AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Question 1 :

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}, v_1 = \frac{v_0 + u_1}{2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}, v_2 = \frac{v_1 + u_2}{2} = \frac{59}{16}$$

Question 2 :

a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$$= \frac{v_n + u_{n+1}}{2} - u_{n+1}$$

$$= \frac{v_n - u_{n+1}}{2}$$

$$= \frac{v_n - \frac{u_n + v_n}{2}}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n$$

Donc :

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$.

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 1$ donc pour tout entier naturel *n*, $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit :

$$\boxed{w_n = \frac{1}{4^n}}.$$

La suite (w_n) converge vers 0 car c'est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre – 1 et 1 :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = 0}$$

<u>Question 3</u> :

Pour tout entier *n*, on a $w_n = \frac{1}{4^n}$ donc pour tout entier *n*,

$$w_n = v_n - u_n > 0 .$$

Pour tout entier *n*, $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n$ donc pour tout entier *n*,

$u_{n+1} > u_n$ c'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier *n*,

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4} w_n$ donc pour tout entier *n*, $v_{n+1} < v_n$ c'est-à-dire la suite (v_n) est décroissante.

L'une des deux suites est croissante, l'autre est décroissante et la suite différence des deux suites a pour limite 0 donc :

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes et ont la même limite.

<u>Question 4</u> :

a. Pour tout entier *n*, $t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n + u_{n+1}}{3} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$

La suite (t_n) est constante et pour tout entier *n* : $\boxed{t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{11}{3}}$

b. La suite (t_n) étant constante elle est convergente et a pour limite $t_0 = \frac{11}{3}$.

Mais pour tout entier n, on a $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$. Soit ℓ la limite commune à (u_n) et (v_n).

La suite $\left(\dfrac{u_n + 2v_n}{3}\right)$ est convergente et a pour limite $\dfrac{\ell + 2\ell}{3}$ donc $\dfrac{\ell + 2\ell}{3} = \dfrac{11}{3}$ donc : $\boxed{\ell = \dfrac{11}{3}}$

Exercice 2

<u>Question 1</u> : On pose $\varphi : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc de classe C^1. f est donc de classe C^1 sur R avec :

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$$

Donc avec le changement de variable défini par $u = xt$, on obtient :

$$f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du = -2g^{'}(x)g(x) .$$

<u>Question 2</u> : On déduit de la question précédente que $f + g^2$ est constante donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x)^2 = f(0) + g(0)^2 = f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ car } f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = Arctg\, 1 - Arctg\, 0$$

<u>Question 3</u> : On a $g(x)^2 = \dfrac{\pi}{4} - f(x)$ **(1)**.

Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\forall t \in [1,+\infty[,\quad e^{-t^2} \le e^{-t}$, elle est intégrable sur cet intervalle et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

<u>Question 4</u> : En remarquant que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $0 \le \varphi(x,t) \le \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, on obtient $0 \le f(x) \le e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

<u>Question 5</u> : En conséquence la relation **(1)** donne :

$\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} g^2(x) = \frac{\pi}{4}$ et en tenant compte de la positivité de la fonction exponentielle, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3

Question 1 :

a. Si le dé indique 1, on tire une boule dans une urne contenant 4 voyelles et 6 consonnes et on gagne si on tire une voyelle. On obtient :

$$\boxed{p_{D1}(G) = \frac{2}{5}}$$

Si lé dé indique 2, on tire deux boules simultanément et on gagne si on tire deux voyelles. On obtient :

$$\boxed{p_{D2}(G) = \frac{2}{15}}$$

Si le dé indique 3, on tire trois boules simultanément et on gagne si on tire trois voyelles. On obtient :

$$\boxed{p_{D3}(G) = \frac{1}{30}}$$

b. On utilise la formule des probabilités totales, on obtient :

$p(G) = p_{D1}(G)p(D_1)+p_{D2}(G)p(D_2)+p_{D3}(G)p(D_3) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{30}\times\frac{3}{6}$ et donc : $\boxed{p(G) = \frac{23}{180}}$

Question 2 : Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$p_G(D_1) = \dfrac{p(G\cap D_1)}{p(G)} = \dfrac{p_{D1}(G)\times p(D_1)}{p(G)}$, soit $\boxed{p_G(D_1) = \frac{12}{23}}$

Question 3 :

a. On fait une succession de six épreuves indépendantes pour lesquelles la probabilité de succès est $p = \frac{23}{180}$. On sait que le nombre X de succès suit une loi binomiale de paramètre (6 ; p).

