

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Exercice 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} ; \quad v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

Question 1 : Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .

Question 2 : Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par $w_n = v_n - u_n$.

- Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique et calculer la raison.
- Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .

Question 3 : Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Question 4 : On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

- Démontrer que la suite (t_n) est constante.
- En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 2

Soient f et g deux applications de \mathbb{R} (ensemble des réels) dans \mathbb{R} définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Question 1 : Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.

Question 2 : En déduire que $f + g^2$ est une fonction constante. Calculer cette constante.

Question 3 : Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Question 4 : Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Question 5 : En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Exercice 3

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3. On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes.

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule dans l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie il remet dans l'urne la ou les boule(s) tirée(s).

On définit les événements suivants :

- D_1 : « le dé indique 1 » ;
- D_2 : « le dé indique 2 » ;
- D_3 : « le dé indique 3 » ;
- G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A)$ est différent de 0, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Question 1 :

- a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$ et $p_{D_3}(G)$
- b. Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$

Question 2 : Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

Question 3 : Un joueur fait six parties.

- a. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
- b. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Problème

Une matrice A carrée d'ordre n dans R est nilpotente si et seulement si $A^n=0$

Partie I

Question 1 : Soit M une matrice carrée d'ordre n dans R triangulaire supérieure stricte, c'est-à-dire :

$M = [a_{ij}]$ avec pour $i \geq j$ $a_{ij} = 0$. Montrer que M est nilpotente.

Question 2 : Calculer M^n pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

Il s'agit, dans cette partie, de résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$(S) \begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Question 1 : Ecrire le système (S) sous la forme matricielle : $X' = BX$

Question 2 : La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

Question 3 : Montrer que les vecteurs $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs

propres de B.

Question 4 : Donner le rang de l'endomorphisme $(u - \text{Id})$ où u est l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé à la matrice B et Id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .

Question 5 : Calculer $(B - I_3)^2$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Question 6 : Montrer que e_1 , vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3 , n'appartient pas à $\text{Ker}(u - \text{Id})$.

Question 7 : Montrer que (e_1, e_1', e_2') est une base de \mathbb{R}^3 .

Question 8 : Ecrire la matrice B dans la base (e_1, e_1', e_2') que l'on nommera T.

Question 9 : Démontrer qu'avec le changement défini par $X = PX_1$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_1', e_2') , le système (S) devient $X_1' = TX_1$

Question 10 : Résoudre le système précédent.

Question 11 : En déduire les solutions de (S).

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

En quoi certains pays africains peuvent-ils constituer un effet d'entraînement pour tout le continent africain ? Vous prendrez des exemples comme l'Afrique du Sud ou d'autres pays de votre choix.

Sujet n° 2

Que vous inspire l'élection de Barack Obama comme Président des Etats-Unis ?

Sujet n° 3

Quels sont les aspects de la crise financière et économique mondiale actuelle qui vous ont le plus frappé ?

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les stratégies de croissance des pays émergents.

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

I Le Consommateur et l'offre de travail (6 points)

Soit le consommateur A dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1 q_2$$

- 1) Quelles sont les propriétés usuelles des préférences de cet agent ? Interprétez.
- 2) Donnez le taux marginal de substitution de A . Interprétez.
- 3) Supposons que $R = 12$, où R désigne le revenu de A . Supposons que $p_1 = 1$ et $p_2 = 1$, où p_1, p_2 désignent respectivement les prix des biens 1 et 2. Calculez son choix optimal de concurrence parfaite.
- 4) Supposons désormais que $p_2 = 2$. Calculez le nouveau choix de concurrence parfaite de A , en décomposant l'effet total en effet de substitution et effet de revenu. Représentez-les graphiquement. Les biens sont-ils normaux ?
- 5) Rappelez ce qu'est un bien 'Giffen'.

II Le duopole de Cournot (4 points)

Les deux entreprises A et B forment un duopole de Cournot. Elles font face à une fonction de demande donnée par :

$$D(p) = 25 - \frac{1}{2} p = q_A + q_B$$

où p désigne le prix du bien produit, et q désigne la quantité produite. Elles ont la même fonction de coût donnée par :

$$C(q) = 5q^2$$

- 1) Donnez la fonction de demande inverse.
- 2) Rappelez quelles sont les stratégies des entreprises.
- 3) Donnez leur fonction de profit.
- 4) Calculez $r_A(\cdot)$ et $r_B(\cdot)$, les fonctions de réaction de chacune.
- 5) Calculez l'équilibre.
- 6) Rappelez quelles sont les différences, dans les hypothèses et les résultats, entre duopole de Cournot et duopole de Bertrand.

