

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Exercice n° 1

On se propose de calculer les intégrales de Wallis définies pour n appartenant à N , ensemble des entiers naturels, par:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \quad J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt \quad K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \quad L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt$$

Question 1 : Calcul de I_n

- Calculer I_0 et I_1 puis trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}
- Donner I_n en fonction de n

Question 2 : Calcul de J_n

- Trouver une relation entre J_n et I_n
- Donner J_n en fonction de n

Question 3 : Calcul de K_n

- Trouver une relation entre K_n et I_{2n+1}
- Donner K_n en fonction de n

Question 4 : Calcul de L_n

- Trouver une relation entre L_n et K_n
- Donner L_n en fonction de n

Exercice n° 2

Trois personnes A , B et C jouent au ballon.

Si A possède le ballon, il le passe à B avec la probabilité de $1/3$ et à C avec la probabilité de $2/3$.

Si B possède le ballon, il le passe à A avec la probabilité de $1/3$ et à C avec la probabilité de $2/3$.

Si C possède le ballon, il le passe à A avec la probabilité de $1/3$ et à B avec la probabilité de $2/3$.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « A (resp. B, C) reçoit le ballon après le $n^{\text{ième}}$

échange » et $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix}$

On suppose qu'à l'instant initial, A possède le ballon. On a donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 1 : Déterminer la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$ et calculer ses vecteurs propres.

Question 2 : Calculer la probabilité que chacun des joueurs possède le ballon après le $5^{\text{ième}}$ échange.

Question 3 : Montrer que la suite (M_n) , définie par $M_n = M^n$, converge vers une certaine matrice M_∞ que l'on calculera. Interpréter $M_\infty X_0$.

Exercice n° 3

Une personne prend le bus pour se rendre à son travail. L'heure de son arrivée à la station de départ est uniformément répartie entre 7 et 8 heures du matin. Pour se rendre à son travail, il a le choix entre la ligne n°4 ou la ligne n°7 dont les heures de passage sont :

n°4 : 7h00 ; 7h15 ; 7h30 ; 7h45 ; 8h00 n°7 : 7h05 ; 7h20 ; 7h35 ; 7h50

Le voyageur monte dans le premier bus (n°4 ou n°7) qui se présente.

Question 1 : On désigne par X l'attente en minutes du voyageur.

- a) Déterminer la fonction de densité f et la fonction de répartition F de X et les représenter graphiquement (conseil : pour calculer f , vous pouvez découper la tranche horaire 7h – 8 h en 12 tranches de 5 minutes).
- b) Calculer la durée moyenne d'attente du voyageur.

Question 2 : La durée du voyage est de 15 minutes avec la ligne n°4 et 20 minutes avec la ligne n°7. Le voyageur met 10 minutes pour se rendre de son domicile à la station de départ, puis un temps négligeable pour se rendre de la station d'arrivée à son lieu de travail. On désigne par Y le temps total mis par le voyageur entre son domicile et son lieu de travail.

Calculer le temps moyen mis par le voyageur pour se rendre de son domicile à son lieu de travail.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans son livre *Race et histoire*, Lévi-Strauss constate que "l'humanité est constamment aux prises avec deux processus contradictoires dont l'un tend à instaurer l'unification [des cultures], tandis que l'autre vise à maintenir ou à rétablir la diversification", et il affirme pour sa part "la nécessité de préserver la diversité des cultures dans un monde menacé par la monotonie et l'uniformité". Que pensez-vous, à l'heure de la "mondialisation", de cette affirmation ?

Sujet n° 2

Quels sont les atouts dont dispose l'Afrique pour son développement économique, et quels sont les obstacles qui au contraire freinent ce développement ?

Sujet n° 3

Le poète romantique Vigny opposait, à la liberté de la nature, la servitude que l'homme s'est artificiellement imposée dans les villes, ces "cités serviles" où règne "l'esclavage humain". Que pensez-vous de cette vision de la ville comme lieu de contrainte et de servitude ?

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les enjeux du libre-échange pour les pays en développement.

