

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

*Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.*

**Exercice n° 1**

On se propose de calculer les intégrales de Wallis définies pour  $n$  appartenant à  $N$ , ensemble des entiers naturels, par:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \quad J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt \quad K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \quad L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt$$

**Question 1 :** Calcul de  $I_n$

- Calculer  $I_0$  et  $I_1$  puis trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$
- Donner  $I_n$  en fonction de  $n$

**Question 2 :** Calcul de  $J_n$

- Trouver une relation entre  $J_n$  et  $I_n$
- Donner  $J_n$  en fonction de  $n$

**Question 3 :** Calcul de  $K_n$

- Trouver une relation entre  $K_n$  et  $I_{2n+1}$
- Donner  $K_n$  en fonction de  $n$

**Question 4 :** Calcul de  $L_n$

- Trouver une relation entre  $L_n$  et  $K_n$
- Donner  $L_n$  en fonction de  $n$

## Exercice n° 2

Trois personnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  jouent au ballon.

Si  $A$  possède le ballon, il le passe à  $B$  avec la probabilité de  $1/3$  et à  $C$  avec la probabilité de  $2/3$ .

Si  $B$  possède le ballon, il le passe à  $A$  avec la probabilité de  $1/3$  et à  $C$  avec la probabilité de  $2/3$ .

Si  $C$  possède le ballon, il le passe à  $A$  avec la probabilité de  $1/3$  et à  $B$  avec la probabilité de  $2/3$ .

On note  $A_n$  (respectivement  $B_n, C_n$ ) l'événement «  $A$  (resp.  $B, C$ ) reçoit le ballon après le  $n^{\text{ième}}$

échange » et  $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix}$

On suppose qu'à l'instant initial,  $A$  possède le ballon. On a donc  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Question 1 :** Déterminer la matrice  $M$  telle que  $X_{n+1} = MX_n$  et calculer ses vecteurs propres.

**Question 2 :** Calculer la probabilité que chacun des joueurs possède le ballon après le  $5^{\text{ième}}$  échange.

**Question 3 :** Montrer que la suite  $(M_n)$ , définie par  $M_n = M^n$ , converge vers une certaine matrice  $M_\infty$  que l'on calculera. Interpréter  $M_\infty X_0$ .

## Exercice n° 3

Une personne prend le bus pour se rendre à son travail. L'heure de son arrivée à la station de départ est uniformément répartie entre 7 et 8 heures du matin. Pour se rendre à son travail, il a le choix entre la ligne n°4 ou la ligne n°7 dont les heures de passage sont :

n°4 : 7h00 ; 7h15 ; 7h30 ; 7h45 ; 8h00      n°7 : 7h05 ; 7h20 ; 7h35 ; 7h50

Le voyageur monte dans le premier bus (n°4 ou n°7) qui se présente.

**Question 1** : On désigne par  $X$  l'attente en minutes du voyageur.

- a) Déterminer la fonction de densité  $f$  et la fonction de répartition  $F$  de  $X$  et les représenter graphiquement (conseil : pour calculer  $f$ , vous pouvez découper la tranche horaire 7h – 8 h en 12 tranches de 5 minutes).
- b) Calculer la durée moyenne d'attente du voyageur.

**Question 2** : La durée du voyage est de 15 minutes avec la ligne n°4 et 20 minutes avec la ligne n°7. Le voyageur met 10 minutes pour se rendre de son domicile à la station de départ, puis un temps négligeable pour se rendre de la station d'arrivée à son lieu de travail. On désigne par  $Y$  le temps total mis par le voyageur entre son domicile et son lieu de travail.

Calculer le temps moyen mis par le voyageur pour se rendre de son domicile à son lieu de travail.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Dans son livre *Race et histoire*, Lévi-Strauss constate que "l'humanité est constamment aux prises avec deux processus contradictoires dont l'un tend à instaurer l'unification [des cultures], tandis que l'autre vise à maintenir ou à rétablir la diversification", et il affirme pour sa part "la nécessité de préserver la diversité des cultures dans un monde menacé par la monotonie et l'uniformité". Que pensez-vous, à l'heure de la "mondialisation", de cette affirmation ?

**Sujet n° 2**

Quels sont les atouts dont dispose l'Afrique pour son développement économique, et quels sont les obstacles qui au contraire freinent ce développement ?

**Sujet n° 3**

Le poète romantique Vigny opposait, à la liberté de la nature, la servitude que l'homme s'est artificiellement imposée dans les villes, ces "cités serviles" où règne "l'esclavage humain". Que pensez-vous de cette vision de la ville comme lieu de contrainte et de servitude ?

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ÉCONOMIE**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

Les enjeux du libre-échange pour les pays en développement.

