AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

PROBLEME N° 1

1) On a :

$$S_n - S_{n-1} = 1/n^5 > 0$$

donc la suite est croissante et on a la majoration :

$$S_n \leq 1 + \int_1^n dx/x^5$$

Le membre de droite est fini car l'intégrale est convergente. (S_n) est une suite croissante et majorée donc convergente. Sa limite est la somme de la série $S = \sum_1^\infty 1/i^5 < +\infty$

2) On a :

$$\int_i^{i+1} dx/x^5 = [1/i^4 - 1/(i+1)^4]/4$$
$$= [(i+1)^4 - i^4]/[4i^4(i+1)^4]$$
$$= [1+4i+6i^2+4i^3]/[4i^4(i+1)^4] \leq 1/i^5$$

De même:

$$\int_{i-1}^{i} dx/x^5 = [1/(i-1)^4 - 1/i^4]/4$$
$$= [i^4 - (i-1)^4]/[4i^4(i-1)^4]$$
$$= [-1+4i-6i^2+4i^3]/[4i^4(i-1)^4] \geq 1/i^5$$

3.1) D'après 2) on a $R_n = \sum^{\infty}_{n+1} i^5 \leq \int_n^{\infty} dx/x^5 \leq 1/4n^4$

3.2) Pour approximer S avec 5 décimales exactes, il faut garder pour chaque terme de (S_n) 5 décimales.

3.3) Comme :

$$S - S_n = R_n \leq 1/4n^4,$$

on peut approximer S par S_n avec une précision inférieure à $1/4n^4$.

3.4) Pour calculer S avec 5 décimales exactes, il faut que :

$$1/4n^4 \leq 10^{-5},$$

c'est à dire $4n^4 \geq 10^5$, soit $n \geq 10^{5/4}/4^{1/4}$. D'où $n \geq 13$.

4.1)On a :

$$\int_{n+1}^{\infty} dx/x^5 \leq R_n \leq \int_n^{\infty} dx/x^5 \leq 1/4n^4,$$

c'est à dire

$$1/4(n+1)^4 \leq R_n \leq 1/4n^4$$

4.2) Si on approxime R_n par $(M_n+m_n)/2$, la valeur approchée de S est $S_n + R_n = S_n+(M_n+m_n)/2$, c'est à dire que S est encadrée par S_n+m_n et S_n+M_n.

4.3) La précision de l'encadrement en tenant compte des arrondis sur les termes de S_n est 10 fois supérieure à celle obtenue en n'en tenant pas compte.

4.4) Il faut choisir n de façon à ce que $S - (S_n+R_n) \leq 10^{-5}$. Or $(S - S_n) \leq 1/4n^4$ et l'encadrement de R_n montre que

$$-R_n \leq -1/4(n+1)^4.$$

On a donc :

$$(S - S_n)-R_n \leq 1/4n^4-1/4(n+1)^4$$

Comme on a $1/4n^4-1/4(n+1)^4 \leq 1/(n+1)^5$, il faut choisir n tel que

$$(n+1)^5 \leq 10^{-5}, \text{ c'est à dire } n+1 \geq 10, \text{ ou encore } n \geq 9$$

4.5) On calcule S de proche en proche comme dans le tableau suivant :

i	$1/i^5$	$1/4(n+1)^4$	$1/4n^4$	S_n	R_n	Valeur approchée $S = S_n + R_n$
1	1,000000	0,015625	0,250000	1,000000	0,132813	
2	0,031250	0,003086	0,015625	1,031250	0,009356	1,040606
3	0,004115	0,000977	0,003086	1,035365	0,002031	1,037397
4	0,000977	0,000400	0,000977	1,036342	0,000688	1,037030
5	0,000320	0,000193	0,000400	1,036662	0,000296	1,036958
6	0,000129	0,000104	0,000193	1,036790	0,000149	1,036939
7	0,000059	0,000061	0,000104	1,036850	0,000083	1,036932
8	0,000031	0,000038	0,000061	1,036880	0,000050	1,036930
9	0,000017	0,000025	0,000038	1,036897	0,000032	1,036929
10	0,000010	0,000017	0,000025	1,036907	0,000021	1,036928
11	0,000006	0,000012	0,000017	1,036914	0,000015	1,036928
12	0,000004	0,000009	0,000012	1,036918	0,000010	1,036928
13	0,000003	0,000007	0,000009	1,036920	0,000008	1,036928
14	0,000002	0,000005	0,000007	1,036922	0,000006	1,036928
15	0,000001	0,000004	0,000005	1,036923	0,000004	1,036928

PROBLEME N° 2

1) On a :

$$P'(x)=3x^2+3>0 \ \forall x$$

donc la fonction P est strictement croissante sur R, et donc sur le segment [0 ;1]. On en déduit que P est bijective et comme P(0)=-2<0 et P(1)=2, il existe un unique réel s de [0 ;1] tel que P(s)=0

