CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
AVRIL 1999

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION MATHEMATIQUES

VOIE B

*

* *

PROBLEME n° 1

❶ On peut utiliser le critère de convergence de Cauchy : $\left(\frac{1}{ke^k}\right)^{\frac{1}{k}} \to \frac{1}{e} < 1$

ce qui prouve la convergence de la série

Par ailleurs ,en utilisant le développement en série de ln(1-x),il vient aisément que

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{(e^{-1})^k}{k} = -\ln(1-e^{-1}) = 1-\ln(e-1)$$

❷ ① On a : $A_1 = \int_1^e \left(\int_{\ln x}^{2\ln x} 1dy \right) dx = \left[x\ln x - x \right]_1^e = 1$ C.Q.F.D.

Voir la représentation du domaine D_1 ci-dessous.

② $A_k = \int_1^{e^k} \left(\int_{\ln x}^{2\ln x} 1dy \right) dx = \left[x\ln x - x \right]_1^{e^k} = 1 + e^k (k-1)$

③ $A_k^{-1} \approx \frac{1}{ke^k}$ d'où la convergence de la série d'après 1-

PROBLEME n° 2

❶ ① $$u_n = a\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+b\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)+c\left(1-\frac{1}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= a+c+\frac{b}{n}+\left(-\frac{a}{2n^2}-\frac{c}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

→ Si a+c est différent de 0 ,le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge

→ Si a+c=0, $u_n \approx \frac{b}{n}$ et la série diverge si b différent de 0

→ Si a+c=0 et b=0 la série est convergente car $u_n \approx \frac{K}{n^2}$

② $$S_n = \sum_1^n u_p = a\left(\left(\cos 1-\cos\frac{1}{2}\right)+....+\left(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n+1}\right)\right)=a\left(\cos 1-\cos\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = a(\cos 1-1)$$

C.Q.F.D.

❷ $|u_n| = \sin\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ décroît quand n augmente puisque sin x est croissante .

$|u_n| \to 0$ lorsque n tend vers l'infini
et $\sum$ une série alternée.

Il s'agit donc d'une série convergente mais semi-convergente car $|u_n| \approx \frac{1}{n^{1/2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.

❸ ① Utilisons le théorème de d'Alembert :

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|$ et donc R=1

② si x=1 $u_n = \frac{1}{2n+1}$ et la série est divergente car équivalente à une série harmonique

si x=-1 $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est le terme général d'une série alternée dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant et la série est alors convergente.

❹ ① $n^{1/n^\alpha} = e^{\frac{1}{n^\alpha}\ln n}$

Or, $\lim\limits_{n+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ln x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n^\alpha}\ln n} = 1$

Par conséquent, $|u_n| \approx \frac{1}{n}$ qui est le terme général de la série harmonique divergente

② $f(x) = e^{-\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)\ln x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{f(x)}{x}\left(1+\frac{1}{x^\alpha}(1-\alpha\ln x)\right) < 0$ ce qui prouve la décroissance de la fonction donc aussi celle de la suite vers 0 et la série alternée est donc convergente.

PROBLEME n° 3

❶ La fonction $\varphi : t \to \frac{\sin t}{t}$ définie si t différent de 0 est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.Donc l'intégrale est définie en 0.La fonction f est continue sur R car f est la primitive de φ qui s'annule pour 0.

❷ $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t}dt$ .Le changement de variable u=-t nous donne : $f(-x) = \int_0^{x} \frac{\sin(-u)}{(-u)}(-du) = -\int_0^{x} \frac{\sin u}{u}du = -f(x)$ donc f est une fonction impaire et on l'étudiera sur $[0;+\infty[$

❸ f est dérivable sur R et $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ .f' a le même signe que sin x pour x positif c'est-à dire :

$$f'(x)=0; x=k\pi$$
$$f'(x)>0; x\in \left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[$$
$$f'(x)<0; x\in \left](2k+1)\pi;(2k+2)\pi\right[$$

On en déduit que les valeurs $k\pi$ correspondent aux extrêmas de f

Tableau de variations :

X	0	π	2π	3π......
F'(x)	1 +	0 -	0 +	0 -
f(x)				

❹ Pour montrer la convergence de I,on intègre par parties l'intégrale $I_a=\int_1^a \frac{\sin t}{t}dt$ en posant $u=\frac{1}{t}; dv=\sin t.dt \Rightarrow du=-\frac{1}{t^2}dt; v=-\cos t$

On obtient alors $I_a=\left[\frac{\cos t}{-t}\right]_1^a-\int_1^a \frac{\cos t}{t^2}dt$

Or, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos t}{t^2}\right|dt \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ qui est une intégrale convergente.