**Sujet n° 2**

**I - Exercice de microéconomie (8 points)**

Soit le consommateur  $A$  dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1^{1/2} q_2^{1/4}.$$

- 1) Donnez une autre fonction d'utilité représentant les préférences de ce consommateur  $A$ .
- 2) Ses préférences sont-elles convexes ? Interprétez cette propriété. En quoi est-elle déterminante ?
- 3) Donnez le taux marginal de substitution de  $A$  au panier de dotation initiale  $Q_A^0 = (1, 4)$  Interprétez.
- 4) Soit un vecteur de prix quelconque  $(p_1, p_2)$ . Calculez le choix optimal de concurrence parfaite de  $A$ . Représentez-le graphiquement. Interprétez.
- 5) Soit un second consommateur  $B$  avec les mêmes préférences que  $A$  mais avec des dotations initiales  $Q_B^0 = (3, 3)$ . Donnez son choix de concurrence parfaite.
- 6) Calculez la demande nette de bien 1.
- 7) Qu'est-ce que la loi de Walras ? En déduire la demande nette de bien 2.
- 8) Donnez un vecteur de prix d'équilibre. Quelle propriété d'efficacité possède cet équilibre ?

## II - Exercice de macroéconomie (6 points)

Soit un gouvernement soucieux de réduire le chômage et les inégalités sans creuser son déficit budgétaire. Il s'agit de construire un modèle macro-économique de type IS-LM qui distingue les salariés et les capitalistes.

Soient  $T_1$ , les impôts payés par les salariés et  $T_2$ , ceux payés par les capitalistes.

Soient  $C_1$  la consommation des salariés et  $C_2$  celle des capitalistes.

Soient  $wN$  la masse salariale et  $\Pi$  le profit total de la période.

Les fonctions de consommation des salariés et des capitalistes sont alors données par :

$$C_1 = 200 + 0.8 (wN - T_1)$$

$$C_2 = 400 + 0.6 (\Pi - T_2)$$

Soit  $i$  le taux d'intérêt. La demande de monnaie est donnée par :

$$\Delta M_d = 0.02Y + 15 - i$$

L'investissement des entreprises  $I$  est financé par émissions de titres et est donné par :

$$I = 1100 - 60i$$

La dépense publique est notée  $G$  et l'offre de monnaie  $\Delta M_s$ .

- 1) Comment expliquez vous les différences de fonction de consommation ?
- 2) Sachant que les parts respectives des salaires et des profits dans le PIB sont égales ( $Y/2$  chacune), donnez la fonction de consommation globale en fonction de  $Y$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ .
- 3) Donnez l'équilibre sur le marché des biens.
- 4) Donnez l'équilibre sur le marché de la monnaie.
- 5) Sachant que  $G = 1036$ ,  $\Delta M_s = 100$  et que  $T_1 = T_2 = 240$ , donnez le revenu d'équilibre global.
- 6) Donnez le nouveau revenu d'équilibre après une politique fiscale de redistribution telle que  $T_1 = 100$  et  $T_2 = 380$ . Expliquez les mécanismes à l'œuvre ainsi que le résultat obtenu.

## III - Questions (6 points)

- 1) Les deux théorèmes de l'économie du Bien Etre (1 point).
- 2) Après avoir rappelé la définition d'une externalité, expliquez quel(s) problème(s) pose sa présence dans un cadre standard de concurrence parfaite. Présentez succinctement les principaux instruments d'internalisation (3 points).
- 3) Présentation et enjeu de la théorie du revenu permanent (2 points).

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE**

**(Durée de l'épreuve : 2 heures)**

**Exercice n° 1**

On étudie la répartition des salaires mensuels d'une entreprise de  $N$  salariés. Pour chaque tranche de 1.000 francs, on connaît le nombre d'agents dont le salaire est dans cette tranche. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous (tableau 1).

Tableau 1

Répartition selon le salaire mensuel (en francs)

$i$	Tranche	$n_i$
1	[0 ; 1000[	15
2	[1000 ; 2000[	27
3	[2000 ; 3000[	85
4	[3000 ; 4000[	198
5	[4000 ; 5000[	255
6	[5000 ; 6000[	219
7	[6000 ; 7000[	65
8	[7000 ; 8000[	73
9	[8000 ; 9000[	38
10	[9000 ; 10000[	25

**Question 1 :** Calculer la moyenne et l'écart type du salaire mensuel.

**Question 2 :** Représenter graphiquement la fonction de répartition du salaire mensuel.

**Question 3 :** On note  $N_j$  la somme cumulée définie par  $N_j = \sum_{i=1}^j n_i$  et  $N'_j = \frac{N_j}{N_{10}}$ . On note

également  $y_i = n_i x_i$ , où  $x_i$  est le centre de classe et  $Y_j$  la somme cumulée définie par  $Y_j = \sum_{i=1}^j y_i$ . On définit enfin  $Y'_j = \frac{Y_j}{Y_{10}}$ . Par convention, on note  $N_0 = N'_0 = Y_0 = Y'_0 = 0$ .

