CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME I

1 - En effectuant dans J_n le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x; du = -dx$, on a

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\frac{\pi}{2} - u).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u.du = I_n \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2 - Soit $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, 0 \le I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}} \sin^n x.dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$

$x \to \sin^n x$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$0 \le I_n \le (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \sin^n(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx \le (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \sin^n(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + \frac{\alpha}{2}$ en majorant le sinus par 1 dans la deuxième intégrale.

Or, $0 \le \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sin^n(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = 0 \Rightarrow \exists M \in N / \forall n \ge M, (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \sin^n(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \le \frac{\alpha}{2}$

donc $\forall n \ge M, I_n \le \alpha$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ C.Q.F.D.

3 - A l'aide d'une intégration par parties , on obtient :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \times \sin x.dx = \left[-\cos x.\sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1).\cos x.\sin^n x.\cos x.dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\cos^2 x.dx$$

d'où $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.(1-\sin^2 x)dx = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \Rightarrow (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$

4 -

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.dx = 1$$

Si n est pair alors n=2p et on a

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2(p-1)} I_{2p-4} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)...\times 1}{2p\times 2(p-1)\times.....\times 2} \times I_0$$

Soit , en multipliant le numérateur par (2p).(2p-2)……..2 le numérateur devient alors (2p) ! et le dénominateur (2p.2(p-1)….2)²=(2^p.p !)² donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

De même , on a $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = ... = \frac{2p\times 2(p-1)\times ...\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times ...\times 1} I_1$ soit :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

5 - pour tout x$\in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Rightarrow (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$$

La suite de terme général $(n+1)I_{n+1}I_n$ est donc une constante égale à sa valeur initiale

$$I_1 I_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}, \forall n \in N .$$

Par ailleurs , on a $0 \le I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ Or, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ (en utilisant la formule de récurrence entre I_{n+2} et I_n) et donc , d'après le théorème d'encadrement $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{In+1}}{I_n} = 1$ c'est-à-dire $I_{n+1} \approx I_n$

Donc, $\frac{\pi}{2(n+1)} = I_{n+1}I_n \approx I_n{}^2 \Rightarrow I_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

6 - $t \to e^{-t^2}$ étant continue et positive sur R^+ et $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et sachant que $t \to e^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ alors $t \to e^{-t^2}$ est intégrable sur R^+

Par ailleurs, $e^x > 1 + x$ sur R .On en déduit donc en particulier $\forall t \in [0;\sqrt{n}], 0 \leq 1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$ et

$\forall t \in R, 1 + \frac{t^2}{n} \leq e^{\frac{t^2}{n}} \Rightarrow \forall t \in [0;\sqrt{n}], 0 \leq (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$ et

$$\forall t \in R, (1+\frac{t^2}{n})^n \leq e^{t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow K_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

En posant $t = \sqrt{n}\sin u$ dans K_n , il vient : $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 u)^n \sqrt{n}.\cos u.du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n+1}.du$

donc d'après ce qui précède $K_n \approx \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$t \to \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}$ est continue et positive sur R^+ et $\frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n} \underset{\infty}{\approx} \frac{n^n}{t^{2n}}$, fonction qui est intégrable en $+\infty$

donc $t \to \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}$ est intégrable sur R^+

D'où $e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} (1+\frac{t^2}{n})^{-n} dt = l_n$

En effectuant dans l_n le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan u, dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u}.du$, il vient

$$l_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^n} \frac{\sqrt{n}.du}{\cos^2 u} = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n-1}.du \approx \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-1)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ donc

$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq l_n$, le théorème d'encadrement donne alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

PROBLEME II

1 - Soit (x , y) élément de R² tel que f(x)=f(y) alors on a $|x-y| \leq |f(x)-f(y)| = 0$ donc x = y.
Donc f est injective ,comme elle est continue et définie sur un intervalle ,elle est strictement monotone.