2) Il est facile de voir que :

$$\varphi_\lambda(x) = x+ \lambda P(x) = x \iff \lambda P(x) = 0$$

$$\iff \lambda P(x) = 0 \text{ puisque } \lambda \text{ est non nul.}$$

3.1)

$$\varphi_{-1/4}(x) = x-(x^3+3x-2)/4$$

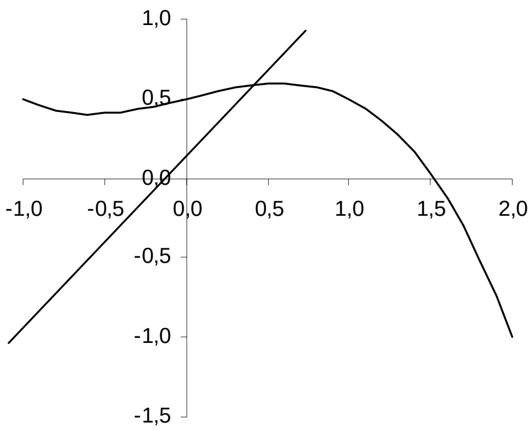
$$= (-x^3+x+2)/4.$$

La dérivée est :

$$\varphi'_{-1/4}(x) =(- 3x^2+1)/4$$

qui est positive dans le segment $[-1/\sqrt{3} ;1/\sqrt{3}]$. D'où le tableau de variation :

x	-1		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$			2
$\varphi'_{-1/4}(x)$		-	0	+	0	-		
$\varphi_{-1/4}(x)$	1/2	↓		↑		↓		-1



3.2) Comme la fonction $\varphi_{-1/4}$ est continue, elle est bornée pour tout x dans [0 ;1].

donc la suite (u_n) est minorée. Pour $u_0=0.6$, la suite est décroissante donc convergente et sa limite ρ vérifie $\rho = \varphi_{-1/4}(\rho)$ soit $P(\rho)=0$, c'est à dire ρ est égale à la racine s de P compris entre 0 et 1.

3.3) Pour passer de u_n à u_{n+1}, on procède de la manière classique suivante :

a)On trace la droite y=x (1ère bissectrice des axes)

b) On détermine sur le graphique l'image $\varphi_{-1/4}(u_n)$ de u_n que l'on projette sur l'axe Oy.

c) u_{n+1} n'est autre que le symétrique de cette projection par rapport à la 1ère bissectrice, c'est à dire le point de Ox qui a pour abscisse $\varphi_{-1/4}(u_n)$.

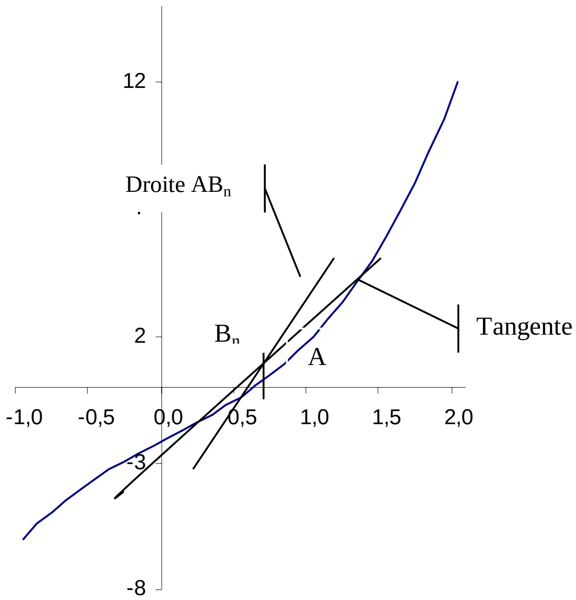
3.4) On obtient par récurrence les termes de la suite (u_n) comme dans le tableau suivant en utilisant l'expression de u_n :

n	u_n
0	0,6000000
1	0,5960000
2	0,5960728
3	0,5960716
4	0,5960716
5	0,5960716
6	0,5960716
7	0,5960716
8	0,5960716
9	0,5960716

On voit que u_n a 6 décimales exactes à partir du rang $n_0 = 3$ et u_3= 0,596 071 avec 6 décimales exactes.

4) On a $P'(x)=3x^2+3>0\ \forall x$, d'où le tableau de variation de P :

x	-1		2
P'(x)		+	
P(x)	-6	↑	12



5.1) $[P(1)-P(v_n)]/(1-v_n)$ n'est autre que la pente de la droite qui passe par les points A et B_n de la courbe représentative de P qui ont pour coordonnées : $A[1, P(1)]$ et $B_n[v_n , P(v_n)]$. Cette droite a pour équation :

$$y- P(v_n) = (x- v_n)[P(1)-P(v_n)]/(1- v_n).$$

Cette droite coupe l'axe Ox au point d'abscisse

$$x = v_n - P(v_n)(1- v_n)/ [P(1)-P(v_n)]$$

obtenu en faisant y=0 dans l'équation de la droite. On passe donc de v_n à v_{n+1} de la façon suivante :

a) on trace le point B_n de la courbe représentative de P qui a pour coordonnées v_n et $P(v_n)$ et la droite qui joint A et B_n.

b) v_{n+1} n'est autre que l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses Ox.

5.2) On obtient par récurrence les termes de la suite (v_n) comme dans le tableau suivant, en utilisant l'expression de v_n et de $P(v_n)$:

n	v_n	$P(v_n)$
0	0,6000000	0,0160000
1	0,5967742	0,0028574
2	0,5961973	0,0005109
3	0,5960941	0,0000914
4	0,5960757	0,0000163
5	0,5960724	0,0000029
6	0,5960718	0,0000005
7	0,5960717	0,0000001
8	0,5960716	0,0000000
9	0,5960716	0,0000000

5.3) On voit que v_n a 6 décimales exacte à partir du rang $n_0 = 6$ et v_6= 0,596 071 avec 6 décimales exactes.