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est donc :

$$\boxed{p(X = 2) = C_2^6\, p^2\,(1-p)^4 = 0{,}14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

b. La probabilité de gagner au moins une partie est : $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{157}{180}\right)^n$

On veut $p(X \geq 1) \geq 0{,}9$ soit $\left(\frac{157}{180}\right)^n \leq 0{,}1$.

Et on obtient $\boxed{n \text{ minimal égal à } 17}$

Problème

Partie I

Question 1 : soit *f* l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de R^n composée des vecteurs $(e_1,\ldots,e_n)$:

$$\forall j \in [2,n], \quad f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots\ldots,e_{j-1}), \quad f(e_1)=0$$

On en déduit, pour $3 \leq j \leq n$:

$$f^2(e_j) \in \mathrm{Vect}(f(e_1),\ldots,f(e_{j-1})) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\ldots\ldots,e_{j-2})$$

$$\forall j \in [3,n],\ f^2(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{j-2}),\ et\ f^2(e_1)=f^2(e_2)=0$$

$$\forall j \in [k+1,n],\ f^k(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{j-k}),\ f^k(e_1)=f^k(e_2)=\ldots=f^k(e_k)=0$$

D'où pour $k=n,\ f^n(e_1)=f^n(e_2)=\ldots.=f^n(e_n)=0,$ c'est-à-dire $f^n=0$ et donc $A^n=0.$

Question 2 : on a $M=I_3+D$ où $D=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

D est nilpotente d'après la question 1 et on a $D^3=0$, la formule du binôme donne :

$$M^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k D^k = I_3 + nD + \frac{n(n-1)}{2}D^2$$

d'où $M^n=\begin{pmatrix}1 & 2n & 2n^2+n\\ 0 & 1 & 2n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Partie II

Question 1 : Le système (*S*) s'écrit : *X' = BX* avec $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

Question 2 : $\det(B-\lambda I_3)=(1-\lambda)^3$. 1 est donc valeur propre triple, *B* n'est pas diagonalisable, (sinon $B=I_3$), par contre elle est trigonalisable.

<u>Question 3</u> : Il suffit de calculer $(B-\lambda I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $(B-\lambda I_3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Nous trouvons dans les deux cas le vecteur nul.

<u>Question 4</u> : D'après la question 2, la dimension de *Ker*$(u-Id)$ est inférieure ou égale à 2 (sinon, B serait diagonalisable). Les deux vecteurs de la question 3 appartiennent au sous-espace vectoriel *Ker*$(u-Id)$ et ne sont pas liés, ils forment donc une base de *Ker*$(u-Id)$. La dimension de *Ker*$(u-Id)$ est donc égale à 2. En conséquence, la dimension de *Im*$(u-Id)$ est égale à 1. Le rang de $(u-Id)$ est donc de 1.

<u>Question 5</u> : Evident. La matrice B-I_3 est donc nilpotente.

<u>Question 6</u> : Il suffit de calculer $(B-\lambda I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et de montrer que le résultat n'est pas le vecteur nul.

<u>Question 7</u> : Evident en utilisant la question précédente et le fait que $(e_1^{'},e_2^{'})$ forme une base de *Ker*$(u-Id)$.

<u>Question 8</u> : La matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1,e_1^{'},e_2^{'})$ est $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

En calculant $P^{-1}BP$, on obtient la matrice désirée *T* qui est égale à $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

<u>Question 9</u> : $X^{'}=BX \Rightarrow PX_1^{'}=BPX_1$ en utilisant le changement de variable. En utilisant le fait que P est inversible, on prouve le résultat demandé.

