AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1) a. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions g définies sur R par : $g(t) = Ce^{\frac{t}{4}}$ où C $\in R$

1) b. $g(0) = 1$ implique que $C = 1$ donc pour tout réel t, on a $g(t) = e^{\frac{t}{4}}$

1) c. L'unité choisie étant la centaine d'individus, la population dépasse 300 rongeurs si et seulement si :$g(t) > 3$ soit $e^{\frac{t}{4}} > 3$ ou encore $\frac{t}{4} >$ ln 3 soit $t > 4 \ln 3 \approx 4{,}3$.
Au bout de 5 ans la population dépassera 300 rongeurs.

2) a. La fonction u est définie sur R^+ et strictement positive, la fonction h définie sur R^+ par $h(t) = \frac{1}{u(t)}$, est définie sur R^+ et strictement positive.

La fonction h est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable strictement positive donc non nulle sur R^+ et pour tout réel positif t on a $u(t) = \frac{1}{h(t)}$ soit pour tout réel positif t,

$u'(t) = -\frac{h'(t)}{h^2(t)}$ donc la relation devient pour tout réel positif t :

$$-\frac{h'(t)}{h^2(t)} = \frac{1}{4h(t)} - \frac{1}{12h^2(t)} \text{ soit :}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \qquad \text{et } h(0) = \frac{1}{u(0)} = 1$$

2) b. Les solutions sur R de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions définies sur R, $t \mapsto \frac{1}{3} + Ce^{-\frac{t}{4}}$ où C $\in$ R.

Comme $h(0)=\frac{1}{3}+Ce^{0}=1$ on a $C=\frac{2}{3}$.

Pour tout réel positif t, $h(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}}$ et $u(t)=\frac{3}{1+2e^{-\frac{t}{4}}}$

2) c. $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)=3$ donc la taille de la population qui sera en augmentation constante tendra vers 300 individus.

Exercice 2

1) a.

- Le nombre de tirages possibles est $C_2^5=10$.
- L'évènement V est réalisé lorsque les deux boules vertes de l'urne sont tirées, il y a donc $C_2^2=1$ seul tirage réalisant V. Les tirages étant tous équiprobables on a :

  p(V) = nombre de tirages réalisant V / nombre total de tirages possibles = $\frac{1}{10}$.
- L'évènement J est réalisé lorsque deux boules jaunes sont tirées, sachant qu'il y a dans l'urne trois boules jaunes, il y a $C_2^3=3$ tirages réalisant J. Les tirages étant équiprobables, on a :

  p(J) = nombre de tirages réalisant J / nombre total de tirages possibles = $\frac{3}{10}$.

1) b. Lorsque le joueur a obtenu deux boules vertes, il fait tourner la roue. La fraction de la roue pour laquelle l'évènement R est réalisé est égale à : $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$. Donc $p_V(R)=\frac{5}{8}$.

On obtient alors : $p(\text{R}\cap\text{V}) = p(\text{V}) * p_V(\text{R}) = \frac{1}{10}*\frac{5}{8}=\frac{1}{2*8}$. Donc $p(\text{R}\cap\text{V})=\frac{1}{16}$.

1) c. Les évènements V, J, D formant un système complet d'évènements où D est l'évènement « le joueur a obtenu deux boules de couleurs différentes », on utilise la formule des probabilités totales pour calculer p(R) :

$$p(\text{R}) = p(\text{V}) * p_V(\text{R}) + p(\text{J}) * p_J(\text{R}) + p(\text{D}) * p_D(\text{R}) .$$

D'après le texte p_J(R) = 1 puisque si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation, et p_D(R) = 0 car si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes il a perdu. On obtient donc :

$$p(\mathrm{R}) = \frac{1}{10} * \frac{5}{8} + \frac{3}{10} * 1 = \frac{5}{80} + \frac{3*8}{80} = \frac{29}{80}$$

1) d. La probabilité de l'évènement C : « le joueur gagne 100 E » est :

$p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{V} \cap \mathrm{A}) = p(\mathrm{V}) * p_V(\mathrm{A}) = \frac{1}{10} * \frac{1}{8}$, A étant l'évènement « la roue indique un gain de 100 E »

$$p(\mathrm{C}) = \frac{1}{80}$$

La probabilité de l'évènement T "le joueur gagne 20 euros" est :

$p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{V} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{V}) * p_V(\mathrm{B}) = \frac{1}{10} * \frac{1}{4}$, B étant l'évènement « la roue indique un gain de 20 E »

$$p(\mathrm{T}) = \frac{1}{40}$$

2) a. Les valeurs prises par X sont :

- m lorsque le joueur a perdu lors du tirage des deux boules, évènement D ;

0 lorsque l'évènement R est réalisé ;

20 – m lorsque l'évènement T est réalisé ;

100 – m lorsque l'évènement C est réalisé.