Soit  $M_j$  le point du plan cartésien de coordonnées  $(N'_j, Y'_j)$ , avec  $M_0$  de coordonnées  $(0,0)$ . Donner dans un tableau, les coordonnées des points  $M_j$  avec quatre décimales.

**Question 4 :** On appelle ligne de concentration la ligne obtenue en joignant les points  $M_j$ . Soient  $O$  le point de coordonnées  $(0,0)$ ,  $A(1,0)$  et  $B(1,1)$ . Tracer sur une même figure la ligne de concentration, les points  $O$ ,  $A$  et  $B$  et la première bissectrice  $OB$ . On prendra comme unité  $OA = AB = 10$  cm.

**Question 5 :** Commenter le graphique précédent.

**Question 6 :** On veut calculer l'indicateur statistique défini comme le rapport de l'aire comprise entre le segment  $OB$  et la ligne de concentration et l'aire du triangle  $OAB$ . Connaissez-vous cet indicateur ?

**Question 7 :** Donner la signification de cet indicateur, notamment lorsque celui-ci est nul.

**Question 8 :** En utilisant la courbe de la question 4, indiquer quel pourcentage de la masse salariale revient aux 20% des salariés les moins rémunérés de l'entreprise, aux 50% des salariés les moins rémunérés, aux 25% des salariés les mieux rémunérés.

## Exercice n° 2

On étudie l'évolution des salaires en France en 2007 dans les entreprises.

**Question 1 :** A partir d'éléments donnés dans le tableau 2 ci-après, calculer un indice d'évolution des salaires bruts en euros courants pour une population que vous précisez.

**Question 2 :** Commenter chacun des trois tableaux ci-après (tableaux 2, 3 et 4).

Tableau 2

Salaires mensuels et horaires moyens et répartition des effectifs selon le sexe et la catégorie socio-professionnelle

	Salaires bruts			Salaires nets de tous prélèvements			Répartition des effectifs (%)	
	Euros courants		Euros constants	Euros courants		Euros constants	2006	2007
	2006	2007	Evolution (%)	2006	2007	Evolution (%)		
<b>SALAIRES MENSUELS DES POSTES A TEMPS COMPLET (et effectifs en années-travail)</b>								
<b>Ensemble</b>	<b>2 580</b>	<b>2 661</b>	<b>1,6</b>	<b>1 938</b>	<b>1 997</b>	<b>1,5</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>
Cadres <sup>1</sup>	5 170	5 366	2,3	3 852	3 997	2,3	16,3	16,4
Prof. interm.	2 625	2 698	1,2	1 965	2 017	1,1	24,5	24,6
Employés	1 791	1 833	0,9	1 361	1 391	0,7	22,8	22,8
Ouvriers	1 883	1 928	0,9	1 422	1 459	1,0	36,3	36,2
<b>Hommes</b>	<b>2 755</b>	<b>2 842</b>	<b>1,6</b>	<b>2 072</b>	<b>2 138</b>	<b>1,6</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>
Cadres <sup>1</sup>	5 501	5 721	2,5	4 109	4 276	2,5	18,3	18,4
Prof. interm.	2 753	2 831	1,3	2 065	2 123	1,3	22,6	22,5
Employés	1 849	1 888	0,6	1 416	1 444	0,5	11,2	11,2
Ouvriers	1 930	1 975	0,8	1 457	1 495	1,1	47,9	48,0
<b>Femmes</b>	<b>2 248</b>	<b>2 323</b>	<b>1,8</b>	<b>1 684</b>	<b>1 736</b>	<b>1,6</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>
Cadres <sup>1</sup>	4 279	4 438	2,2	3 159	3 268	1,9	12,7	12,9
Prof. interm.	2 434	2 504	1,3	1 816	1 862	1,1	28,2	28,5
Employés	1 763	1 808	1,0	1 335	1 366	0,8	44,5	44,0
Ouvriers	1 599	1 640	1,1	1 211	1 239	0,8	14,6	14,6
<b>Smic (151,67h)</b>	<b>1 236</b>	<b>1 267</b>	<b>1,0</b>	<b>970</b>	<b>995</b>	<b>1,1</b>	-	-
<b>SALAIRES HORAIRES (et effectifs en nombre d'heures travaillées)</b>								
<b>Salariés à temps complet</b>								
Hommes	17,83	18,38	1,6	13,41	13,82	1,6	65,8	65,5
Femmes	14,86	15,35	1,8	11,13	11,47	1,6	34,2	34,5
<b>Ensemble</b>	<b>16,81</b>	<b>17,34</b>	<b>1,6</b>	<b>12,63</b>	<b>13,01</b>	<b>1,5</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>
Cadres <sup>1</sup>	33,01	34,24	2,2	24,59	25,51	2,2	16,7	16,8
Prof. interm.	17,07	17,53	1,2	12,78	13,10	1,0	24,6	24,7
Employés	11,80	12,08	0,9	8,96	9,16	0,7	22,6	22,5
Ouvriers	12,33	12,62	0,8	9,31	9,55	1,0	36,1	36,0
<b>Salariés à temps non complet</b>								
Hommes	16,18	16,87	2,7	12,32	12,82	2,5	30,5	30,6
Femmes	13,01	13,45	1,8	9,78	10,09	1,7	69,5	69,4
<b>Ensemble</b>	<b>13,98</b>	<b>14,50</b>	<b>2,2</b>	<b>10,55</b>	<b>10,93</b>	<b>2,0</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>
Cadres <sup>1</sup>	28,89	29,87	1,8	21,46	22,21	1,9	11,4	12,2
Prof. interm.	16,33	16,74	1,0	12,31	12,60	0,8	18,6	18,5
Employés	10,77	11,03	0,9	8,16	8,34	0,7	48,0	47,9
Ouvriers	11,16	11,35	0,2	8,56	8,67	-0,2	22,0	21,4
<b>Smic</b>	<b>8,15</b>	<b>8,36</b>	<b>1,1</b>	<b>6,40</b>	<b>6,56</b>	<b>1,0</b>		