Comme, de plus, $\lim\limits_{a\to+\infty}\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^a=\cos 1-\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\cos a}{a}=\cos 1$ alors I est convergente.

❺ Pour calculer $J_{n+1} - J_n$,on utilise la relation sin(2n+3)t-sin(2n+1)t=2sint.cos(2n+2)t

Alors : $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t}.dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+2)t.dt = 0$

On en déduit que $J_{n+1} = J_n = ... = J_0 = \frac{\pi}{2}$

Rappelons le lemme de Riemann-Lebesgue :si g est une fonction continue sur [a ;b], $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(t).\sin nt.dt = 0$

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} - \frac{\sin(2n+1)t}{t}\right]dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t).\sin(2n+1)t.dt$$

Il nous faut alors montrer que g est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Il suffit pour cela d'étudier le problème en 0.

On utilise un développement limité de sin t en 0 :

$$g(t) = \frac{t - \sin t}{t.\sin t} = \frac{t - t + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon_1(t)}{t[t + t\varepsilon_2(t)]} = \frac{\frac{t}{6} + t\varepsilon_{1(t)}}{1 + \varepsilon_{2(t)}} \to 0$$

Lorsque t tend vers 0.On prolonge par continuité la fonction g en posant g(0)=0

L'application du lemme de Riemann-Lebesgue avec la fonction g nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

❼ Dans l'intégrale K_n on effectue le changement de variable u=(2n+1)t

On obtient alors :

$$K_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du$$

Et comme I est convergente,on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

donc:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

En conséquence, $y = \frac{\pi}{2}$ est asymptote en + l'infini à la courbe représentative de f

❽ Courbe représentative de f(x) :

PROBLEME n° 4

❶ La fonction f est périodique de période 1 si et seulement si :pour tout x réel,f(x+1)=f(x).

Or, $f(x+1) = e^{2j\pi(x+1)} = e^{2j\pi x}.e^{2j\pi} = e^{2j\pi x} = f(x)$

❷ $z_1 = a + ae^{4j\pi x} = a(1+e^{4j\pi x}) = ae^{2j\pi x}(e^{-2j\pi x} + e^{2j\pi x}) = 2a\cos(2\pi x)e^{2j\pi x}$

-Si $x = \frac{1}{4}, 2\pi x = \frac{\pi}{2}; z_1 = 0$

-Si $x \neq \frac{1}{4}$:

Le module de $z_1 : |z_1| = |2a\cos(2\pi x)|$

L'argument de z_1 dépend des signes de a et de $\cos(2\pi x)$

Sachant que x est compris entre 0 et 0.5 en étant différent de ¼ et donc que $(2\pi x) \in [0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$,il faut envisager 4 cas :

	$x \in \left[0;\frac{1}{4}\right[\Rightarrow 2\pi x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\cos(2\pi x) > 0$	$x \in \left]\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] \Rightarrow 2\pi x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ $\cos(2\pi x) < 0$
a>0	$Arg(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$	$Arg(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$
a<0	$Arg(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$	$Arg(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$

❸

$$z_2 = \frac{1}{2} + e^{2j\pi x} + \frac{e^{4j\pi x}}{2} = \frac{1}{2}(1+e^{4j\pi x}) + e^{2j\pi x} = \frac{1}{2}e^{2j\pi x}(2\cos 2\pi x) + e^{2j\pi x} = e^{2j\pi x}(\cos 2\pi x + 1)$$
$$= [\cos(2\pi x)+1;2\pi x]$$

❹ On regroupe les termes ayant des coefficients égaux puis on factorise ce coefficient :

$$z = a_0(1+e^{2j(n-1)\pi x}) + a_1(e^{2j\pi x} + e^{2j(n-2)\pi x}) + ... + a_{\frac{n}{2}}(e^{2j\frac{n}{2}\pi x} + e^{2j(n-\frac{n}{2}-1)\pi x})$$