5.4) On constate que la suite v_n converge vers la racine de P compris entre 0 et 1, ce qui est prévisible car la suite converge vers une limite ν qui vérifie forcément l'équation de récurrence définissant v_n, c'est à dire :

$$\nu = \nu - P(\nu)(1- \nu)/ [P(1)-P(\nu)] \Leftrightarrow P(\nu) = 0$$

et ν n'est autre que la racine de P compris entre 0 et 1.

6.1) P'(w_n) est la pente de la droite tangente au point $B_n[v_n , P(v_n)]$ de la courbe représentative de P. Cette droite tangente a pour équation :

$$y- P(w_n) = P'(w_n)(x-w_n)$$

et coupe l'axe Ox au point d'abscisse $x = w_n - P(w_n)/P'(w_n)$ en faisant y=0 dans l'équation de la droite. On passe donc de w_n à w_{n+1} de la façon suivante :

a) on trace le point B_n de la courbe représentative de P qui a pour coordonnées w_n et $P(w_n)$ et la droite tangent à la courbe P au point B_n.

b) w_{n+1} n'est autre que l'intersection de cette droite tangente avec l'axe des abscisses Ox.

6.2) On obtient par récurrence les termes de la suite (w_n) comme dans le tableau suivant en utilisant l'expression de w_n , de $P(w_n)$ et de $P(w_{n})$:

n	$w_n)$	$P'(w_n)$	$P(w_n)$
0	0,6000000	4,08	0,0160000
1	0,5960784	4,06592849	0,0000276
2	0,5960716	4,06590419	0,0000000
3	0,5960716	4,06590419	0,0000000
4	0,5960716	4,06590419	0,0000000
5	0,5960716	4,06590419	0,0000000
6	0,5960716	4,06590419	0,0000000
7	0,5960716	4,06590419	0,0000000
8	0,5960716	4,06590419	0,0000000
9	0,5960716	4,06590419	0,0000000

6.3) On voit que w_n a 6 décimales exacte à partir du rang $n_0 = 2$ et w_2= 0,596 071 avec 6 décimales exactes.

6.4) On constate que la suite w_n converge vers la racine de P compris entre 0 et 1, ce qui est prévisible car la suite converge vers une limite ω qui vérifie l'équation de récurrence définissant w_n, c'est à dire :

$$\omega = \omega - P(\omega)/P'(\omega).$$

et ω n'est autre que la racine de P compris entre 0 et 1.

7) On constate que la suite (w_n) converge plus vite que la suite (u_n), qui elle-même converge plus vite que la suite (v_n), résultat classique en analyse numérique.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PROBLÈME $N^0 1$

1. Pour tout $V = (x, y)$, on définit $N_1(V) = |x| + |y|$.

   - Il est clair que pour tout V de $\mathbb{R}^2$, $N_1(V) \geq 0$.
   - Soit $V = (x, y)$. Si $N_1(V) = 0$, alors $x = y = 0$ d'où $V = 0$.
   - Soit $V = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

   $$N_1(\lambda V) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda||x| + |\lambda||y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| N_1(V).$$

   - Soient $V = (x, y)$ et $V' = (x', y')$. Alors :

   $$N_1(V + V') = |x + x'| + |y + y'| \leq |x| + |x'| + |y| + |y'| = N_1(V) + N_1(V').$$

   N_1 est donc une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. On vérifie de même pour la fonction définie pour $V = (x, y)$ par $N_\infty(V) = \sup(x, y)$.

   - $\forall V \in \mathbb{R}^2$, $N_\infty(V) \geq 0$.
   - Il est clair que si $N_\infty(V) = 0$, alors $V = 0$.
   - Soit $V = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

   $$N_\infty(\lambda V) = \sup(|\lambda x|, |\lambda y|) = |\lambda| \sup(|x|, |y|) = |\lambda| N_\infty(V).$$

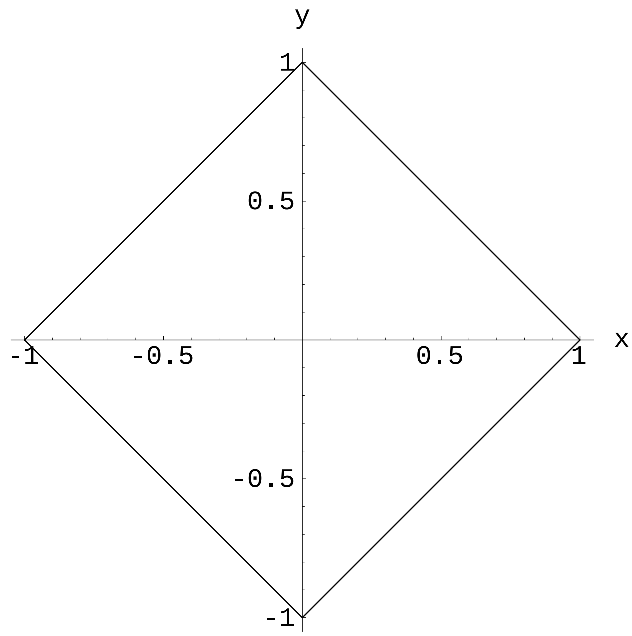


Figure 1: Sphère unité S_1

- On rappelle la propriété $\sup(a+b, a'+b') \leq \sup(a,b) + \sup(a',b')$.
  Soient $V = (x,y)$ et $V' = (x',y')$:

$$\begin{aligned} N_\infty(V+V') &= \sup(|x+x'|, |y+y'|) \\ &\leq \sup(|x|+|x'|, |y|+|y'|) \\ &\leq \sup(|x|,|y|) + \sup(|x'|,|y'|) = N_\infty(V) + N_\infty(V'). \end{aligned}$$