2 - La fonction f étant croissante on sait que soit f a une limite en $+\infty$ soit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Supposons que f converge vers une limite l réelle

Soit x un réel , alors on a $f(x+1)-f(x) = |f(x+1)-f(x)| \geq |x+1-x| = 1$

En passant à la limite dans cette inéquation on obtient $0 = l - l \geq 1$ ce qui est faux donc il y a contradiction avec l'hypothèse et par conséquent $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Le même type de raisonnement tenu en $-\infty$ donne $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

On en déduit que f(R)=R et que f est bijective

3 -

a- On a donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$
Soit g l'application définie sur [a, b] telle que g(x)=f(x)-x
g est continue , $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires , on sait qu'il existe un réel c sur l'intervalle [a, b] tel que g(c)=0 c'est à dire tel que f(c)=c C.Q.F.D.

b- On a , du fait de la croissance de f : $f(c)-f(a) = |f(c)-f(a)| \geq |c-a| = c-a$

Or , f(c)=c donc $f(a) \leq a$ et donc f(a)=a

De même , $f(b)-c = f(b)-f(c) = |f(b)-f(c)| \geq |b-c| = b-c \Rightarrow f(b) \geq b$ ce qui entraîne f(b)=b

Soit x un élément de [a , b], alors $f(x)-a = |f(x)-f(a)| \geq |x-a| = x-a$ donc $f(x) \geq x$

De même , $b-f(x) = |f(b)-f(x)| \geq |b-x| = b-x$ d'où $f(x) \leq x$

Par conséquent f(x)=x pour tout x de [a , b]

c- Soit g la fonction définie sur R par g(x)=a+ b- f(x)
Dans ces conditions , g est continue et pour tout (x , y) élément de R² , $|g(x)-g(y)| \geq |x-y|$

Par ailleurs , $a \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq a+b-f(x) \leq b \Rightarrow g([a,b]) \subset [a,b]$
Cette fonction étant croissante et vérifiant les hypothèses de la question b) on a donc pour tout x de [a , b] g(x)=x soit, pour tout x de [a , b] f(x)=a+ b- x

4-

a- Soit x un réel strictement positif ,alors $f(x)-f(0) = |f(x)-f(0)| \geq |x-0| = x$ donc
$x + f(0) \leq f(x) < x$

On en déduit que pour tout x strictement positif , $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$

D'après le théorème d'encadrement , on a bien $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Soit (x , y) un élément de R² , $x \leq y$ alors

$$f(y) - f(x) = |f(y) - f(x)| \geq |y - x| = y - x \Rightarrow f(x) - y \geq f(x) - x$$

On en déduit que la fonction qui à x associe f(x)-x est croissante sur R et comme elle est majorée par 0 , elle admet donc une limite en $+\infty$

b- Soit x un réel strictement négatif ,alors $f(0) - f(x) = |f(0) - f(x)| \geq |0 - x| = -x$ donc $x < f(x) \leq x + f(0)$

On en déduit que pour tout x réel strictement négatif , $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$

D'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Comme précédemment , on montre que la fonction qui à x associe f(x)-x est décroissante sur R et qu'elle est minorée par 0 ,elle a une limite en $-\infty$

c- Si $A = \varnothing$,alors la fonction qui à x associe f(x)-x ne s'annule pas sur R et comme elle est continue , elle doit rester de signe constant

Donc ,pour tout x réel soit f(x)<x (cas a)) , soit f(x)>x (cas b))

PROBLEME III

1 -

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \sin x.dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}.\sin 2x.dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x.dx = \frac{4}{\pi}\left([x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.dx\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2 - \frac{4}{\pi}$$

2 -

a- $$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos p(x+\pi) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x+\pi)}{2\sin\frac{x+\pi}{2}} = (-1)^n \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\cos\frac{x}{2}}$$

b- $$\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x-\frac{x}{2})}{\sin x}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x.\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}.\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}\cos px-(-1)^n(\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}(-1)^p.\cos px)$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1})+\sum_{p=1}^{n}\cos px(1+(-1)^{n+p+1})$$

c- On a , pour tout entier p>0 :

$$I_p=\left(\left[x\frac{\sin px}{p}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin px}{p}dx\right)=\frac{\pi}{2p}\sin p\frac{\pi}{2}+\frac{\cos p\frac{\pi}{2}-1}{p^2}$$

Si p=2q , on a $I_{2q}=\dfrac{(-1)^q-1}{4q^2}$

Si p=2q+1 , $I_{2q+1}=\pi\dfrac{(-1)^q}{2(2q+1)}-\dfrac{1}{(2q+1)^2}$

d- On utilise la question b) et on obtient

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\frac{\sin nx}{\sin x}.dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}(1+(-1)^{n+1})dx+\sum_{p=1}^{n}(1+(-1)^{n+p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\cos px.dx\right)$$

$$b_n=\frac{\pi}{8}(1+(-1)^{n+1})+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{n}(1+(-1)^{n+p+1})I_p$$