<u>Question 10</u> : En développant, on a :

$$(S_1)\quad:\quad\begin{cases} x_1^{'}=x_1 & (1)\\ y_1^{'}=2x_1+y_1 & (2)\\ z_1^{'}=-x_1+z_1 & (3)\end{cases}$$

La ligne (1) donne $x_1 = ae^t$. On change dans (2) qui devient $y_1^{'} = y_1 + 2ae^t$ ce qui donne $y_1 = (2at + b)e^t$. De même, avec (3), on trouve $z_1 = (-at + c)e^t$

<u>Question 11</u> :

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ (2at + b)e^t \\ (-at + c)e^t \end{pmatrix}$

$$x = (2at + b + a)e^t \quad , \quad y = (-at + c)e^t \quad , \quad z = (at + b + c)e^t \ .$$

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Partie 1

Question 1 : $\frac{16.610.000}{500.000.000} = 3{,}32\ \%$

Question 2 :

- L'ensemble 1 est constitué des sociétés D, O, E, K, L, C, V, P, J.

L'évolution de la capitalisation boursière de cet ensemble est de 4,9% alors qu'elle est de 3,3% pour l'ensemble des 26 sociétés. L'entreprise J a procédé a une mise sur le marché d'un plus grand nombre d'actions (augmentation de capital sans doute).

- L'ensemble 2 est constitué de la société X.

Le cours de cette société est passé de 33 à 36 euros mais cette société a du procéder a un rachat d'actions (- 1 000) qui fait que la société B est passée devant elle.

- L'ensemble 3 est constitué de la société B.

Le cours de l'action de cette société a augmenté de façon importante de 32 à 42 euros.

- L'ensemble 4 est constitué des autres sociétés. RAS

L'indicateur « contribution à l'évolution » indique, à l'intérieur des 9 sociétés présentes dans le LID 2007 et qui devraient être présentes dans le LID 2008, quelles sont leurs contributions à l'évolution de 4,9% constatée entre 2007 et 2008. Par exemple la société J est celle qui contribue le plus à l'augmentation des 4,9% alors que la société L contribue négativement. C'est ainsi que la somme des contributions fait 100 % par définition.

Question 3 :

L'entreprise J a procédé à une mise sur le marché de 13 000 actions supplémentaires. Bien que le marché ait réagi par une baisse des prix de l'action, sa capitalisation boursière a augmenté de 24,2%.

Partie 2

Question 1 : les 3 entrantes sont : R, T, X

Les 3 sortantes sont : B, P, V

Question 2 :

Les résultats figurant dans les deux colonnes ci-dessous sont acceptés. La première est établie par référence au champ des 10 valeurs qui composeraient le LID au 1er janvier 2009 et la seconde par référence à l'ensemble des valeurs boursières.

Société	Contrib1	Contrib2
D	6,13%	0,17%
E	7,43%	0,21%
O	15,64%	0,44%
J	9,43%	0,27%
K	18,16%	0,51%
C	16,58%	0,47%
L	14,15%	0,40%
X	6,42%	0,18%
R	2,62%	0,07%
T	3,44%	0,10%

Commentaires : Parmi les 10 sociétés composant le LID, les 4 sociétés qui contribuent le plus à l'évolution de la capitalisation boursière sont, dans l'ordre, K puis C puis O, puis L. La société K a notamment vu son cours chuter de 27 euros à 16 euros.

Question 3 : a) $\left(\frac{400.000.000}{550.000.000}\right)^{12/10} \times 550.000.000 = 375.318.050$

b) Pour chacune des 10 valeurs du tableau 4, il faut estimer la capitalisation boursière au 1er janvier 2009 de la même façon que ce qui a été fait pour l'ensemble à la question 3a). On somme ensuite les 10 chiffres obtenus et on termine en faisant le rapport entre cette somme et le résultat de la question 3a). Pour information, on obtient 3,06 %. Or, il était de 3,32 % au 1er janvier 2007 (question 1 – partie 1). Le mouvement baissier constaté au cours de l'année 2008 a été plus important pour ce panel de 10 entreprises que pour l'ensemble des sociétés (1ère explication) ou il y a eu l'introduction d'entreprises nouvelles (ou d'actions nouvelles) depuis le 1er janvier 2007 justifiant que prendre les 10 plus importantes réduit leur poids (2ème explication).

Question 4 : D dont le cours n'a baissé que de 6,67%

E « « « 9,52%

X « « « 15,15%