

Exercice 1

Question 1 :

a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$

b) En partant de la définition de I_{n+2} et en intégrant par parties, on trouve la relation

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

c) Si n pair ($n=2p$) $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2}$

Si n impair ($n=2p+1$) $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$

Question 2 :

a) En faisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, on trouve $J_n = I_n$

b) Même réponse que pour la question 1-c

Question 3 :

a) En faisant le changement de variable $u = \text{Arc sin } t$, $K_n = 2I_{2n+1}$

b) $K_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$

Question 4 :

a) $L_n = (-1)^n K_n$

b) $L_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 2

$$X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 1 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcul des valeurs propres : les valeurs propres sont 1 ; (-1/3) ; (-2/3)

Calcul des vecteurs propres :

Pour la valeur propre 1, un vecteur propre est (5 ; 7 ; 8)

Pour la valeur propre (-1/3), un vecteur propre est (1 ; -1 ; 0)

Pour la valeur propre (-2/3), un vecteur propre est (0 ; 1 ; -1)

Question 2 : Il faut calculer $X_5 = M^5 X_0 = \begin{pmatrix} 20/81 \\ 73/243 \\ 110/243 \end{pmatrix}$

Question 3 : On doit calculer M^n en utilisant la diagonalisation et la formule $M = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale semblable à M .

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-2/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \text{ avec}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 15 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quand on fait tendre n vers l'infini,

$$M_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le vecteur $M_{\infty} X_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,35 \\ 0,40 \end{pmatrix}$

Ce qui donne une tendance à long terme : A a le ballon 25% du temps, B 35% du temps et C 40 % du temps.

Exercice 3

Question 1 : On désigne par X l'attente en minutes du voyageur

- a) En partageant l'heure (7h-8h) en 12 tranches de 5 minutes, on constate que le voyageur attend entre 0 et 10 minutes maximum. Sur les 12 tranches, il y a 8 pour lesquelles il attendra moins de 5 minutes et 4 pour lesquelles il attendra entre 5 et 10 minutes. Il y a donc 2 chances sur 3 d'attendre moins de 5 minutes et 1 chance sur 3 d'attendre plus de 5 minutes. L'heure d'arrivée étant uniformément répartie entre 7h et 8h, la fonction de densité f de X est :

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in [0; 5[\\ b & \text{si } t \in [5; 10[\end{cases} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes qui vérifient } a = 2b$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, on en déduit $5a + 5b = 1$, d'où $b = 1/15$

La fonction de répartition F de X est : $F(x) = P(X \leq x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ 2x/15 & \text{si } x \in [0; 5[\\ 1/3 + x/15 & \text{si } x \in [5; 10[\\ 1 & \text{si } x \in [10; +\infty[\end{cases}$$

Les représentations graphiques ne sont pas faites.

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt = \frac{25}{6}$, soit 4 minutes et 10 secondes

Question 2 : On a $Y = 10 + X + M$ où M est la durée du trajet en bus. $E(X)$ a été calculé à la question précédente, il reste à calculer $E(M)$.

Sur les 12 tranches de 5 minutes, on remarque que le voyageur prend la ligne n°4 sur 8 tranches, on a donc $p(M=15) = 2/3$ et $p(M=20) = 1/3$

$$E(M) = 15 \times 2/3 + 20 \times 1/3 = 50/3$$

On en déduit que $E(Y) = 185/6$, soit une durée moyenne de 30 minutes et 50 secondes.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

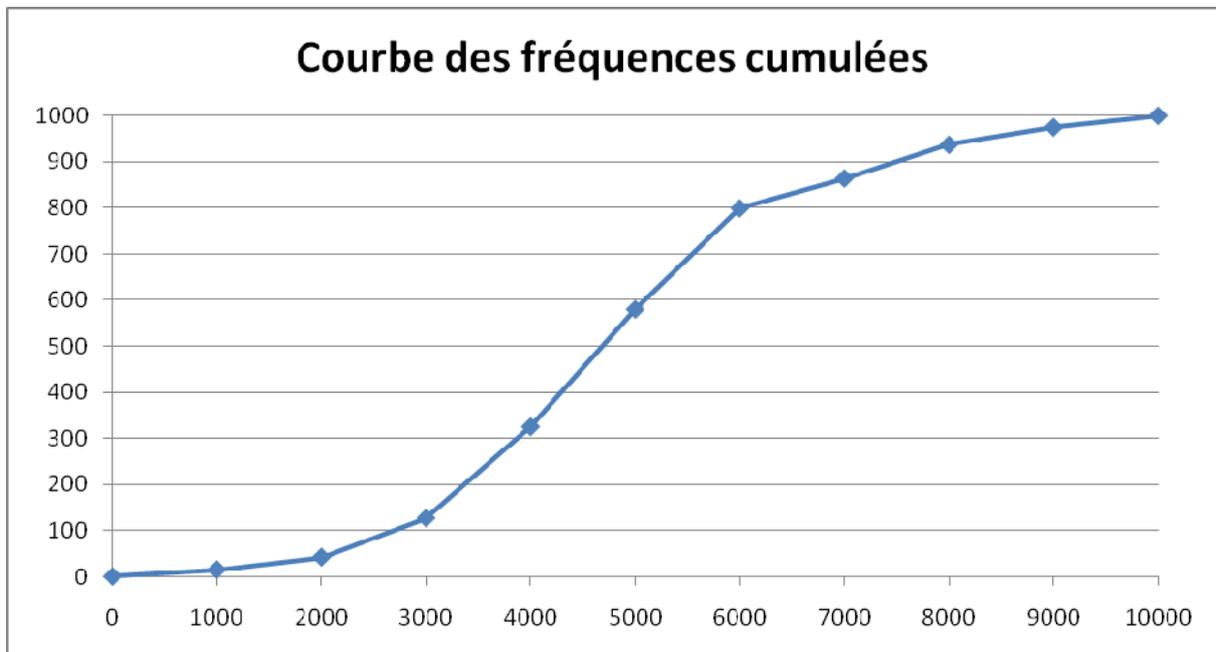
ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

