ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note* : *l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Exercice n° 1

Question 1

On étudie en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans R. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y' = \frac{y}{4}$,

où y' désigne la dérivée de la fonction y.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c) Déterminer après combien d'années la population dépassera 300 rongeurs.

Question 2

En réalité, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$.

On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice n° 2

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément, au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 euros,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 euros,
- sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien».

Question 1

a) Calculer les probabilités p(V) et p(J) des évènements respectifs V et J.

b) On note $p_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $p_V(R)$ puis $p(R \cap V)$.

c) Calculer p(R).

d) Calculer la probabilité de gagner les 100 euros, puis la probabilité de gagner les 20 euros de la roue.

Question 2

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale *m*.

a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

d) L'organisateur veut fixer la participation *m* à une valeur entière en euros. Quelle valeur minimale faut-il donner à *m* pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

Question 3

Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

Question 4

On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle *n* le nombre de boules jaunes et on suppose $n \geq 1$, calculer la valeur minimale de *n* pour que la condition précédente soit vérifiée.

Exercice n° 3

Question 1

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

Montrer que pour tout entier naturel *n* non nul, $u_n \geq 0$

Question 2

a) Montrer que pour tout n non nul $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Question 3

Calculer u_1 et montrer que $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

Question 4

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par $v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$

Question 5

Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.

Exercice n° 4

On considère dans cet exercice la matrice ci-dessous et nous allons étudier dans quels cas celle-ci est diagonalisable et dans quels cas elle peut être réduite :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ sont des éléments de } C^3$$

Question 1

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M.

Question 2

Selon le nombre de racines de l'équation précédente, M sera ou non diagonalisable.

a) Si le polynôme caractéristique admet 3 racines distinctes, justifier que M soit diagonalisable.

b) Si le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes, justifier que M ne soit pas diagonalisable.

c) Si le polynôme caractéristique admet 1 racine triple, justifier que M ne soit pas diagonalisable.

Question 3

Donner les vecteurs propres de M lorsque le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes.

Question 4

Dans le cas de la question 2b, donner une base dans laquelle la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les racines du polynôme caractéristique}$$

Question 5

Dans le cas de la question 2c, donner une base dans laquelle la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1 \text{ est la racine du polynôme caractéristique}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

"Le sport est éducation, la plus concrète, la plus véritable : celle du caractère." Que pensez-vous de cette déclaration de René Maheu, ancien Directeur Général de l'UNESCO ?

Sujet n° 2

Les droits de l'homme vous paraissent-ils représenter une exigence valable en tout lieu et pour tout homme, comme l'affirme la *Déclaration*, dite justement *Déclaration Universelle*, des Nations-Unies ?

Sujet n° 3

L'Histoire est le produit le plus dangereux que la chimie de l'intellect ait élaboré. Elle fait rêver, elle enivre les peuples, leur engendre de faux souvenirs, exagère leurs réflexes, entretient leurs vieilles plaies, les tourmente dans leur repos, les conduit au délire des grandeurs ou à celui de la persécution." En vous appuyant sur des exemples précis, vous commenterez et éventuellement discuterez ces lignes de Paul Valery, dans *Regards sur le monde actuel* (1931).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les stratégies d'intégration des pays émergents dans l'économie mondiale.

Sujet n° 2

I - Exercice de microéconomie (10 points)

A) L'échange (6 points)

Soit le consommateur A dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1 \; q_2^{1/2}$$

1) Donnez une autre fonction d'utilité représentant les préférences de ce consommateur A.

2) Donnez le taux marginal de substitution de A au panier de dotation initiale $Q_A^0 = (1, 2)$. Interprétez.

3) Soit un autre consommateur B qui a les mêmes préférences que A mais qui possède initialement le panier $Q_B^0 = (4, 1)$. Ont-ils intérêt à échanger ? Représentez graphiquement (dans une boîte d'Edgeworth) l'ensemble des échanges possibles ?

4) Représentez graphiquement l'ensemble des équilibres possibles ? Donnez l'équation de la courbe des contrats. Interprétez.

5) Soit un vecteur de prix quelconque (p_1, p_2). Calculez le choix optimal de concurrence parfaite de A et B. Interprétez.

6) Donnez un vecteur de prix d'équilibre. Quel est le lien avec les équilibres trouvés précédemment ?

B) Le monopole (4 points)

Soit un monopole dont la fonction de coût total est donnée par :

$c(q) = q^3 + 8$ où q est la quantité du bien produit.

La demande du bien qu'elle produit est donnée par :

$d(p) = 16 - p$

1) Quelle(s) hypothèse(s) change dans le modèle du monopole par rapport au modèle de concurrence parfaite ?

2) Tracez et interprétez graphiquement les fonctions de coût marginal et de coût moyen.

3) Quel est le seuil de rentabilité du monopole ? Interprétez.

4) Calculer le choix optimal du monopole, quantité et prix. Interprétez économiquement à quels arbitrages se livre le monopole ?

5) Représentez très succinctement l'aire représentant le profit sur un autre graphique.

6) Comparer son choix avec celui qu'il aurait fait en concurrence parfaite.

7) Ce monopole peut-il être naturel ?

II - Exercice de macroéconomie (4 points)

Soit une économie composée de ménages, d'entreprises et de l'Etat.