Si n=2k+1 , $b_{2k+1}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{2k+1}(1+(-1)^p)I_p=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{q=1}^{k}I_{2q}$ car $1+(-1)^p=\begin{cases}0 si p=2q+1\\2 si p=2q\end{cases}$ et si Si

Si n=2k , $b_{2k}=\dfrac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{2k}(1+(-1)^{p+1})I_p=\dfrac{4}{\pi}\sum_{q=0}^{k-1}I_{2q+1}$

3 -

a- La fonction f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$;sa série de Fourier est convergente en tout point x de ces intervalles vers f(x)

Au point 0 , f admet une limite à droite : $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 1$ et admet une limite à gauche $f(0^-) = -1$ puisque la fonction est impaire.

De $\frac{f(x)-f(0^+)}{x} = \frac{x-\sin x}{x.\sin x} \approx \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{x}{6}$,on déduit que $f_d^{'}(0^+) = 0$

On obtient facilement que $f_d^{'}(0^-) = 0$ pour des raisons de symétrie.

Alors ,la série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-)) = 0$

Au point $\frac{\pi}{2}$, on a $f(\frac{\pi}{2}^+) = 0; f(\frac{\pi}{2}^-) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}; f_g{}'(\frac{\pi}{2}^-) = 1; f_d{}'(\frac{\pi}{2}^+) = 0$

La série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(0+\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$

Au point π ,aucun problème car la fonction est nulle sur $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

b- On a $\frac{x}{\sin x} = b_1\sin x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{2k}.\sin 2kx + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{2k+1}\sin(2k+1)x$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Si $x = \frac{\pi}{2}, \sin 2k\frac{\pi}{2} = 0$;il reste $b_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

c- (R_k) est une suite positive ,décroissante , de limite nulle car c'est le reste d'une série convergente .On a :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{q=1}^{k} I_{2q}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{q=1}^{k}\frac{(-1)^q-1}{4q^2}$$

$$0 = \sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{q=2p+1}^{k}\frac{-2}{(2p+1)^2}\right) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}-\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{(2p+1)^2}\right)$$

$$0 = \sum_{k\geq 1}(-1)^k R_k$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE I

On applique la formule de Taylor :

$$\begin{cases} P(X+a_0) = P(X) + \frac{a_0}{1!}P'(X) + \ldots + \frac{a_0^n}{n!}P^{(n)}(x) \\ \vdots \\ P(X+a_n) = P(X) + \frac{a_n}{1!}P'(X) + \ldots + \frac{a_n^n}{n!}P^{(n)}(x) \end{cases}$$

On sait que les polynômes $P(X), \ldots, P^{(n)}(X)$ forment une base de l'espace $R_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré n car ils constituent une famille échelonnée.

Donc $(P(X+a_0), \ldots, P(X+a_n))$ forment une base de $R_n[X]$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible. C'est le cas car son déterminant est un déterminant de Vandermond (non nul si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

EXERCICE II

1) Par l'absurde :
si A non inversible, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_n C_n = 0$ (1) où $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A. Il existe i_0 tel que pour tout $j \neq i_0, \left|\lambda_j\right| \leq \left|\lambda_{i_0}\right|$ (2)
Alors la relation (1) donne $\lambda_1 a_{i_0 1} + \ldots + \lambda_{i_0} a_{i_0} + \ldots + \lambda_n a_{i_0 n} = 0$ d'où
$\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} = -\sum_{j \neq i_0} \lambda_j a_{i_0 j} \Rightarrow \left|\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0}\right| \leq \sum_{j \neq i_0} \left|\lambda_j a_{i_0 j}\right| \leq \left|\lambda_{i_0}\right| \left|\sum_{j \neq i_0} \left|a_{i_0 j}\right|\right|$ contradiction avec l'hypothèse
$\forall i, \left|a_{ii}\right| > \sum_{i \neq j} \left|a_{ij}\right|$.