Sujet n° 2

I - Exercice de microéconomie (8 points)

Soit le consommateur A dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1^{1/2} q_2^{1/4}.$$

- 1) Donnez une autre fonction d'utilité représentant les préférences de ce consommateur A .
- 2) Ses préférences sont-elles convexes ? Interprétez cette propriété. En quoi est-elle déterminante ?
- 3) Donnez le taux marginal de substitution de A au panier de dotation initiale $Q_A^0 = (1, 4)$ Interprétez.
- 4) Soit un vecteur de prix quelconque (p_1, p_2) . Calculez le choix optimal de concurrence parfaite de A . Représentez-le graphiquement. Interprétez.
- 5) Soit un second consommateur B avec les mêmes préférences que A mais avec des dotations initiales $Q_B^0 = (3, 3)$. Donnez son choix de concurrence parfaite.
- 6) Calculez la demande nette de bien 1.
- 7) Qu'est-ce que la loi de Walras ? En déduire la demande nette de bien 2.
- 8) Donnez un vecteur de prix d'équilibre. Quelle propriété d'efficacité possède cet équilibre ?

II - Exercice de macroéconomie (6 points)

Soit un gouvernement soucieux de réduire le chômage et les inégalités sans creuser son déficit budgétaire. Il s'agit de construire un modèle macro-économique de type IS-LM qui distingue les salariés et les capitalistes.

Soient T_1 , les impôts payés par les salariés et T_2 , ceux payés par les capitalistes.

Soient C_1 la consommation des salariés et C_2 celle des capitalistes.

Soient wN la masse salariale et Π le profit total de la période.

Les fonctions de consommation des salariés et des capitalistes sont alors données par :

$$C_1 = 200 + 0.8 (wN - T_1)$$

$$C_2 = 400 + 0.6 (\Pi - T_2)$$

Soit i le taux d'intérêt. La demande de monnaie est donnée par :

$$\Delta M_d = 0.02Y + 15 - i$$

L'investissement des entreprises I est financé par émissions de titres et est donné par :

$$I = 1100 - 60i$$

La dépense publique est notée G et l'offre de monnaie ΔM_s .

- 1) Comment expliquez vous les différences de fonction de consommation ?
- 2) Sachant que les parts respectives des salaires et des profits dans le PIB sont égales ($Y/2$ chacune), donnez la fonction de consommation globale en fonction de Y , T_1 , T_2 .
- 3) Donnez l'équilibre sur le marché des biens.
- 4) Donnez l'équilibre sur le marché de la monnaie.
- 5) Sachant que $G = 1036$, $\Delta M_s = 100$ et que $T_1 = T_2 = 240$, donnez le revenu d'équilibre global.
- 6) Donnez le nouveau revenu d'équilibre après une politique fiscale de redistribution telle que $T_1 = 100$ et $T_2 = 380$. Expliquez les mécanismes à l'œuvre ainsi que le résultat obtenu.

III - Questions (6 points)

- 1) Les deux théorèmes de l'économie du Bien Etre (1 point).
- 2) Après avoir rappelé la définition d'une externalité, expliquez quel(s) problème(s) pose sa présence dans un cadre standard de concurrence parfaite. Présentez succinctement les principaux instruments d'internalisation (3 points).
- 3) Présentation et enjeu de la théorie du revenu permanent (2 points).

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice n° 1

On étudie la répartition des salaires mensuels d'une entreprise de N salariés. Pour chaque tranche de 1.000 francs, on connaît le nombre d'agents dont le salaire est dans cette tranche. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous (tableau 1).

Tableau 1

Répartition selon le salaire mensuel (en francs)

i	Tranche	n_i
1	[0 ; 1000[15
2	[1000 ; 2000[27
3	[2000 ; 3000[85
4	[3000 ; 4000[198
5	[4000 ; 5000[255
6	[5000 ; 6000[219
7	[6000 ; 7000[65
8	[7000 ; 8000[73
9	[8000 ; 9000[38
10	[9000 ; 10000[25

Question 1 : Calculer la moyenne et l'écart type du salaire mensuel.

Question 2 : Représenter graphiquement la fonction de répartition du salaire mensuel.