3. $\sup(|x|,|y|) \leq |x|+|y|$ et $|x|+|y| \leq 2\sup(|x|,|y|)$. Donc :

$$N_\infty(V) \leq N_1(V) \leq 2N_\infty(V).$$

4. On prouve que $A = 1$ et $B = 2$ sont bien les nombres recherchés par des vecteurs réalisant les inégalités.

   - Pour $V = (1,0)$ on a $N_1(V) = 1$ et $N_\infty(V) = 1$.
   - Pour $V = (1,1)$, on a $N_1(V) = 2$ et $N_\infty(V) = 1$.

5. (1) Pour $V = (x,y)$, on peut écrire :

$$V = (x,0) + (0,y) = x.(1,0) + y.(0,1).$$

L'inégalité triangulaire pour N permet d'écrire :

$$N(V) \leq |x|N(1,0) + |y|N(0,1).$$

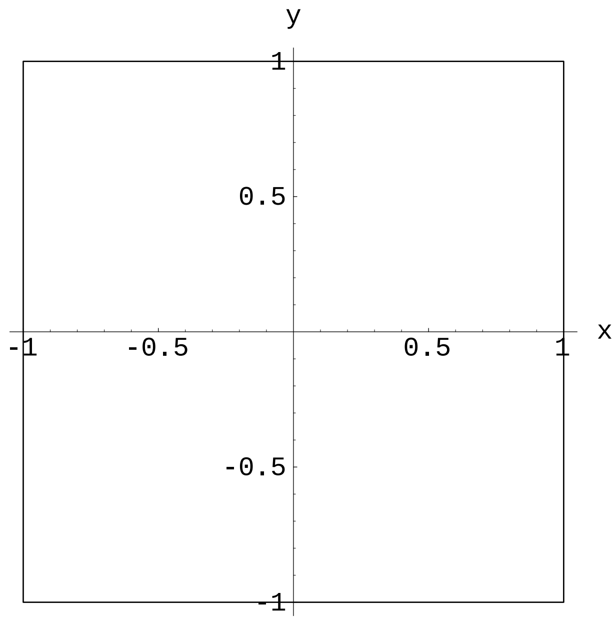


Figure 2: Sphère unité S_∞

Par conséquent :

$$N(V) \leq \sup\left(|x|, |y|\right)\left(N(1,0) + N(0,1)\right) = \beta N_\infty(V),$$

avec $\beta = N(1,0) + N(0,1)$.

(2) N étant, on a, par définition, $\forall V \in \mathbb{R}^2$, $N(V) \geq 0$ et $N(V) = 0$ si et seulement si $V = 0$. Donc $\forall V \neq 0$, $N(V) \neq 0$. Comme $0 \notin S_\infty$, on en déduit :

$$\forall V \in S_\infty, \quad N(V) > 0.$$

On admet qu'il existe au moins un vecteur $V_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $V \in S_\infty$, $N(V) \geq N(V_0)$. D'après ce qui précède, $N(V_0) > 0$ donc en posant $\gamma = N(V_0)$ on obtient le résultat escompté.

(3) Pour $V \neq 0$, $\dfrac{V}{N_\infty(V)} \in S_\infty$. Donc :

$$\gamma \leq N\left(\frac{V}{N_\infty(V)}\right) \leq \beta.$$

Par suite :

$$\forall V \neq 0, \quad \gamma N_\infty(V) \leq N\left(V\right) \leq \beta N_\infty(V).$$

Pour $V = 0$ cette inégalité est évidemment réalisée. Finalement :

$$\forall V, \quad \alpha N_\infty(V) \leq N\left(V\right) \leq \beta N_\infty(V), \quad \text{avec} \quad \alpha = \gamma.$$

6. D'après la question précédente, $\exists\ \alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$ tels que pour tout V :

$$\begin{cases} \alpha N_\infty(V) \leq N(V) \leq \beta N_\infty(V) \\ \alpha' N_\infty(V) \leq N'(V) \leq \beta' N_\infty(V) \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que :

$$\frac{\alpha}{\beta'} N'(V) \leq N(V) \leq \frac{\beta}{\alpha'} N'(V),$$

ce qui est la propriété demandée avec $a = \dfrac{\alpha}{\beta'}$ et $b = \dfrac{\beta}{\alpha'}$.