Le calcul des expressions entre parenthèses nécessite une factorisation comme précédemment

$$a_k(e^{2jk\pi x} + e^{2j(n-1-k)\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x}(e^{(2k-n-1)j\pi x} + e^{-(2k-n-1)j\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x}.2\cos((2k-n-1)\pi x)$$

Donc , $z = 2e^{j(n-1)\pi x}\left[\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos((2k-n-1)\pi x\right]$

$$|z| = 2\left|\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n-1)\pi x\right|$$

Quant à l'argument de z,il est égal à $(n-1)\pi x+2k\pi$ si $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n-1)\pi x>0$

Et à $(n-1)\pi x+\pi+2k\pi$ si $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n-1)\pi x<0$

Dans les deux cas, Arg(z) est une fonction affine de x

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
AVRIL 1999

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION MATHEMATIQUES

VOIE B

*

*   *

EXERCICE n° 1

❶ Soit a vecteur de E tel que $\varphi(a) \neq 0$ (a existe et est non nul si φ non identiquement nulle).

Alors, pour tout x de E, $x = (x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$. On vérifie aisément que le premier terme de la somme appartient à H et que le second appartient à Vect(a) où Vect(a) désigne l'espace vectoriel engendré par le vecteur a.

Donc $E = H + Vect(a)$. En outre, pour tout vecteur non nul c de Vect(a), il existe k réel non nul tel que c=ka donc $\varphi(c) = k\varphi(a) \neq 0$. Donc $H \cap Vect(a) = \{0_E\}$ donc $E = H \oplus Vect(a)$.

On en déduit que $\dim E = \dim H + \dim Vect(a)$ d'où $\dim H = n-1$.

❷ Soit $(e_1,...,e_{n-1})$ une base de H. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_n tel que $(e_1,...,e_{n-1},e_n)$ base de E.

Soit $(\varphi_1,...,\varphi_n)$ la base duale associée alors pour tout x de E, $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ et $x \in H \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0$ i.e. $H = Ker\varphi_n$.

EXERCICE n° 2

Pour tout A de G, on considère l'ensemble $F=\left\{A^k, k \in Z\right\}$ où Z désigne l'ensemble des entiers relatifs.

Comme G est borné, F est borné.

Montrons qu'alors, pour tout A de G, A et diagonalisable et les éléments de son spectre sont de module 1.

Comme le corps des complexes C est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de A est scindé sur C i.e. il a toutes ses racines dans C.

On sait alors qu'il existe $P \in GL(n,C)\ /\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 + N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s I_s + N_s \end{pmatrix}$ où λ_i désigne la ième valeur propre, I_i la matrice identité de taille l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i et N_i une matrice nilpotente de même taille.

Alors, $P^{-1}A^k P = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_1 + N_1)^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_s I_s + N_s)^k \end{pmatrix}$ pour tout k de Z.

Comme l'application de l'ensemble des matrices à coefficients complexes d'ordre n dans lui-même qui à tout U de associe $P^{-1}UP$ est bijective et continue, dire que les A^k sont bornées équivaut à dire que les $P^{-1}A^k P$ le sont aussi.

De plus, montrer que les $P^{-1}A^k P$ sont bornées équivaut à montrer que pour tout $i = 1,\dots s, (\lambda_i I_i + N_i)^k$ bornée.

Si pour tout k de Z, et pour tout $i = 1,\dots s, (\lambda_i I_i + N_i)^k$ cela est en particulier vrai pour tout k entier naturel. Donc pour tout $i = 1,\dots, s, \left|\lambda_i\right| < 1$ ou $\left\{\left|\lambda_i\right| = 1 \text{ et } N_i = 0\right\}$.

De même, si on raisonne sur A^{-1}, il existe $Q \in GL(n,C) \,/\, Q^{-1}A^{-1}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} I_1 + M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_s} I_s + M_s \end{pmatrix}$

et on doit donc avoir pour tout i=1,...,s, $\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| < 1$ ou $\left\{\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| = 1 \text{ et } M_i = 0\right\}$.