2) On sait que $I, B, \ldots, B^{n^2}$ est une famille à n^2+1 éléments dans l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes donc elle est liée. Donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_0 I + \ldots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$. Soit k le plus petit entier tel que $\lambda_k \neq 0$ alors $\lambda_k B^k + \ldots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$. Comme B inversible, on peut multiplier la dernière équation par B^{-k-1} d'où $B^{-1} = -\frac{1}{\lambda_k}(\lambda_{k+1} I + \ldots + \lambda_{n^2} A^{n^2})$. Ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit $J = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C(0,0,1)$

$C(a,b,c) = aI + bJ + cJ^2$

$J^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -12 \\ 6 & -2 & 36 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = -2I + 6J$

Donc, par récurrence immédiate, $\forall k \in N, J^k \in Vect(I, J, J^2)$

Donc comme C^{-1} est un polynôme en J, $C^{-1} \in Vect(I, J, J^2)$ donc C^{-1} est de la forme cherchée.

PROBLEME

Partie I :

L'espace E est euclidien donc pour toute forme linéaire φ de E, il existe un unique vecteur $v / \forall u \in E, \varphi(u) = \langle u, v \rangle$. Alors pour tout $y \in E, \langle f(u), y \rangle$ est une forme linéaire donc il existe un unique vecteur noté $f^*(y)$ tel que $\langle f(u), y \rangle = \langle u, f^*(y) \rangle$.

Il reste à montrer la linéarité de l'application f^* ainsi définie :

$\langle x, f^*(y+y') - (f^*(y) + f^*(y')) \rangle = \langle f(x), y+y' \rangle - \langle f(x), y \rangle - \langle f(x), y' \rangle = 0$

De même, pour tout a réel et pour tout y, $\langle x, f^*(ay) - af^*(y) \rangle = \langle f(x), ay \rangle - a\langle f(x), y \rangle = 0$.

2) si f^* admet comme matrice dans une base orthonormée B alors $(B)_{ij}$ est la composante de $f^*(e_j)$ sur le vecteur e_i i.e. $B_{ij} = \langle e_i, f^*(e_j) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = (A)_{ji}$. Où A est la matrice de f dans cette même base orthonormée.

   $\langle x, (f+g)^*(y) \rangle = \langle (f+g)(x), y \rangle = \langle x, (f^* + g^*)(y) \rangle$

3) $\langle x, (\lambda f)^*(y) \rangle = \langle \lambda f(x), y \rangle = \langle x, \lambda f^*(y) \rangle$

   $\langle x, (f \circ g)^*(y) \rangle = \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle g(x), f^*(y) \rangle = \langle x, g^* \circ f^*(y) \rangle$

4) Si $f(F) \subset F$, $\forall y \in F^\circ, \langle f^*(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = 0$ car $f(x) \in F$ donc $f^*(y) \in F^\circ$

Inversement, si F° stable, alors $F^{\circ\circ} (\supset F)$ est stable par $f^{**} = f$ et comme $\begin{cases} E = F \oplus F^\circ \\ E = F^\circ \oplus F^{\circ\circ} \end{cases}$ avec l'égalité des dimensions, on a $F = F^{\circ\circ}$

6) On sait qu'une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique. On a montré que la matrice de l'adjoint d'une application dans une base orthonormée est égale à la transposée de cette application d'où la conclusion.

Partie II

1) Soit f un endomorphisme normal et soit $P(f) = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n$ alors il est évident que $P(f) \circ P(f^*) = P(f^*) \circ P(f)$ donc $P(f)$ est normal.
2) Pour tous les sous-espaces propres de f endomorphisme normal, il existe un polynôme P tel que ce sev propre est un noyau de $P(f)$ or $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \langle P(f)(x), P(f)(x)\rangle = 0$ et $\langle P(f)(x), P(f)(x)\rangle = \langle x, P(f^*) \circ P(f)(x)\rangle = \langle x, P(f) \circ P(f^*)(x)\rangle = \langle P(f^*)(x), P(f^*)(x)\rangle$

d'où $\langle P(f^*)(x), P(f^*)(x)\rangle = 0$

d'où $P(f^*)(x) = 0$

3) Soit x et y tels que $\begin{cases} f(x) = \lambda x \\ f(y) = \mu y \\ \lambda \neq \mu \end{cases}$, $\langle f(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \mu y\rangle$ d'où $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ et comme $\lambda \neq \mu, \langle x, y\rangle = 0$.