7. Pour $V = (x, y)$, on définit $H(V) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x + ty|$.

   - $\forall V \in \mathbb{R}^2$, $H(V) \geq 0$.
   - Si $H(V) = 0$, alors $\forall t \in [0, 1], \quad |x + ty| = 0$. Pour $t = 0$ on en déduit $x = 0$. Par suite pour $t = 1$ on trouve $y = 0$. Donc $V = 0$
   - Soit $V = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|\lambda x + t\lambda y| = |\lambda||x + ty|$ donc $H(\lambda V) = |\lambda| H(V)$.
   - Soient $V = (x, y)$ et $V' = (x', y')$. L'inégalité triangulaire pour le module permet d'écrire :

     $$H(V + V') = \sup_{t \in [0,1]} |x + x' + t(y + y')| \leq \sup_{t \in [0,1]} (|x + ty| + |x' + ty'|).$$

     En utilisant que le sup de la somme de deux fonctions est inférieur à la somme du sup des deux mêmes fonctions, on trouve :

     $$H(V + V') \leq \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| + \sup_{t \in [0,1]} |x' + ty'| = H(V) + H(V').$$

8. Soit $H'(V) = \displaystyle\int_0^1 |x + ty| dt$ pour $V = (x, y)$.

   - Il est clair que pour tout V de $\mathbb{R}^2$, $H'(V) \geq 0$.
   - Soit V tel que $H'(V) = 0$. La fonction $t \mapsto |x + ty|$ étant continue et positive sur $[0, 1]$, son intégrale est nulle si et seulement si c'est la fonction nulle. Pour $t = 0$, on en déduit $x = 0$. Par suite on tire $y = 0$ pour $t = 1$ et donc $V = 0$.
   - Enfin, il est clair par linéarité de l'intégrale et du fait que le module est une norme sur $\mathbb{R}$ que pour tout vecteur V et tout réel λ, $H'(\lambda V) = |\lambda| H'(V)$ et pour V et V' dans $\mathbb{R}^2$, $H'(V + V') \leq H'(V) + H'(V')$.

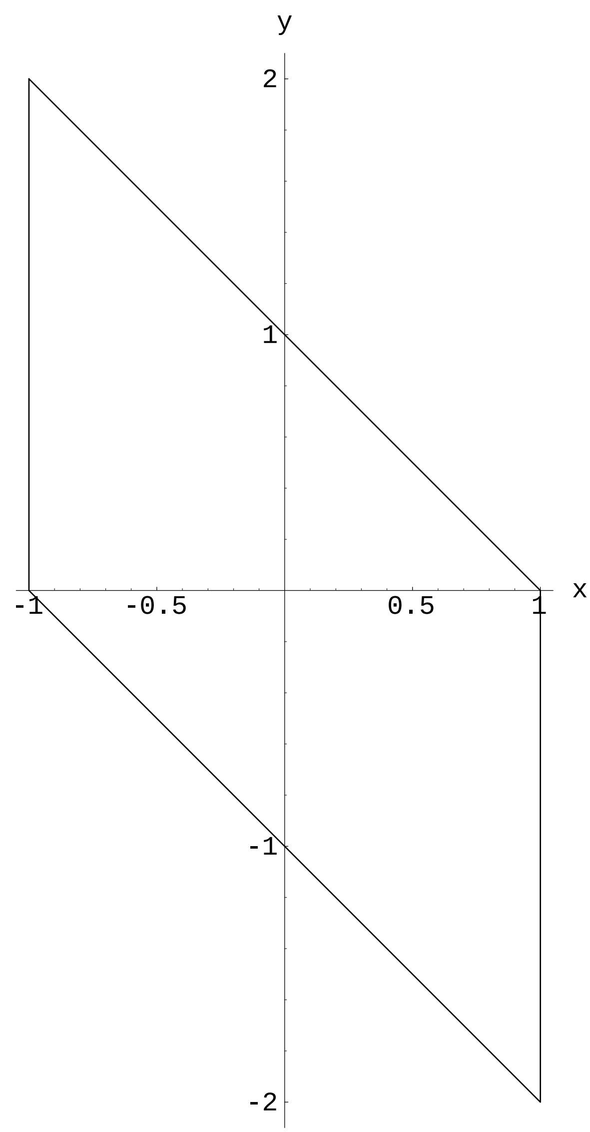


Figure 3: Sphère unité S

9. Il est clair que :
$$\forall V, \quad H'(V) \leq H(V).$$
De plus, on se rend compte graphiquement que la sphère S' contient la sphère centré en 0 de rayon $\frac{1}{2}$ pour la norme H. Donc :
$$\forall V, \quad \frac{1}{2}H(V) \leq H'(V).$$
Finalement :
$$\forall V, \quad H'(V) \leq H(V) \leq 2H'(V).$$
$H(1,0) = H'(1,0) = 1$ donc le vecteur $(1,0)$ réalise l'égalité de gauche.
$H(0,1) = 1$ et $H'(0,1) = \frac{1}{2}$ donc le vecteur $(0,1)$ réalise l'égalité de droite.

