) = 1 - 1 + \frac{1+\ln t}{t} = \frac{1+\ln t}{t}$

pour $t \geq 1$, $1 + \ln t \geq 0$ donc $1 - K(t) \geq 0$ d'où $K(t) \leq 1$

Pour $t \geq 1$, on a donc bien $0 \leq K(t) \leq 1$

d) • Pour $x \geq 1$, on a $1 + x \geq x \iff \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{x} \iff \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \geq 0$

• $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1+x-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$

Pour $x \geq 1$, on a $x^2 + x \geq x^2 \iff \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2}$

Pour $x \geq 1$, on a donc $0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$

Pour $x \geq 1$, nous avons $\ln x \geq 0$ d'où
$0 \leq \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x+1} \leq \frac{\ln x}{x^2}$

Les fonctions $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ étant intégrables sur $[1;+\infty[$, nous avons

$$0 \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx - \int_1^t \frac{\ln x}{x+1}\,dx \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

Donc $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$

e) $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t) \leq 1$

$0 \leq J(t) - I(t) \leq 1$

$-J(t) \leq -I(t) \leq 1 - J(t)$

$J(t) - 1 \leq I(t) \leq J(t)$

Pour $t \geq 1$, $(\ln t)^2 \geq 0$

$$\frac{J(t)-1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{J(t)}{(\ln t)^2}$$

Or, $J(t) = \frac{(\ln t)^2}{2}$ donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{2}$

Comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(\ln t)^2} = 0$, on en déduit $\lim_{t\to+\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2} = \frac{1}{2}$

EXERCICE

a) L'espace des tirages de 13 cartes parmi 52 comprend

$C_{52}^{13} = \frac{52 \times 51 \times \cdots \times 41 \times 40}{13!}$ événements élémentaires.

L'événement « avoir 4 As dans une main » comprend $C_{48}^{9} = \frac{48 \times 47 \times \cdots \times 41 \times 40}{9!}$ événements élémentaires.

$$p(4\ As) = \frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0{,}00264$$

b) L’événement «avoir 2 As dans une main» comprend

$$C_4^2 \times C_{48}^{11} = \frac{4\times 3}{2} \times \frac{48\times 47\times \cdots \times 39\times 38}{11!}$$ événements élémentaires.

$$p(2\ As) = \frac{C_4^2 \times C_{48}^{11}}{C_{52}^{13}} = 6\times \frac{39\times 38\times 13\times 12}{52\times 51\times 50\times 49} \approx 0{,}213$$

c) Calculons la probabilité de ne pas avoir d’As $p(0As)$ et nous en déduirons la probabilité d’avoir au moins un As $1 - p(0As)$.
L’événement « ne pas avoir d’As dans une main » comprend

$$C_{48}^{13} = \frac{48\times 47\times \cdots \times 37\times 36}{13!}$$ événements élémentaires.

$$p(au\ moins\ 1\ As) = 1 - p(0As) = 1 - \frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} = 1 - \frac{39\times 38\times 37\times 36}{52\times 51\times 50\times 49} \approx 0{,}696$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1

1. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Notons E_{ij} l'endomorphisme de E défini par :

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$$

avec δ_{jk} symbole de Kronecker. Alors $\{E_{ij}\}_{\{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}}$ forme une base de $\mathcal{L}(E)$.
On a :

$$\phi_u(E_{ij})(e_k) = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{jk} e_i = (\lambda_i - \lambda_k) E_{ij} e_k.$$

Donc u diagonalisable $\Rightarrow \phi_u$ diagonalisable.