4), 5) et 6) soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F sous espace stable par f . Complétons cette base par une base orthonormée $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ alors dans cette base la matrice de f peut s'écrire : $\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ donc celle de f^* dans cette même base s'écrit $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tD & {}^tC \end{pmatrix}$. Comme f est normale, matriciellement (1)

$A^tA + D^tD = {}^tAA$ et ${}^tDD = C^tC + D^tD$ alors $(1) \Rightarrow tr(D^tD) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} d_{ij}^2 = 0 \Rightarrow D = 0$.

Donc la matrice de f dans la base considérée est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et celle de f^* est $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tC \end{pmatrix}$ avec $A^tA = {}^tAA$ et ${}^tDD = D^tD$ ce qui implique que F et F° sont stables par f et f^* et que les restrictions de f à F et F° sont des endomorphismes normaux.

Partie III

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice d'un endomorphisme normal. Alors, $A^tA = {}^tAA \Rightarrow b^2 - c^2 = 0$ et $(a-d)(b-c) = 0$

Si $b = c$ les 2 équations sont vérifiées

Si $b \neq c, \begin{cases} a = d \\ b = -c \neq 0 \end{cases}$

d'où 2 écritures possibles pour A : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec b non nul dans la seconde expression.

Cette seconde expression peut aussi s'écrire $\rho\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si on pose $a - ib = \rho e^{i\theta}, \theta \neq k\pi, k \in Z$

La première expression est celle d'une matrice symétrique donc cette matrice est diagonalisable.

2) Par récurrence sur n dimension de E.*
C’est évident si n=1.
On suppose la propriété vraie au rang n-1.
En dimension n, on sait que f admet un sous espace stable de dimension 1 ou 2. En effet, le polynôme caractéristique de f peut se factoriser en produit de polynômes de degrés 1 ou 2. Si il existe un facteur de degré 1, on a une droite vectorielle stable par f, sinon, on aura un plan vectoriel stable par f.
Soit F un sous-espace stable par f de dimension 1 ou 2 et soit F° son orthogonal dans E . On peut alors appliquer l’hypothèse de récurrence à F et F° : il existe 2 bases orthonormées de F et F° telles que dans chacune de ces bases f a la forme exigée. Il ne reste plus qu’à considérer la base orthonormée constituée de la réunion de chacune de ces bases.

3) Le polynôme caractéristique s ‘écrira alors : $\chi_A(T) = \prod_i (\lambda_i - T)^{a_i} \prod_j (T^2 - 2\rho_j \cos\theta_j T + \rho_j^2)$

4) A est orthogonalement semblable à

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix} & & \\ & 0 & & \begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix} & \\ & & & & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

PROBLEME

A)

1) Etude de f

f (x) est définie continue sur $]0,+\infty[$.

Son domaine de définition est donc $D = R^{+*}$

- Dérivée de f (x)