La fonction de consommation des ménages est donnée par $C = C_0 + aY_D$, où Y_D représente le revenu disponible des ménages.

Soit I, l'investissement supposé exogène. Soit G les dépenses publiques supposées exogènes.

Soit T, le niveau de l'impôt, supposé exogène.

1) Interprétez la fonction de consommation.

2) Déterminez le revenu d'équilibre de l'économie.

3) Calculez le multiplicateur keynésien.

Supposons désormais que $a = 0,5$.

4) Calculez le multiplicateur de dépenses publiques. Quel est l'effet sur le revenu d'une hausse de 100 des dépenses publiques ?

5) Calculez le multiplicateur fiscal. Quel est l'effet sur le revenu d'une baisse d'impôt de 100 ? En comparant votre résultat avec celui de la question précédente, expliquez pourquoi les deux politiques n'ont pas la même efficacité.

6) Sans calcul, expliquez quel serait l'effet d'une hausse de la propension à consommer sur les politiques précédentes. Interprétez. Comment l'Etat pourrait-il alors obtenir un tel effet ?

III - Questions (6 points)

1) La baisse tendancielle du taux de profit chez Marx : enjeux et limites (4 points).

2) L'efficacité marginale du capital (2 points).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Il vous est proposé d'étudier un indicateur lié au problème de la faim dans le monde, il s'agit de la densité de la population sur les terres arables (hab/km^2 arable). Pour cela, il vous est proposé le tableau 1, page 3. Nous allons nous concentrer sur les pays de la zone « Afrique centrale ».

Pour information, une terre arable est une terre qui peut être labourée ou cultivée. Les terres arables comprennent les terres en jachère, les cultures maraichères et céréalières et les prairies artificielles. Les terres arables du globe sont en réduction depuis plusieurs dizaines d'années sous l'effet de plusieurs facteurs : urbanisation des meilleures terres (notamment en Asie), processus de désertification (notamment dans les régions du Sahel et en Australie, mais aussi en Espagne), impact du réchauffement climatique et érosion des terres arables fragiles causée par la déforestation ou l'abus d'engrais.

Question 1

a) A partir du tableau 1, page 3, calculer les indices permettant de suivre les évolutions de population de la zone « Afrique centrale » en base 100 en 2000.

b) Les indices permettant de suivre les évolutions de la densité brute (hab/km^2) seraient-ils les mêmes que ceux calculés à la question précédente ? Justifier.

Question 2

Calculer la moyenne de la densité sur les terres arables (hab/km^2 arable) en 2000 de la zone « Afrique centrale » ainsi que son écart-type.

Question 3

Commenter les chiffres figurant dans le tableau 1, page 3, des deux indicateurs suivants : densité brute et densité sur les terres arables.

Question 4

A partir du tableau 1, page 3, calculer la densité (hab/km^2 arable) en 2000 sur les terres arables de la zone « Afrique centrale ».

Question 5

a) En supposant que la répartition des terres n'a pas bougé entre 1950 et 2000, calculer la densité (hab/km^2 arable) sur les terres arables du Cameroun en 1950.

b) En supposant une diminution de 0,7% par an de la surface des terres arables entre 2000 et 2040, calculer la densité (hab/km^2 arable) sur les terres arables du Cameroun en 2040.

c) Commenter l'évolution de cet indicateur entre 1950 et 2040.

Question 6

Pour l'ensemble de la zone « Afrique centrale », les calculs demandés à la question 5 ont été faits avec les mêmes hypothèses.

Année	1950	2000	2040
Densité terres arables	75	(Cf. réponse à la question 4)	1.222

Comparer la situation du Cameroun au sein de la zone « Afrique centrale ».

Tableau 1 - Superficies et densités en 2000, Evolution de la population de 1950 à 2040

Sous-régions et pays	Histoire		Superficie	Densité (hab/km^2) (2000)		Effectifs de la population (milliers d'habitants)							
	Pays colonisateur	Indépendance en	en (milliers de km^2)	Brute	Terres arables	1950	1970	1990	2000	2005	2010	2020	2040
Afrique centrale			6620	14	-	26316	40610	71053	92960	106241	120960	153827	229816
Angola	Portugal	1975	1248	10	375	4131	5588	9340	12386	14533	16842	22036	35882
Cameroun	France	1960	476	32	211	4466	6631	11661	15117	16564	17775	19874	23499
Centrafrique	France	1960	624	6	184	1314	1871	2943	3715	3962	4265	4900	6038
Congo	France	1960	342	10	1567	808	1323	2494	3447	3921	4532	5960	9159
Congo (RD)	Belgique	1960	2348	21	616	12184	20603	37370	48571	56079	64714	84418	129973
Gabon	France	1960	268	5	254	469	529	953	1258	1375	1509	1781	2284
Guinée Equatoriale	Espagne	1968	28	16	198	226	294	354	456	521	590	736	1040
Sao Tomé-et-Principe	Portugal	1975	1	155	317	60	74	116	149	169	190	232	316
Tchad	France	1960	1285	6	221	2658	3697	5822	7861	9117	10543	13890	21625

Source : Bilan statistique – document « La démographie de l’Afrique au sud du Sahara des années 1950 aux années 2000 » Dominique Tabutin et Bruno Schoumaker