2. Supposons ϕ_u diagonalisable et $\mathbb{K}$ algébriquement clos. u admet donc un vecteur propre :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \exists x (\neq 0_E) \in E, u(x) = \lambda x.$$

L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans E qui à tout endomorphosme f associe $f(x)$ est linéaire surjective car $x \neq 0_E$. Cette application transforme donc une base de $\mathcal{L}(E)$ en une famille génératrice de E. Cette famille génératrice contient une sous-famille qui forme une base de E. par hypothèse, $\mathcal{L}(E)$ admet une base de vecteurs propres pour ϕ_u, il existe donc une famille libre $(f_1, ..., f_n)$ de vecteurs propres de ϕ_u telle que : $(f_1(x), ..., f_n(x))$ forme une base de E.
$\forall i \in \{1, ..., n\}, \phi_u(f_i) = \lambda_i f_i = u f_i - f_i u$ donc

$$\lambda_i f_i(x) = u(f_i(x)) - \lambda f_i(x)$$

donc

$$u(f_i(x)) = (\lambda_i + \lambda) f_i(x).$$

$(f_1(x), ..., f_n(x))$ forme donc une base de vecteurs propres pour u. Donc u est diagonalisable.

Exercice 2

1. En appliquant la première propriété de q à $x = y = 0$, on trouve $q(0) = 0$ et en l'appliquant à $x = 0, y \in E$ on trouve $q(y) = q(-y)$. On en déduit que f est symétrique.
   Soit $(x, x', y) \in E^3$,
   $$f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}[q(x' + 2y) - q(x' - 2y)] - q(x' + y) + q(x' - y)].$$
   Ce résultat est indépendant de x donc :
   $$f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) = f(x', y) - f(0, y) - f(x', y) = 0.$$
   Par un argument classique, on en déduit que f est $\mathbb{Q}$-linéaire par rapport à sa première variable.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in E^2$. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
   $$\lambda \rightarrow f(\lambda x, y) - \lambda f(x, y)$$
   est nulle sur $\mathbb{Q}$ et continue d'après la seconde propriété de q. Elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.
   En conclusion, f est une forme bilinéaire symétrique et
   $$x \rightarrow \frac{1}{4}q(2x) = q(x)$$
   est une forme quadratique.

2. $$\| x + (t + h)y \|^2 + \| x + (t - h)y \|^2 = 2 \| x + ty \|^2 + 2h^2 \| y \|^2 .$$
   Donc $t \rightarrow \| x + ty \|^2$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on applique le résultat de la question précédente avec $q(x) = \| x \|^2$.

Problème

Partie I

1. Toute matrice carrée peut s'écrire sous la forme demandée, il suffit pour cela de prendre
$$M' = \frac{1}{2}(M +^t M), M'' = \frac{1}{2}(M -^t M).$$
On vérifie aisément que M' est symétrique et M'' est antisymétrique.
En outre, si on cherche les matrices M' et M'' quie vérifient $M = M' + M''$, en transposant, on obtient
$$^tM = M' - M''$$
et les relation
$$M = M' + M'',^t M = M' - M''$$
donnent une solution unique.

2. Déjà, la matrice nulle est magique.
Soit $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que si $\forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, 3,$
$$l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} = l_{1j} + l_{2j} + l_{3j} = l_{11} + l_{22} + l_{33} = l_{31} + l_{22} + l_{13}$$
et
$$n_{i1} + n_{i2} + n_{i3} = n_{1j} + n_{2j} + n_{3j} = n_{11} + n_{22} + n_{33} = n_{31} + n_{22} + n_{13}$$
alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} + \lambda(n_{i1} + n_{i2} + n_{i3}) = l_{1j} + l_{2j} + l_{3j} + \lambda(n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}) = l_{11} + l_{22} + l_{33} + \lambda(n_{11} + n_{22} + n_{33}) = l_{31} + l_{22} + l_{13} + \lambda(n_{31} + n_{22} + n_{13})$.
L'ensemble des matrices magiques est donc un sous - espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.

3. La transposée d'une matrice magique est magique. En effet, les diagonales restent inchangées et comme la transposition revient à permuter ligne et colonne d'une matrice, les égalités entre somme des éléments des lignes et somme des éléments des colonnes est toujours valable.

4. Des égalités et d'après la question précédente, $M' = \frac{1}{2}(M +^t M)$ et $M'' = \frac{1}{2}(M -^t M)$, il est immédiat que si M est magique, M' et M'' le sont aussi.