Question 3 : On note N_j la somme cumulée définie par $N_j = \sum_{i=1}^j n_i$ et $N'_j = \frac{N_j}{N_{10}}$. On note

également $y_i = n_i x_i$, où x_i est le centre de classe et Y_j la somme cumulée définie par $Y_j = \sum_{i=1}^j y_i$. On définit enfin $Y'_j = \frac{Y_j}{Y_{10}}$. Par convention, on note $N_0 = N'_0 = Y_0 = Y'_0 = 0$.

Soit M_j le point du plan cartésien de coordonnées (N'_j, Y'_j) , avec M_0 de coordonnées $(0,0)$. Donner dans un tableau, les coordonnées des points M_j avec quatre décimales.

Question 4 : On appelle ligne de concentration la ligne obtenue en joignant les points M_j . Soient O le point de coordonnées $(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(1,1)$. Tracer sur une même figure la ligne de concentration, les points O , A et B et la première bissectrice OB . On prendra comme unité $OA = AB = 10$ cm.

Question 5 : Commenter le graphique précédent.

Question 6 : On veut calculer l'indicateur statistique défini comme le rapport de l'aire comprise entre le segment OB et la ligne de concentration et l'aire du triangle OAB . Connaissez-vous cet indicateur ?

Question 7 : Donner la signification de cet indicateur, notamment lorsque celui-ci est nul.

Question 8 : En utilisant la courbe de la question 4, indiquer quel pourcentage de la masse salariale revient aux 20% des salariés les moins rémunérés de l'entreprise, aux 50% des salariés les moins rémunérés, aux 25% des salariés les mieux rémunérés.

Exercice n° 2

On étudie l'évolution des salaires en France en 2007 dans les entreprises.

Question 1 : A partir d'éléments donnés dans le tableau 2 ci-après, calculer un indice d'évolution des salaires bruts en euros courants pour une population que vous précisez.

Question 2 : Commenter chacun des trois tableaux ci-après (tableaux 2, 3 et 4).

Tableau 2

Salaires mensuels et horaires moyens et répartition des effectifs selon le sexe et la catégorie socio-professionnelle

	Salaires bruts			Salaires nets de tous prélèvements			Répartition des effectifs (%)	
	Euros courants		Euros constants	Euros courants		Euros constants	2006	2007
	2006	2007	Evolution (%)	2006	2007	Evolution (%)		
SALAIRES MENSUELS DES POSTES A TEMPS COMPLET (et effectifs en années-travail)								
Ensemble	2 580	2 661	1,6	1 938	1 997	1,5	100,0	100,0
Cadres ¹	5 170	5 366	2,3	3 852	3 997	2,3	16,3	16,4
Prof. interm.	2 625	2 698	1,2	1 965	2 017	1,1	24,5	24,6
Employés	1 791	1 833	0,9	1 361	1 391	0,7	22,8	22,8
Ouvriers	1 883	1 928	0,9	1 422	1 459	1,0	36,3	36,2
Hommes	2 755	2 842	1,6	2 072	2 138	1,6	100,0	100,0
Cadres ¹	5 501	5 721	2,5	4 109	4 276	2,5	18,3	18,4
Prof. interm.	2 753	2 831	1,3	2 065	2 123	1,3	22,6	22,5
Employés	1 849	1 888	0,6	1 416	1 444	0,5	11,2	11,2
Ouvriers	1 930	1 975	0,8	1 457	1 495	1,1	47,9	48,0
Femmes	2 248	2 323	1,8	1 684	1 736	1,6	100,0	100,0
Cadres ¹	4 279	4 438	2,2	3 159	3 268	1,9	12,7	12,9
Prof. interm.	2 434	2 504	1,3	1 816	1 862	1,1	28,2	28,5
Employés	1 763	1 808	1,0	1 335	1 366	0,8	44,5	44,0
Ouvriers	1 599	1 640	1,1	1 211	1 239	0,8	14,6	14,6
Smic (151,67h)	1 236	1 267	1,0	970	995	1,1	-	-
SALAIRES HORAIRES (et effectifs en nombre d'heures travaillées)								
Salariés à temps complet								
Hommes	17,83	18,38	1,6	13,41	13,82	1,6	65,8	65,5
Femmes	14,86	15,35	1,8	11,13	11,47	1,6	34,2	34,5
Ensemble	16,81	17,34	1,6	12,63	13,01	1,5	100,0	100,0
Cadres ¹	33,01	34,24	2,2	24,59	25,51	2,2	16,7	16,8
Prof. interm.	17,07	17,53	1,2	12,78	13,10	1,0	24,6	24,7
Employés	11,80	12,08	0,9	8,96	9,16	0,7	22,6	22,5
Ouvriers	12,33	12,62	0,8	9,31	9,55	1,0	36,1	36,0
Salariés à temps non complet								
Hommes	16,18	16,87	2,7	12,32	12,82	2,5	30,5	30,6
Femmes	13,01	13,45	1,8	9,78	10,09	1,7	69,5	69,4
Ensemble	13,98	14,50	2,2	10,55	10,93	2,0	100,0	100,0
Cadres ¹	28,89	29,87	1,8	21,46	22,21	1,9	11,4	12,2
Prof. interm.	16,33	16,74	1,0	12,31	12,60	0,8	18,6	18,5
Employés	10,77	11,03	0,9	8,16	8,34	0,7	48,0	47,9
Ouvriers	11,16	11,35	0,2	8,56	8,67	-0,2	22,0	21,4
Smic	8,15	8,36	1,1	6,40	6,56	1,0		