2) b. La loi de probabilité de X est d'après ce qui précède :

$$p(X = -m) = p(D) = \frac{3}{5}$$

$$p(X = 0) = p(R) = \frac{29}{80}$$

$$p(X = 20 - m) = p(T) = \frac{1}{40}$$

$$p(X = 100 - m) = p(C) = \frac{1}{80}$$

2) c. Le calcul de l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X

$$E(X)=\frac{3}{5}(-m)+\frac{29}{80}*0+\frac{1}{40}(20-m)+\frac{1}{80}(100-m)$$

$$E(X)=\frac{140-51m}{80}$$

2) d. $E(X)\leq 0$

D'où $m\geq\frac{140}{51}\approx 2{,}74$

La mise minimale en nombre entier d'euros sera de 3 euros.

3) On désigne par F l'évènement « le joueur perd au moins une fois sa mise » et par $\overline{F}$ l'évènement contraire soit : « le joueur ne perd jamais sa mise ».

$$p(\overline{F})=p(D)*p(D)*p(D)*p(D)=\frac{2}{5}*\frac{2}{5}*\frac{2}{5}*\frac{2}{5}$$

La probabilité que le joueur perde au moins une fois sa mise au cours des 4 parties est $p(F)=1-\left(\frac{2}{5}\right)^4=0{,}9744$

4) Calculons la probabilité de l'évènement D : obtenir deux boules de couleurs différentes. Les tirages de deux boules sont tous équiprobables, le nombre total de tirages possibles est C_2^{n+2} et le nombre de tirages réalisant *D* est 2*n*. D'où :

$$p(D)=\frac{2n}{C_2^{n+2}}=\frac{4n}{(n+2)(n+1)}$$

Si *D* est réalisé le joueur perd sa mise, si $\overline{D}$ est réalisé le joueur gagne ou est remboursé de sa mise :

$$p(G)=p(\overline{D})=1-\frac{4n}{(n+2)(n+1)}$$

On veut avoir : $p(G)\geq\frac{1}{2}$ donc $n^2-5n+2\geq 0$.

Le trinôme x^2-5x+2 a pour racines $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Les entiers naturels de $\mathbb{N}^*$ solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ soit les entiers supérieurs ou égaux à 5.

La valeur minimale de n pour que $p(G)$ soit supérieure à 0,5 est $n = 5$

Exercice 3

1) Pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, on a : $0 \leq 1-t \leq 1$
On en déduit que pour tout entier n, $(1-t)^n \geq 0$ et puisqu'une exponentielle est toujours positive, pour tout entier n et tout réel t appartenant à $[0;1]$, on a $(1-t)^n e^t \geq 0$
$f_n(t) = (1-t)^n e^t$ est continue et positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 f_n(t)dt \geq 0$
Pour tout entier n non nul $u_n \geq 0$

2) a. La fonction exponentielle est croissante sur R donc sur $[0;1]$, donc pour tout t appartenant à $[0;1]$, on a : $e^0 \leq e^t \leq e^1$ soit $1 \leq e^t \leq e$
En multipliant les deux membres de l'inégalité $e^t \leq e$ par le réel positif $(1-t)^n$, on en déduit : $(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$
En intégrant sur $[0;1]$ les deux membres de l'inégalité précédente, on a :

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 et(1-t)^n dt$$

Or, $e \int_0^1 (1-t)^n dt = e \frac{1}{n+1}$

d'où le résultat demandé.

2) b. On sait que pour tout entier n non nul $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

Or, $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc, par encadrement on a : $\lim\limits_{n \to -\infty} u_n = 0$

3) $u_1 = e - 2$ en intégrant par parties.

En posant $u(t) = (1 - t)^{n+1}$ et $v'(t) = e^t$ et en utilisant l'intégration par parties, on trouve le résultat demandé.

4) On considère la propriété P_n « $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ » que l'on démontre par récurrence. D'où le résultat demandé.