$$f^{'}(x) = (|x \ln x|)^{'}$$

- Si $x > 1$, $|x \ln x| = x \ln x$

$$f^{'}(x) = \ln x + 1 \;;\; f^{'}(x) > 0$$

- Si $0 < x < 1$; $|x \ln x| = -x \ln x$

$$f^{'}(x) = -\ln x - 1 \;;\; f^{'}(x) < 0 \text{ si } x > \frac{1}{e}$$

$$f^{'}(x) > 0 \text{ si } x < \frac{1}{e}$$

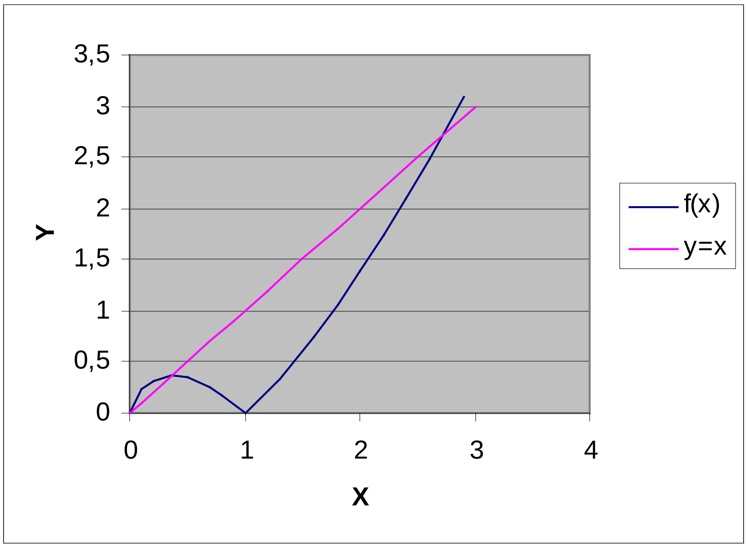
<u>Tableau de variation :</u>

x	0		1/e		1		e		$+\infty$
$f^{'}(x)$		+	0	-	0	+		+	
$f(x)$	0	croissante	1/e	décroissante	0	croissante	e	croissante	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} |x \ln x| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x \ln x| = 0$$

<u>Courbe représentative :</u>



- <u>Coordonnées des points (C) $\cap$ (D) :</u>

$|x \ln x| = x$

pour $x > 1$, $\quad x \ln x = x$

$\quad\quad\quad\quad \Leftrightarrow \ln x = 1$ d'ou $x = e$

$\Rightarrow$ Premier point d'intersection : A(e,e)

Pour $0 < x < 1$, $\quad -x \ln x = x$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1 \text{ d'ou } x = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ Deuxième point d'intersection B(1/e,1/e).

Puisque $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ troisième point d'intersection C(0,0).

2° - Montrons que α unique sur $]1,e[$ tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.

Soit $I =]1, e[$

f (x) est continue et strictement croissante sur $]1,e[$,

par conséquent il existe un α unique sur $]1,e[$ tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.

f (1) = 0

f (e) = e ln e = e

$\Rightarrow \forall u \in]0,e[, \exists! a \in$ I tel que f (a) = u (Théorème des valeurs intermédiaires)

Ici, on prend $u = 1/e$

$\Rightarrow \exists! \alpha \in]1,e[$ tel que $f(\alpha) = 1/e$

Déterminons une valeur approchée α, à 10^{-1} près par encadrements successifs :

On a :

f (2) =1,38 $\rangle$ 0,367

f (1,1)=0,104 $\langle$ 0,367

f (1,5)=0.608 $\rangle$ 0,367

f (1,3)=0,3410 $\langle$ 0.367

f (1,4)=0,47 $\rangle$ 0.367

On a donc $\alpha \approx 1,3$

B)

1° Les valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est constante

Pour que (u_n) soit constante, il faut que $u_1 = f(u_0) = u_0$

On obtient :

$$u_0 = \frac{1}{e} \quad , u_0 = e \; , \; u_0 = 0$$

2°

$$u_0 \in \left]0{,}1/e\right[$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = |u_n \ln u_n| \text{, ici } f(u_n) = -u_n \ln u_n$$

$$u_1 = f(u_0) < 1/e$$

$u_0 \in \left]0{,}1/e\right[$ et $u_1 \in \left]0{,}1/e\right[$ donc cette relation est vraie pour u_0 et u_1,

Montrons que si elle est vraie pour u_n elle est vraie pour u_{n+1}.

Supposons $0 < u_n < \frac{1}{e}$

sur $\left]0{,}1/e\right[$, f est strictement croissante donc

$$f(0) < f(u_n) < f(1/e$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < |1/e \ln 1/e|$$
$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1/e$$

donc si $u_n \in \left]0{,}1/e\right[$, $u_{n+1} \in \left]0{,}1/e\right[$ donc $u_n \in \left]0{,}1/e\right[$.
Donc on vient de montrer que si la relation $0 < u_n < 1/e$ était vraie pour u_n elle était vraie pour u_{n+1} donc elle est vraie pour tout n$\in N$.

$$u_{n+1} - u_n = |u_n \ln u_n| - u_n$$
or, $0 < u_n < \frac{1}{e}$

$$u_{n+1} - u_n = -u_n \ln u_n - u_n = -u_n(\ln u_n + 1)$$

$-u_n < 0$ *et* $\ln u_n + 1 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Sur $\left]0{,}1/e\right[$, (u_n) est croissante et l'on vient de montrer qu'elle est bornée (majorée et minorée) donc elle est convergente et a pour limite :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{e}$$