D'où, nécessairement, pour tout i=1,...,s, $|\lambda_i| = 1$ et $N_i = 0$ i.e. A est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

Comme G est commutatif et que tous ses éléments sont diagonalisables, on peut appliquer le théorème de diagonalisation simultanée.

PROBLEME

Partie 1

❶ $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$ et $V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$.

❷ Si $\exists i, j \,/\, a_i = a_j$ alors le déterminant a 2 lignes identiques, il est donc nul.

❸ ① D'après 1) la propriété est vraie au rang 2.

② Supposons la propriété vraie au rang n. Les racines du polynôme sont $a_1, \dots a_n$. Le polynôme a n racines distinctes, il est donc de degré n.

③ En développant le déterminant $P(x)$ par rapport à sa dernière colonne, on trouve que le coefficient de x^n vaut $V_n(a_1, \dots a_n)$.

Le polynôme $P(x)$ s'écrit donc : $V_n(a_1,\ldots a_n)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ soit en remplaçant x par a_{n+1}, comme la propriété est supposée vraie au rang n, on en déduit que :

$$P(x)=V_n(a_1,\ldots a_n)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=\prod_{1\le k<l\le n+1}(a_l-a_k)\ .$$

La propriété est vraie au rang 2. Si elle est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang n+1. La propriété est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 2.

Partie 2

❶ Si pour tout k, $P_k(x)=x^k$, $\Delta_n(x_1,\ldots,x_n)=V_n(x_1,\ldots,x_n)$.

❷ ① B est une famille de n polynômes échelonnée. C'est donc une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n-1.

② On en déduit que $P_{n-1}(x)=\lambda_{n-1}x^n+\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x)$

③ En remplaçant dans le déterminant Δ_n, on trouve que :

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x_1)+\lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x_2)+\lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x_n)+\lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

, soit en enlevant à la dernière colonne la somme de n-1 premières colonnes pondérée par les coefficients α_i, on trouve :

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

avec λ_{n-1} le coefficient de $P_{n-1}(x)$ affecté au vecteur x^{n-1} dans sa décomposition dans la base B i.e. le coefficient du terme de plus haut degré de $P_{n-1}(x)$.

De même, si $\lambda_i, i=0,\dots,n-2$ désigne le coefficient du terme de plus haut degré de $P_i, i=0,\dots,n-2$, on en déduit que $\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_{n-2}x_1^{n-2} & \lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ \lambda_0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-2}x_2^{n-2} & \lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 x_n & \cdots & \lambda_{n-2}x_n^{n-2} & \lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Soit en factorisant la ième colonne par λ_{i-1}, on trouve que $\Delta_n = \lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}V_n(x_1,\dots x_n)$.

❸ C_k^x est un polynôme de degré k et son terme de plus haut degré vaut $\frac{1}{k!}$.
Donc, $C_n = \frac{1}{1!}\frac{1}{2!}\cdots\frac{1}{(n-1)!}V_n(x_1,\dots x_n)$.

Partie 3

❶ Montrons par récurrence que pour tout k, entier naturel, il existe un polynôme T_k de degré k tel que $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$ et que le terme de plus haut degré vaut 2^k.

$\cos(0.\theta) = 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie jusqu'au au rang n, alors :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos\theta\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) = T_1(\cos\theta)T_n(\cos\theta) - \sin\theta\frac{1}{n}\sin\theta\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta)$$

car $\sin(n\theta) = -\frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}(\cos(n\theta)) = -\frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}(T_n(\cos\theta)) = -\frac{1}{n}\sin\theta\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta)$

d'où $\cos((n+1)\theta) = T_1(\cos\theta)T_n(\cos\theta) - \frac{1}{n}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta)$,

donc $\cos((n+1)\theta)$ s'écrit comme somme et produit de polynômes en $\cos\theta$. C'est donc un polynôme en $\cos\theta$.

De plus, le terme de plus haut degré est le terme de plus haut degré du produit $T_1(\cos\theta)T_n(\cos\theta)$, soit d'après l'hypothèse de récurrence $2.2^k = 2^{k+1}$.

La propriété est vraie au rang 0.

Si elle est vraie jusqu’au rang n alors elle est vraie au rang n+1.