1. Y compris chefs d'entreprise salariés.

Champ : salariés du secteur privé et semi-public, France.

Source : Insee, DADS

Tableau 3

Evolutions annuelles, en euros constants, des salaires moyens  
pour les emplois à temps complet

en %

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
<b>Salaire brut moyen<sup>1</sup></b>	<b>0,2</b>	<b>1,7</b>	<b>0,6</b>	<b>0,9</b>	<b>0,9</b>	<b>0,3</b>	<b>0,6</b>	<b>1,1</b>	<b>1,0</b>	<b>1,6</b>
<b>Salaire moyen net de prélèvements</b>	<b>0,9</b>	<b>1,6</b>	<b>0,5</b>	<b>1,1</b>	<b>0,6</b>	<b>-0,3</b>	<b>0,0</b>	<b>1,0</b>	<b>0,4</b>	<b>1,5</b>
Salaire brut moyen à structure constante	-0,1	1,1	0,0	0,2	0,1	-0,2	0,2	0,9	0,8	1,3
Salaire moyen net de prélèvements à structure constante	0,6	1,0	-0,1	0,4	-0,2	-0,8	-0,4	0,8	0,2	1,2
Incidence des effets de structure sur le salaire net	0,3	0,6	0,6	0,7	0,8	0,5	0,4	0,2	0,2	0,3
<i>Pour mémoire : indice des prix à la consommation</i>	<i>0,7</i>	<i>0,5</i>	<i>1,7</i>	<i>1,7</i>	<i>1,9</i>	<i>2,1</i>	<i>2,1</i>	<i>1,8</i>	<i>1,6</i>	<i>1,5</i>

1. Les variations des rémunérations non soumises à cotisations sociales (participation, intéressement) sont prises en compte dans les évolutions du salaire brut moyen seulement à partir de l'évolution 2001/2002.

Champ : salariés à temps complet du secteur privé et semi-public, France.

Source : Insee, DADS

Tableau 4

Distribution des salaires mensuels nets de tous prélèvements  
En euros courants

Déciles	Ensemble		Hommes		Femmes	
	2006	2007	2006	2007	2006	2007
D1	1 059	1 083	1 097	1 123	1 004	1 029
D2	1 184	1 215	1 231	1 263	1 118	1 148
D3	1 296	1 330	1 351	1 387	1 210	1 243
D4	1 415	1 453	1 478	1 517	1 310	1 346
<b>Médiane</b>	<b>1 554</b>	<b>1 594</b>	<b>1 622</b>	<b>1 665</b>	<b>1 428</b>	<b>1 467</b>
D6	1 725	1 769	1 806	1 852	1 578	1 620
D7	1 955	2 004	2 064	2 115	1 775	1 823
D8	2 321	2 382	2 483	2 548	2 049	2 107
D9	3 079	3 163	3 356	3 448	2 582	2 662
<b>D9/D1</b>	<b>2,9</b>	<b>2,9</b>	<b>3,1</b>	<b>3,1</b>	<b>2,6</b>	<b>2,6</b>

Lecture : En 2007, 10% des salariés à temps complet du secteur privé et semi-public gagnent un salaire mensuel net inférieur à 1 083 euros, 20% un salaire inférieur à 1 215 euros.

Champ : salariés à temps complet du secteur privé et semi-public, France.

Source : Insee, DADS