3°

$u_0 \in \left]1/e,1\right[$

- Encadrement de u_1

$$\frac{1}{e} \langle u_0 \langle 1$$
$$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{e} \langle \ln u_0 \langle \ln 1$$
$$\Leftrightarrow -u_0 \ln\frac{1}{e} \rangle -u_0 \ln u_0 \rangle -u_0 \ln 1$$
$$\Leftrightarrow 0 \langle u_1 \langle u_0$$

$u_0 \in \left]1/e,1\right[$, donc, $u_1 = f(u_0) \in f(\left]1/e,1\right[)$
Sur $\left]1/e,1\right[$, f décroit donc $f\left]1/e,1\right[\in \left]0,1/e\right[$ donc $u_1 \in \left]0,1/e\right[$

On se retrouve dès le rang 1 dans le cas précédent, on aura alors u_n tend vers $1/\mathrm{e}$.

4) $u_0 = 1$
$\Rightarrow f(u_0) = f(1) = 0$
La suite est « constante » si on pose par prolongement $f(0) = 0$.

5)
$u_0 \in \left]1,\alpha\right[\qquad F(\alpha) = 1/e$

f croit ainsi que u_n
$u_1 \in f(1,\alpha) = \left[0,1/e\right]$

On se ramène au cas n°1 et u_n a pour limite $1/e$.

6)

$u_1 \in f(]\alpha, e[) =]1/e, e[$

Si $u_1 \in]1/e, 1[$ alors u_n tend vers 1/e

Si $u_1 \in]1, e[$, $u_1 < e$

Si $\forall n,\ u_n < e$, $u_{n+1} = f(u_n) < e$ oui car

- si $u_n \in]0, \alpha[$, $f(u_n) < 1/e < e$
- si $u_n \in]\alpha, e[$, on revient au cas

$u_0 \in]\alpha, e[$ et $u_1 < e$

donc $0 < u_n < e$

Montrons que $u_1 < u_0$

Montrons donc que $f(u_0) < u_0$ sur $]\alpha$, e[

$f(u_0) = u_0 \ln u_0$

$u_0 \in]\alpha, e[\Rightarrow \dfrac{f(u_0)}{u_0} = \ln u_0 < \ln e < 1$ donc $f(u_0) < u_0$ donc $u_1 < u_0$.

$u_0 \in]\alpha, e[\Rightarrow u_1 \in]1/e, e]$

Si $u_1 \in]1/e, 1]$, alors u_n tend vers 1/e, celà nous ramène au cas 1.
Si $u_1 \in]1, \alpha]$, alors u_n tend vers 1/e, celà nous ramène au cas 1.
Si $u_1 \in]\alpha, e]$, alors $u_2 < u_1$.........

Par récurrence, si $\exists$ n tel que $u_n \in]1/e, \alpha]$, u_n tend vers l

si $\forall n, u_n \in]\alpha, e[$, la suite est bornée décroissante donc elle converge.
La seule limite possible est $l = 1/e$
(La suite sort de $]\alpha, e[$ à partir d'un certain rang.

7) $u_0 \rangle e$

Montrons que $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$

$\Leftrightarrow f(u_n) - f(u_{n-1}) \geq 2(u_n - u_{n-1})$

$\Leftrightarrow f(u_n) - 2u_n \geq f(u_{n-1}) - 2u_{n-1}$

Or $u_n \rangle u_{n-1}$ car la suite est croissante.

Montrons que $f(u) - 2u$ croit sur $]e, +\infty[$

$f(u) - 2u = u\ln u - 2u = u(\ln u - 2) = \ln u - 2 + 1 = \ln u - 1$

$f^{'}(u) \rangle 0$ si $\ln u \rangle 1$ donc si $u \rangle e$

Donc, $\forall u \rangle e,$ $f(u) - 2u$ est croissante

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$ (cqfd)

Notons $v_n = u_n - u_{n-1}$ $v_n \rangle 0$, $\forall n$

On a montré que $v_{n+1} \rangle 2 v_n$

$\Rightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \rangle 2$, c'est une suite de termes positifs, croissante, non bornée donc divergente.

EXERCICE

1)

- Si A et B sont inversibles alors, il existe A^{-1}et B^{-1} tels que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

et $BB^{-1}= B^{-1}B = I$.