Question 1 : $E(X) = 4.836$ francs et $\sigma(X) = 5.163,72$ francs

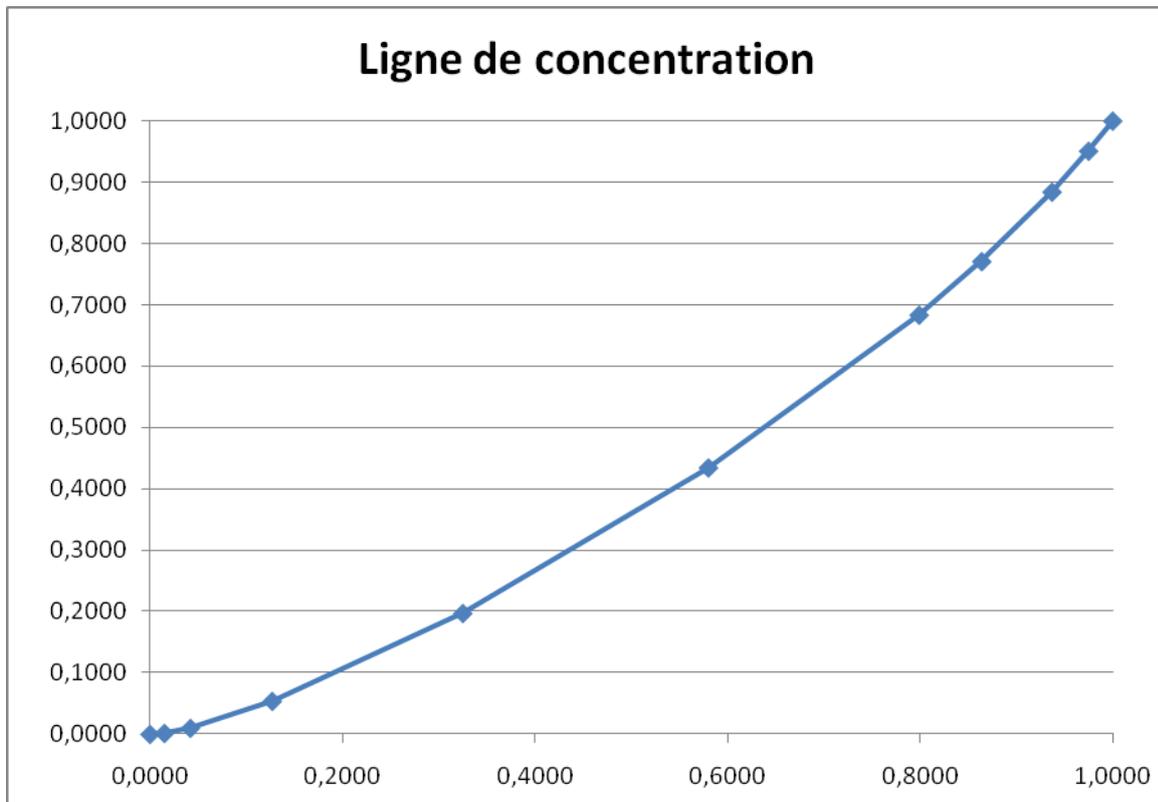
Question 2 :



Question 3 :

J	N_j'	Y_j'
0	0,0000	0,0000
1	0,0150	0,0016
2	0,0420	0,0099
3	0,1270	0,0539
4	0,3250	0,1972
5	0,5800	0,4344
6	0,7990	0,6835
7	0,8640	0,7709
8	0,9370	0,8841
9	0,9750	0,9509
10	1,0000	1,0000

Question 4 :



Question 5 : La courbe que l'on vient de représenter est la courbe de Lorenz. Elle illustre la répartition de la masse salariale dans l'entreprise.

Question 6 : Il s'agit du coefficient de Gini.

Question 7 : Si le coefficient de Gini est nul, cela signifie que la droite OB et la courbe sont confondues. Cela signifie que le salaire est identique pour tout le monde.

Question 8 : Les 20% les plus pauvres de l'entreprise touchent 10% de la masse salariale.
Les 50% les plus pauvres de l'entreprise touchent 35% de la masse salariale.
Les 25% les plus riches de l'entreprise touchent 40% de la masse salariale.

Exercice 2

Question 1 : A partir des données du tableau 4, $2661/2580 = 1,031$, soit une évolution de 3,1% entre 2006 et 2007.

Question 2 : Pas de corrigé type.