La propriété est donc vraie pour tout n entier naturel.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
AVRIL 1999

CORRIGE DE L'EPREUVE DU CALCUL NUMERIQUE

OPTION MATHEMATIQUES

VOIE B

*
* *

EXERCICE N° 1

❶ $\mathrm{EX} = \sum_{k=0}^{10} k.\frac{1}{11} = 5 \quad \mathrm{VX} = \sum_{k=0}^{10} k^2 \frac{1}{11} - (\mathrm{EX})^2 = 10$

❷ $\mathrm{EZ}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{EX}_i = 5 \quad \mathrm{VZ}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{VX}_i = \frac{10}{n}$ car les variables sont indépendantes.

Cette variable représente le nombre moyen de pièces défectueuses par jour sur *n* jours.

❸ $\mathrm{P}_n < \frac{\mathrm{VZ}_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donc $\mathrm{P}_n < \frac{40}{n}$.

❹ D'après l'inégalité ci-dessus on a $n_0 = 3999$. P_n est la probabilité pour que la moyenne empirique Z_n diverge de plus de 0,5 de sa moyenne théorique EZ_n. Il suffit donc d'effectuer cette moyenne sur 4000 jours ou plus pour qu'il y ait moins de 1% de chances que cette différence soit plus grande que 0,5.

❺ W peut prendre toutes les valeurs entières dans {0, 1, ... 20}. Sa loi de probabilité est donnée par :

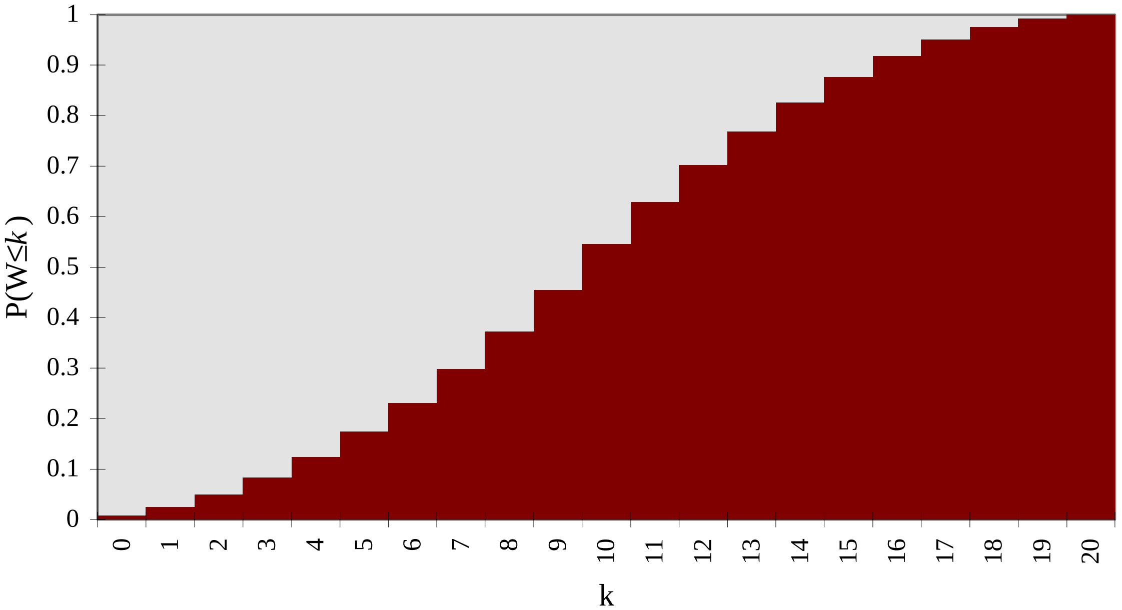
$$\mathrm{P}(W = k) = \sum_{\substack{i \in \{0, 1, ..., 20\} \\ tq\ k-i \in \{0, 1, ..., 20\}}} \mathrm{P}(X_1 = i)\mathrm{P}(X_2 = k - i)$$

donc :

k	P(W=*k*)	*K*	P(W=*k*)	*K*	P(W=*k*)
0	1/121	7	8/121	14	7/121
1	2/121	8	9/121	15	6/121
2	3/121	9	10/121	16	5/121
3	4/121	10	11/121	17	4/121
4	5/121	11	10/121	18	3/121
5	6/121	12	9/121	19	2/121
6	7/121	13	8/121	20	1/121

$$\mathrm{EW} = \sum_{k=0}^{k=20} k.\mathrm{P}(\mathrm{W}=k) = 10 = \mathrm{EX}_1 + \mathrm{EX}_2$$