PROBLÈME $\mathrm{N}^0 2$

Première partie

1. On a pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:
$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
Comme l'intégration sur une intervalle croissant conserve le sens des inégalités, en intégrant sur $[k, k+1]$, on trouve :
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
2. En sommant l'inégalité de droite sur k variant de 1 à n, on obtient :
$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
En calculant alors l'intégrale de gauche, on trouve :
$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

En sommant maintenant l'inégalité de gauche sur k variant de 1 à $n-1$, on trouve :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{2}^{n} \frac{dt}{t}.$$

Le calcul de l'intégrale permet alors d'écrire :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n.$$

En rajoutant 1 aux deux membres de l'inéquation ci-dessus, on tire donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

Finalement, on a bien l'inégalité demandée :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

3. Comme $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on déduit de l'inégalité précédente que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Toujours à l'aide de la même inégalité, on trouve :

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{1 + \ln n}{n}.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \ln n}{n} = 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0.$$

Deuxième partie

1. (a) L'inégalité triangulaire pour le module permet d'écrire :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{p} |a_k| + \sum_{k=p+1}^{n} |a_k| \right).$$

Comme $a_n \to 0$, on peut affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $n > p$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Cette propriété injecté dans l'inégalité ci-dessus donne :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k| + \frac{n-p}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2},$$

qui est le résultat demandé.

(b) p étant fixé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k| = 0.$$

On en déduit l'existence de $N > p$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En remplaçant cette inégalité dans celle de la question précédente, on trouve que pour tout $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Enfin, ε a été fixé arbitrairement. On a donc montré le résultat demandé :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = 0.$$

2. En posant $a_n = b_n - b$ et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (b_k - b)\right| = 0,$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = b.$$

3. La suite $\mu_n = (-1)^n$ est divergente car (par exemple) $|\mu_{n+1} - \mu_n| = 2$ qui ne tend pas vers 0.

$\sum_{k=1}^{n} \mu_k$ vaut -1 si n est impair et 0 si n est pair. Dans tous les cas, on a donc :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Il est clair alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right| = 0.$$

La suite (μ_k) est donc convergente en moyenne.

On a montré qu'une suite qui converge est convergente en moyenne mais que la réciproque est fausse!

4. (a) On a vu que la convergence entraîne la convergence en moyenne. Puisque $\delta_n \to c$, on a également $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\delta_k \to c$.

   Mais $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\delta_k = \dfrac{c_{n+1}-c_1}{n}$ donc $\dfrac{c_{n+1}-c_1}{n} \to c$.

   On en déduit alors que $\dfrac{c_{n+1}}{n+1} \to c$, car $\dfrac{c_1}{n} \to 0$. Cela équivaut naturellement à $\dfrac{c_n}{n} \to c$.

   (b) $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

   i. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \geq$, $u_n \in [0,1]$. Or, il est connu que :

   $$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq \sin x \leq x.$$

   On a donc :

   $$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

   La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers $l \in [0,1]$.
   Comme la fonction sinus est continue et que 0 est la seule solution à l'équation $\sin x = x$, on en conclut que $l = 0$.

   ii. u_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On peut donc utiliser les développements limités au voisinage de 0. Soit $r < 0$.

   $$\begin{aligned}
   u_{n+1}^r - u_n^r &= (\sin u_n)^r - u_n^r \\
   &= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^r - u_n^r \\
   &= u_n^r\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^r - 1\right) \\
   &= u_n^r\left(1 - r\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1\right) \\
   &= r\frac{u_n^{r+2}}{6} + o(u_n^{r+2})
   \end{aligned}$$

Pour $r = -2$, on trouve donc :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \longrightarrow \frac{1}{3} \neq 0.$$

iii. En posant $c_n = \frac{1}{u_n^2}$, on déduit de la question 4.(a) que $c_n \to \frac{1}{3}$. Par suite $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ et comme $u_n \geq 0$, finalement $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} dt.$$

1. La fonction $\dfrac{1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ donc $0 \notin D_f$.

   - Si $x < 0$, il n'y a aucun problème de définition de l'intégrale car le dénominateur est défini, ne s'annule jamais et l'intervalle d'intégration reste borné.
   - Si $x > 0$, 1 est dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{x}, x\right]$ (pas forcément ordonné). Or :

   $$\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt[3]{(t-1)(t^2+t+1}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3(t-1)}} \quad \text{quand} \quad t \to 1,$$

   dont l'intégrale converge en 1.

2. Soit la fonction g définie par :

   $$g(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} dt.$$

   Par les mêmes arguments que précédemment, il est clair que $D_g = \mathbb{R}$. Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et calculons sa dérivée.

   - Si $x < 1$, il n'y a aucun problème de définition de l'intégrale. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}$ étant continue, g est donc dérivable en x et $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

- Si $x > 1$, on écrit $g(x) = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt + \int_2^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt.$

  L'intervalle (non forcément ordonné) $[2, x]$ ne contient pas 1. À nouveau, il est facile de conclure que g est dérivable et que $g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

  On obtient donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

  On écrit maintenant :
$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt + \int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right).$$

  En utilisant les formules de dérivation des fonctions composées, on trouve :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \quad f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}} + \frac{1}{x^3\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}}.$$

  Tout calcul fait, on trouve :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \quad f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2}.$$

  f' est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et on a clairement :
$$\lim_{x\to 1} f'(x) = 0.$$

  f' est donc prolongeable par continuité en 1. On sait alors que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

  f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \quad f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2\sqrt[3]{x^3-1}} \quad \text{et} \quad f'(1) = 0.$$

3. Soit $a = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1\right) dt.$

   On a déjà vu que cette intégrale convergeait en 1.

   En $+\infty$, on peut écrire :
$$\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 = \left(1 - \frac{1}{t^3}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \sim 1 + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) - 1 = \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right),$$

   ce qui prouve également la convergence en $+\infty$.