1. Y compris chefs d'entreprise salariés.

Champ : salariés du secteur privé et semi-public, France.

Source : Insee, DADS

Tableau 3

Evolutions annuelles, en euros constants, des salaires moyens
pour les emplois à temps complet

en %

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Salaire brut moyen¹	0,2	1,7	0,6	0,9	0,9	0,3	0,6	1,1	1,0	1,6
Salaire moyen net de prélèvements	0,9	1,6	0,5	1,1	0,6	-0,3	0,0	1,0	0,4	1,5
Salaire brut moyen à structure constante	-0,1	1,1	0,0	0,2	0,1	-0,2	0,2	0,9	0,8	1,3
Salaire moyen net de prélèvements à structure constante	0,6	1,0	-0,1	0,4	-0,2	-0,8	-0,4	0,8	0,2	1,2
Incidence des effets de structure sur le salaire net	0,3	0,6	0,6	0,7	0,8	0,5	0,4	0,2	0,2	0,3
<i>Pour mémoire : indice des prix à la consommation</i>	<i>0,7</i>	<i>0,5</i>	<i>1,7</i>	<i>1,7</i>	<i>1,9</i>	<i>2,1</i>	<i>2,1</i>	<i>1,8</i>	<i>1,6</i>	<i>1,5</i>

1. Les variations des rémunérations non soumises à cotisations sociales (participation, intéressement) sont prises en compte dans les évolutions du salaire brut moyen seulement à partir de l'évolution 2001/2002.

Champ : salariés à temps complet du secteur privé et semi-public, France.

Source : Insee, DADS

Tableau 4

Distribution des salaires mensuels nets de tous prélèvements
En euros courants

Déciles	Ensemble		Hommes		Femmes	
	2006	2007	2006	2007	2006	2007
D1	1 059	1 083	1 097	1 123	1 004	1 029
D2	1 184	1 215	1 231	1 263	1 118	1 148
D3	1 296	1 330	1 351	1 387	1 210	1 243
D4	1 415	1 453	1 478	1 517	1 310	1 346
Médiane	1 554	1 594	1 622	1 665	1 428	1 467
D6	1 725	1 769	1 806	1 852	1 578	1 620
D7	1 955	2 004	2 064	2 115	1 775	1 823
D8	2 321	2 382	2 483	2 548	2 049	2 107
D9	3 079	3 163	3 356	3 448	2 582	2 662
D9/D1	2,9	2,9	3,1	3,1	2,6	2,6

Lecture : En 2007, 10% des salariés à temps complet du secteur privé et semi-public gagnent un salaire mensuel net inférieur à 1 083 euros, 20% un salaire inférieur à 1 215 euros.

Champ : salariés à temps complet du secteur privé et semi-public, France.

Source : Insee, DADS