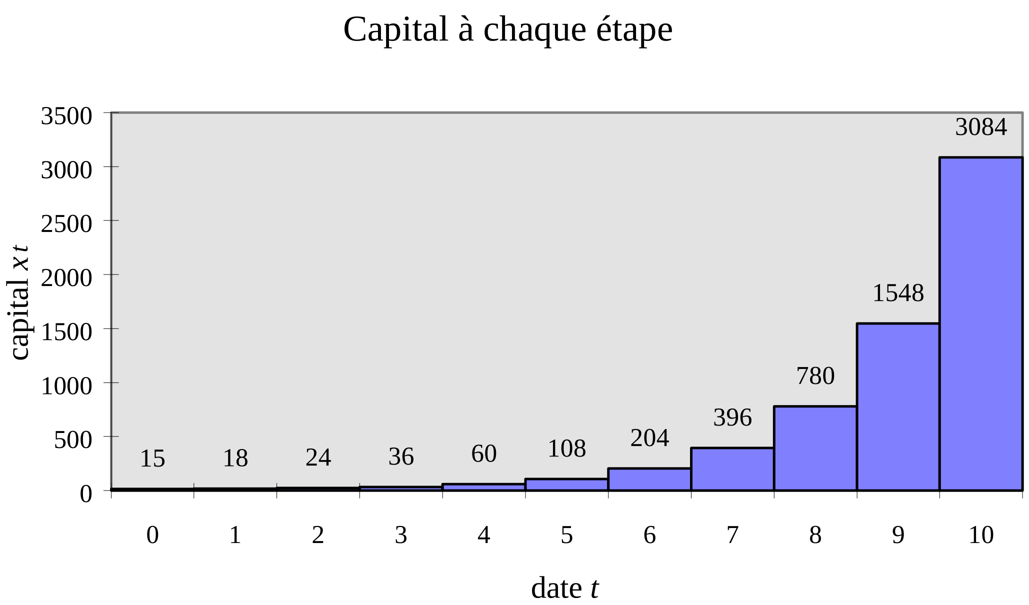
Fonction de répartition de W



EXERCICE N° 2

❶ Tableau représentant le capital du marchand :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{t-1}	15	18	24	36	60	108	204	396	780	1548
$2.x_{t-1}$	30	36	48	72	120	216	408	792	1560	3096
$x_t=2.x_{t-1}-12$	18	24	36	60	108	204	396	780	1548	3084



❷ On a $x_3 = 12 + 2^3(x_0 - 12) = 0$ donc $x_0 = 10{,}5$.

❸ ① Avec les notations :

$$x_t = q.x_{t-1} - c$$

② On reconnaît une série géométrique de raison q>1. On a donc :

$$x_t = q^t\left(x_0 - \frac{c}{q-1}\right) + \frac{c}{q-1}$$

③ Si $x_0 < \dfrac{c}{q-1}$ alors x_t est une fonction décroissante de t.

Si $x_0 > \dfrac{c}{q-1}$ alors x_t est une fonction croissante de t.

④ Dans le cas où $x_0 < \frac{c}{q-1}$, la relation du b) donne : $q^t = \frac{-\frac{c}{q-1}}{x_0 - \frac{c}{q-1}}$ donc $t\log(q) = \log\left(\frac{1}{1-\frac{q-1}{c}x_0}\right)$ d'où : $\boxed{t = -\frac{\log\left(1-\frac{q-1}{c}x_0\right)}{\log(q)}}$

⑤ Avec *c*=12 et *q*=2 cela donne $t = -\frac{\log\left(1-\frac{x_0}{12}\right)}{\log 2}$; comme t est un nombre d'étapes, il reste encore à prendre la partie entière de cette valeur.

t est donc une fonction croissante de x_0 quand $0 < x_0 < 12$ et la droite $x_0 = 12$ est une asymptote. Un capital de départ de 12 F entraîne un cycle infini où le capital vaut 12 F tout le temps.

Nombre d'étapes parcourues en fonction du capital initial