   Comme 1 et $+\infty$ sont les seuls problèmes, l'intégrale a est convergente. On montre de manière analogue que b est convergente.

4. On écrit :
$$\begin{aligned} f(x) - x &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt - \int_{\frac{1}{x}}^{x} dt + \frac{1}{x} \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 \right) dt + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$
Or $\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 \right) dt = a$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Cela prouve donc que :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = a,$$
ce qui montre que $x + a$ est asymptote à $fen + \infty$.
On montre de même que $x + b$ est asymptote à f en $-\infty$.

5. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2}$. Il est donc clair que f' est positive. f est donc croissante sur $\mathbb{R}^*$.
L'intégrale a est convergente et $\lim_{x\to 0^+} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 \right) dt = -a$.
De plus :
$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\frac{1}{x}}^{x} 1.dt = \lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\infty.$$
Donc :
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$
De la même façon :
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$
Enfin $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$. On a donc un point d'inflexion en $(1, 0)$ (car f est strictement croissante).
On a alors tous les éléments pour tracer le graphe de f.

PROBLÈME n^{0}1

1. Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, donc $x + \ln(1-x) \leq 0$. On en conclut que (u_n) est décroissante.

On constate également classiquement que pour tout $k \geq 1$:

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{t}.$$

On en tire pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t},$$

et par suite, en sommant sur k variant de 1 à n :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

Cette dernière inégalité prouve que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

(u_n) est donc décroissante et minorée par 0. Il existe donc $0 \leq \gamma \leq 1$ tel que :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

2. On définit la fonction f par :

$$\forall t \in]0,1[, \quad f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}.$$

On peut écrire :

$$\forall t \in]0,1[, \quad f(t) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{\ln(1-t)}\right).$$

En développant le ln à l'ordre 2 en 0 :

$$\frac{t}{\ln(1-t)} = \frac{t}{-t - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{t^2}{2}\right)} = -\frac{1}{1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right)} = -1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a alors :

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{quand} \quad t \to 0,$$

ce qui montre que :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, $\lim_{t \to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$. Donc :

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1.$$

Finalement, on peut prolonger f par continuité sur $[0,1]$ en $\widetilde{f}$ définie par :

$$\forall t \in]0,1[, \quad \widetilde{f}(t) = f(t), \quad \widetilde{f}(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \widetilde{f}(1) = 1.$$

3. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

   En posant $t = 1 - e^{-u}$ qui est bien un changement de variable bijectif, on trouve :

$$I = \int_{+\infty}^{0} f(1-e^{-u})e^{-u}du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\left(1 + \frac{e^{-u}-1}{u}\right)du.$$

   On a donc bien la forme recherchée avec $h(u) = 1 + \dfrac{e^{-u}-1}{u}$.

   (a) Soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u}du$.

   En 0, $\dfrac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} \sim \beta - \alpha$, il n'y a donc pas de problème.

   En $+\infty$, la décroissance rapide de l'exponentielle vers 0 fournit la convergence de l'intégrale.

   Il est clair que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u}du = \lim_{X\to+\infty}\left(\int_0^X \frac{e^{-\alpha u}-1}{u}du - \int_0^X \frac{e^{-\beta u}-1}{u}du\right).$$

   En faisant les changements de variable $v = \alpha u$ dans la première intégrale et $v = \beta u$ dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{e^{-\alpha u}-1}{u}du - \int_0^X \frac{e^{-\beta u}-1}{u}du &= \int_0^{\alpha X} \frac{e^{-u}-1}{u}du - \int_0^{\beta X} \frac{e^{-u}-1}{u}du \\
&= \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u}du + \int_{\alpha X}^{\beta X} \frac{1}{u}du \\
&= \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u}du + \ln\frac{\beta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

   La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du$ permet d'affirmer que :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u}du = 0.$$

   On trouve finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u}du = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

   (b) On a montré précédemment que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\left(1 + \frac{e^{-u}-1}{u}\right)du.$

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} = \frac{e^{-u}(1-e^{-nu}+e^{-nu})}{1-e^{-u}} = \sum_{k=1}^{n} e^{-ku} + \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}}.$$

En remplaçant cette expression dans l'intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-ku} + \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} \right) \left(1 + \frac{e^{-u}-1}{u} \right) du \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-ku} du + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)u} - e^{-ku}}{u} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{k+1} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&= u_n + \ln \frac{n}{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du.
\end{aligned}$$

Soit maintenant la suite J_n définie, pour $n > 0$, par :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-nu} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du.$$

h étant une fonction positive, on peut écrire, pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\delta} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du + \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&\leq \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du + e^{-n\delta} \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&\leq \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du + e^{-n\delta} I.
\end{aligned}$$

I étant convergente en 0, on sait que $\lim\limits_{\delta \to 0} \displaystyle\int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du = 0$. Donc, pour $\varepsilon_0 > 0$ donné, il existe $\delta_0 > 0$ tel que :

$$\int_0^{\delta_0} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du < \varepsilon_0.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n\delta_0} = 0$, il existe N_0 tel que l'on ait :

$$\forall n > N_0, \quad e^{-n\delta_0} I < \varepsilon_0.$$

Donc il existe N_0 tel que l'on ait :

$$\forall n > N_0, \quad J_n < 2\varepsilon_0.$$

$\varepsilon_0 > 0$ ayant été fixé arbitrairement, on a en fait montré que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
Or on avait montré que :

$$I = u_n + \ln\frac{n}{n+1} + J_n.$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette expression, on trouve finalement que $I = \lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$ qui est ce que l'on devait démontrer.