$\Rightarrow$ $AB*B^{-1}*A^{-1}= A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}= AA^{-1}=I$, donc AB est inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

- Si AB inversible alors il existe $(AB)^{-1}$ tel que : $AB*(AB)^{-1}=(AB)^{-1}*AB=I$

$\Rightarrow$ $AB*B^{-1}*A^{-1}= AA^{-1}=I$, avec $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Donc A est inversible si (AB) est inversible avec $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. .

La démonstration est identique pour B.

2) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

A est inversible si A^p est inversible

1) Supposons A inversible, donc $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

Soit $A^p= A*A*....*A$ (p fois)

$$A^p*(A^p)^{-1}= \underbrace{(A*A*.....*A)}_{\text{(p fois)}}*\underbrace{(A^{-1}*A^{-1}*.....*A^{-1})}_{\text{(p fois)}}$$

Par associativité des matrices, on obtient :

$A^p*(A^p)^{-1}= (A*A*.....*(A*A^{-1})*A^{-1}*.....*A^{-1})$

$= A^{p-1}(AA^{-1})(A^{p-1})^{-1}=A^{p-1}I(A^{p-1})^{-1}$

et de proche en proche $AA^{-1}=I$

donc $A^p*(A^p)^{-1}=I$, donc A^p est inversible.

Comme l'inverse d'une matrice est unique, on a, $A^p*(A^p)^{-1}=A^p*(A^{-1})^p=I$

Donc $(A^p)^{-1}=(A^{-1})^p$

2) Supposons A^p inversible, alors $A^p*(A^p)^{-1}=(A^p)^{-1}*A^p=I$
Montrons que si A^p inversible, A^{p+1} inversible

Developpons $A^p*(A^p)^{-1}$

$A^{p+1}*(A^{p+1})^{-1}=AA^p*(A^p)^{-1}A^{-1}= AA^p*(A^{-1})^pA^{-1}= A\underbrace{(A*A*.....*A)}_{\text{(p fois)}}*\underbrace{(A^{-1}*A^{-1}*.....*A^{-1})}_{\text{(p fois)}}A^{-1}=I$

$\Rightarrow\ \underbrace{(A*A*A*.....*A)}_{\text{(p+1 fois)}}*\underbrace{(A^{-1}*A^{-1}*.....*A^{-1}*A^{-1})}_{\text{(p+1 fois)}} = A^{p+1}*(A^{p+1})^{-1}= I$

Si A^p est inversible, alors A^{p+1} est inversible donc c'est vrai pour tout p, c'est vrai pour p=1 donc A est inversible.

Donc A^p est inversible, ainsi que A.
Et pour que A soit inversible, il faut que A^p , $p \in N^*$ soit inversible.

3)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et démontrons que A^{n+1} vraie

$$A^{n+1} = A^n * A = \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos\theta - \sin\theta \sin n\theta & .\cos n\theta \sin\theta + \sin n\theta \cos\theta & 0 \\ -\sin n\theta \cos\theta - \sin\theta \cos n\theta & .-\sin n\theta \sin\theta + \cos n\theta \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or cos(a+b) = cos a cos b - sin a sin b

donc $\cos(n\theta + \theta) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin\theta \sin n\theta$

de même,

sin(a+b)=sin a cos b + sin b cos a donc,

$\sin(n\theta + \theta) = \sin(n+1)\theta = \sin\theta \cos n\theta - \sin n\theta \cos\theta$

donc

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta & 0 \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc A^n est vrai.

4)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$$

$$A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta c & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

5) Si $(A^n)^{-1}$ existe, alors $(A^n)\ (A^n)^{-1}=I$

$$(A^1)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Admettons $(A^n)^{-1}$

$$(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et démontrons $(A^{n+1})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A^{n+1})^{-1} = (A^n * A^1)^{-1} = A^{-1} * (A^n)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta & -\cos\theta\sin n\theta-\sin\theta\cos n\theta & 0 \\ \sin\theta\cos n\theta+\sin n\theta\cos\theta & -\sin\theta\sin n\theta+\cos n\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ donc $(A^n)^{-1}$ est vraie.

Si $(A^n)^{-1}$ existe alors $(A^n)*((A^n)^{-1}=I$

Vérification :

$$(A^n)*(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta & -\cos n\theta\sin n\theta+\sin n\theta\cos n\theta & 0 \\ -\sin n\theta\cos n\theta+\sin n\theta\cos n\theta & \cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

donc $(A^n)^{-1}$ existe.