5. Vérification immédiate

6. Toute matrice antisymétrique d'ordre 3 s'écrit $M'' = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. La vérification des matrices magiques d'ordre 3 conduit au système suivant :
$$-\gamma + \beta = -\alpha + \gamma = -\beta + \alpha = \gamma - \beta = \alpha - \gamma = \beta - \alpha = 0.$$
De là, on en déduit que
$$M'' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Traitons le cas où la somme des éléments diagonaux est nulle. Dans ce cas, les matrices magiques symétriques sont de la forme :

$$M' = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On traite le cas où la somme des termes diagonaux n'est pas nulle et vaut s en ajoutant à chacun des 9 éléments de la matrice trouvée $\frac{s}{3}$. Ceci fournit l'écriture :

$$M' = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Ainsi, comme toute matrice peut s'écrire comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique, toute matrice magique s'écrit de la forme :

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit,

$$M = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)A - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)B + \nu C = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

On en déduit ainsi que A, B, C est une famille génératrice de l'espace des matrices magiques. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est libre, ce qui est immédiat. La dimension est donc 3.

Partie II

1.

$$A^2 = B^2 = AC = CA = BC = CB = 0,$$
$$C^2 = 3C,$$

2.

$$AB + BA = 12I - 4C.$$

3. $(\alpha A + \beta B + \gamma C)(\lambda A + \mu B + \nu C)$ peut s'écrire sous la forme

$$3\gamma\nu C + \begin{pmatrix} 2\beta\lambda + 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda - 6\alpha\mu \\ -4\beta\lambda & -8\beta\lambda & -4\beta\lambda \\ 2\beta\lambda - 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda + 6\alpha\mu \end{pmatrix}$$

Ce produit est magique si et seulement si $\beta\lambda$ et $\alpha\mu$ sont nuls.

4. On en déduit tous les produits magiques de matrices magiques :

$$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \gamma C(\lambda A + \mu B + \nu C) = 3\gamma\nu C,$$

$$\alpha = 0, \lambda = 0 \Rightarrow (\beta B + \gamma C)(\mu B + \nu C) = 3\gamma\nu C,$$
$$\beta = 0, \mu = 0 \Rightarrow (\alpha A + \gamma C)(\lambda A + \nu C) = 3\gamma\nu C,$$
$$\lambda = \mu = 0 \Rightarrow \gamma C(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 3\gamma\nu C.$$

   La matrice C est la seule qui soit magique et produit de deux matrices magiques.

5. $(\alpha A + \beta B + \gamma C)(\alpha' C + \beta' I_3) = \alpha\beta' A + \beta\beta' B + (3\gamma\alpha' + \gamma\beta')C$ qui est bien magique.

6. $M^2 = (\alpha A + \beta B + \gamma C)^2$ est magique si et seulement si $\alpha\beta = 0$.
   Si $\alpha\beta \neq 0$,
$$M^2 = 12\alpha\beta I_3 + (3\gamma^2 - 4\alpha\beta)C = aI_3 + bC$$
   et donc
$$M^{2n} = (M^2)^n = hI_3 + kC.$$
   Par conséquent, $M^{2n+1} = M^{2n}.M$ est magique en tant que produit d'une matrice magique et d'une combinaison linéaire de I_3 et de C ce qui établit le résultat demandé concernant les puissances impaires.

7. Le déterminant d'une matrice magique est $D(M) = -36\alpha\beta\gamma$. Donc M est inversible si et seulement si les trois scalaires α,β et γ sont non nuls. Alors on trouve
$$M^{-1} = \frac{1}{36}[\frac{3}{\beta}A + \frac{3}{\alpha}B + \frac{4}{\gamma}C]$$
   qui est magique ($\alpha' = \frac{1}{12\beta}, \beta' = \frac{1}{12\alpha}, \gamma' = \frac{1}{9\gamma}$). De plus, $\alpha'\beta'$ est toujours différent de 0 : les résultats de la question précédente subsistent
$$M^{-2p} = (M^{-1})^{2p} \text{ n'est pas magique ;}$$
$$M^{-2p+1} = (M^{-1})^{2p+1} \text{ est magique .}$$
   Les expressions données à la question précédente pour M^{2n} ou M^{2n+1} subsistent même si $n < 0$.