PROBLÈME n^{0}2

Question préliminaire : $S_n(x)$ est impaire et périodique de période 2π, on peut donc restreindre l'étude sur $[0,\pi]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n :

$$\forall t \in]0,x], \quad f_n(t) = \frac{\cos\dfrac{(n+1)\,t}{2}\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.$$

   (a) Il est clair que $\lim_{t\to 0} f_n(t) = n$. f_n est donc prolongeable par continuité en 0.

   (b) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}e^{it} \\
&= \frac{\left(e^{it}-e^{i(n+1)t}\right)(1-e^{-it})}{2(1-\cos t)} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}}\left(e^{-in\frac{t}{2}}-e^{in\frac{t}{2}}\right)\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)}{4\sin^2\dfrac{t}{2}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\dfrac{t}{2}}\left(-2i\sin n\dfrac{t}{2}\right)\left(2i\sin\dfrac{t}{2}\right)}{4\sin^2\dfrac{t}{2}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}}\sin n\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

En prenant alors la partie réelle de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\cos (n+1)\frac{t}{2} \sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

(c) Il est clair que $\displaystyle\int_0^x \cos (kt)dt = \frac{\sin (kx)}{k}$, d'où l'égalité recherchée.

(d) En faisant le changement de variable $t = 2u$, on trouve :

$$S_n(x) = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\cos ((n+1)u) \sin (nu)}{\sin u} du.$$

Mais $\cos ((n+1)u) = \cos (nu) \cos u - \sin (nu) \sin u$, ce qui remplacé dans l'intégrale donne :

$$S_n(x) = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\cos (nu) \sin (nu) \cos u}{\sin u} du - 2\int_0^{\frac{x}{2}} \sin^2 (nu) du.$$

D'une part $2\cos (nu) \sin (nu) = \sin (2nu)$ et d'autre part,

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \sin^2 (nu) du = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1-\cos (2nu)}{2} du = \frac{x}{4} - \frac{\sin (nx)}{4n}.$$

On en déduit alors :

$$S_n(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin (2nu) \cos u}{\sin u} du - \frac{x}{2} + \frac{\sin (nx)}{2n}.$$

2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin (2nu) \cos u}{\sin u} du$ et on définit l'application g par :

$$\forall t \in \left]0, \frac{x}{2}\right], \quad g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

(a) Développons la fonction g au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{t\cos t}{\sin t} - 1\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)} - 1\right), \\
&= \frac{1}{t}\left(-\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right) \\
&= -\frac{t}{3}+o(t)
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand t tend vers 0. g est donc bien prolongeable par continuité en 0.

(b) Immédiat.

3. On s'intéresse à $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt)h(t)dt$.

   (a) Si pour tout t dans $[a,b]$, $h(t) = \alpha$ où α est une constante, on a :

$$\int_a^b \sin(nt)h(t)dt = \alpha \frac{\cos na - \cos nb}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

   La généralisation à h en escalier se fait en découpant l'intégrale sur les intervalles où h est constante et en utilisant ce résultat sur chacun des intervalles.

   (b) On suppose connu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall t \in [a,b], \quad |h(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon.$$

   On a alors :

$$\left| \int_a^b \sin(nt)h(t)dt - \int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |\sin(nt)||h(t)-\varphi(t)|dt \leq \varepsilon(b-a).$$

   D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt = 0.$$

   Donc il existe N tel que pour $n > N$ on ait :

$$\left| \int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

   Donc pour $n > N$,

$$\left| \int_a^b \sin(nt)h(t)dt \right| \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

   ε étant arbitrairement petit, on a en fait montré que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt)h(t)dt = 0.$$

4. (a) Soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

   En 0, $\frac{\sin t}{t} \sim 1$, il n'y a donc pas de problème.

   Soit l'intégrale :

$$I_X = \int_1^X \frac{\sin t}{t} dt.$$

On intègre par parties en dérivant $\frac{1}{t}$ et en intégrant le sinus :

$$I_X = -\int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt - \frac{\cos X}{X} + \cos 1.$$

D'une part, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est clairement absolument convergente et d'autre part, $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$.
On déduit de ces deux propriétés la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est donc convergente et on admet qu'elle vaut $\frac{\pi}{2}$.

(b) On a vu que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} \sin(2nu) g(u) du + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu)}{u} du$.
D'après la question 3.(a) :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{x}{2}} \sin(2nu) g(u) du = 0.$$

En faisant le changement de variable $t = 2nu$ dans la deuxième intégrale, on trouve :

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu)}{u} du = \int_0^{nx} \frac{\sin u}{u} du.$$

D'après la question 4.(a), si $x > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{nx} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, $I_n(0) = 0$ et si $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = \frac{\pi}{2}$.

(c) On a de manière évidente :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad S(x) = I(x) - \frac{x}{2}.$$

Donc :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad S(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{et} \quad S(0) = 0.$$

L'application S est donc discontinue en 0 et continue sur $]0, \pi]$.
Comme S est 2π-périodique, S est discontinue en tout point de la forme $2k\pi$ où k est un entier relatif et continue sur $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(d) On trace aisément le graphe de S.