5) La limite dépend du signe de a + 2 – e

- Si a = e – 2, la limite est nulle
- Si a > e – 2, la limite est égale à + ∞
- Si a < e – 2, la limite est égale à - ∞

Exercice 4

1) $P(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c$

2)

   a. Si $P(\lambda)$ admet 3 racines distinctes 2 à 2, la matrice est diagonalisable (cf. cours)

   b. Soit λ_1 la racine double et λ_2 la racine simple. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faut que l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 soit de dimension 2, ce qui signifie que le rang de la matrice $A = M - \lambda_1 I_d$ soit 1.
   Cela signifie que tous les déterminants d'ordre 2 sont nuls or il apparaît que le déterminant en haut à gauche de A n'est pas nul et vaut 1

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 \\ -c & -b & -a-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

   donc la dimension de l'espace propre à la valeur propre λ_1 est de dimension 1 donc M est non diagonalisable.

   c. Soit λ_1 la racine triple du polynôme caractéristique. Pour la même raison que précédemment, l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 ne peut être 3 donc M est non diagonalisable.

3) On commence par chercher les vecteurs propres associés à λ_1 et à λ_2 (u et v respectivement) qui se calculent via $f(u) = \lambda_1 u$ et $f(v) = \lambda_2 v$ (f étant l'endormorphisme associé à la matrice M)

Donc $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \end{pmatrix}$

4) On cherche une base (u, w, v) dans laquelle la matrice M s'ecrive sous le forme demandée. Dans cette base, le troisième vecteur w est donc tel que f(w) = u + λ_1 w. On trouve alors $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix}$
On vérifie aisément que (u, w, v) est bien une base.

5) On sait que u et w sont dans la base que l'on cherche et on veut trouver un troisième vecteur w' tel que, dans cette base (u, w, w') : f(w') = v + λ_1 w' (puisque f est l'endormorphisme associé à M). On trouve alors $w' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément que (u, w, w') est bien une base.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

a)

Années	1950	1970	1990	2000	2005	2010	2020	2040
Population	26.316	40.610	71.053	92.960	106.241	120.960	153.827	229.816
Indices	28,3	43,7	76,4	100	114,3	130,1	165,5	247,2

b) Les indices permettant de suivre les évolutions de la densité brute (hab/km^2) seraient effectivement les mêmes que ceux calculés à la question précédente car la densité brute est égale à la population divisée par la surface totale du pays qui ne bouge pas ici.

Question 2

La densité moyenne sur les terres arables (hab/km^2 arable) de la zone « Afrique centrale » est égale à 438 et son écart-type est égal à 419.

Question 3

On observe que le Congo a la plus forte densité. A l'inverse, la Guinée, la république centrafricaine et le Tchad ont les plus faibles densités. On constate également que là où l'écart entre densité brute et densité des terres arables est fort, plus les difficultés alimentaires peuvent surgir.

Question 4

Il faut commencer par calculer une estimation de la surface des terres arables pour l'ensemble de la zone. Ceci s'obtient en sommant la surface de ces terres pays par pays. La surface des terres arables de l'Angola par exemple, s'obtient en résolvant l'équation

Densité = Population / Surface……. 375 = 12.386 / X d'où X = 33 milliers de km^2

Pays	Surface des terres arables (en milliers de km$^{2)}$
Angola	33
Cameroun	72
Centrafrique	20
Congo	2
Congo (RD)	79
Gabon	5
Guinée Equatoriale	2
Sao Tomé et Principe	Non significatif
Tchad	36
Total	249

La population totale de la zone « Afrique centrale » en 2000 étant de 92.960 milliers d'habitants, la densité demandée est de 92.960/249 = 373

Question 5

a) $4466/72^{*} = 62$ (* calculé à la question précédente)

b) La surface des terres arables passerait de 72 milliers de km^2 à :

$$72 \times (1-0{,}007)^{40} = 54 \text{ milliers de } km^2$$

La densité serait alors en 2040 de 23.499/54 = 435

c) L'indicateur passe de 62 en 1950 à 435 en 2040. Cela signifie qu'il faut faire « vivre » presque 10 fois plus de monde sur la même surface de culture. Et encore, la donnée de 1950 est sous estimée puisque l'on a fait l'hypothèse d'une surface identique à celle de 2000 alors que vraisemblablement, il y avait une surface supérieure à 72 milliers de km^2 en 1950.

Question 6

Pour l'ensemble de la zone « Afrique centrale », la densité des terres arables passe de 75 à $1.222 = 229.816/(249 \times 0{,}993^{40})$, soit 16 fois plus. Le Cameroun est donc dans une situation un peu meilleure.