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (4 points)

Soit la fonction de production agrégée d'une économie :

$$Y_t = K_t^{1/2} N^{1/2}$$

où l'emploi N est donc constant.

- 1) Quelles hypothèses usuelles vérifie cette fonction de production ?
- 2) Donnez la production par tête, notée y_t , en fonction du capital par tête, k_t .
- 3) La production est consommée ou épargnée, avec une propension à épargner constante s . Quelle est, à l'équilibre, la relation entre accumulation du capital et production, sachant que le capital se déprécie à un taux δ ? Interprétez.
- 4) Donnez alors k_{t+1} en fonction de k_t . Quelle est la valeur de ce capital par tête à l'état stationnaire ?

Questions (6 points)

- 1) La demande de monnaie keynésienne (2 points).
- 2) La courbe de Phillips : enjeux et limites (4 points).

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

La bourse de Lidurie a une capitalisation boursière de 500.000.000 euros au 1^{er} janvier 2007. Pour suivre l'évolution de la bourse au jour le jour, un indicateur construit sur la base d'un portefeuille de 10 valeurs a été constitué. Il est composé des 10 plus importantes capitalisations au 1^{er} janvier de chaque année. Il s'appelle LID.

Les 10 sociétés qui composent le LID au 1^{er} janvier 2007 ont une capitalisation de 16.610.000 euros (voir tableau 1).

Tableau 1

Composition du LID au 1^{er} janvier 2007

LID 2007			
Société	Cours 2007	Nb actions 2007	Capitalisation 2007
D	30	65 000	1 950 000
O	50	39 000	1 950 000
E	42	45 000	1 890 000
K	26	70 000	1 820 000
L	44	40 000	1 760 000
C	45	37 000	1 665 000
V	33	47 000	1 551 000
P	3	500 000	1 500 000
J	37	37 000	1 369 000
X	33	35 000	1 155 000
915 000			16 610 000

Partie° 1

Question 1 : Quel poids économique représente le LID par rapport à la capitalisation boursière du pays.

Question 2 : Au 1^{er} janvier 2008, les 10 plus importantes capitalisations boursières ne sont plus représentées par les sociétés présentes dans le LID du 1^{er} janvier 2007. Le tableau 2 donne les informations des 26 sociétés les plus importantes de Lidurie.

Tableau 2

Société	Année 2007 (1 ^{er} janvier)			Année 2008 (1 ^{er} janvier)		
	Cours	Nb actions	Capitalisation	Cours	Nb actions	Capitalisation
A	39	18 000	702 000	42	18 000	756 000
B	32	30 000	960 000	42	30 000	1 260 000
C	45	37 000	1 665 000	49	37 000	1 813 000
D	30	65 000	1 950 000	32	65 000	2 080 000
E	42	45 000	1 890 000	45	45 000	2 025 000
F	15	50 000	750 000	15	50 000	750 000
G	28	34 000	952 000	26	34 000	884 000
H	16	45 000	720 000	16	45 000	720 000
I	17	47 000	799 000	16	47 000	752 000
J	37	37 000	1 369 000	34	50 000	1 700 000
K	26	70 000	1 820 000	27	70 000	1 890 000
L	44	40 000	1 760 000	40	40 000	1 600 000
M	3	325 000	975 000	3	325 000	975 000
N	37	26 000	962 000	34	26 000	884 000
O	50	39 000	1 950 000	54	39 000	2 106 000
P	3	500 000	1 500 000	3	500 000	1 500 000
Q	41	25 000	1 025 000	38	25 000	950 000
R	27	37 000	999 000	27	37 000	999 000
S	14	57 000	798 000	13	57 000	741 000
T	13	73 000	949 000	13	73 000	949 000
U	30	30 000	900 000	32	30 000	960 000
V	33	47 000	1 551 000	32	47 000	1 504 000
W	8	88 000	704 000	9	88 000	792 000
X	33	35 000	1 155 000	36	34 000	1 224 000
Y	18	43 000	774 000	18	43 000	774 000
Z	38	22 000	836 000	38	22 000	836 000
Total		1 865 000	30 415 000		1 877 000	31 424 000

Commenter ce tableau en distinguant 4 ensembles :

- l'ensemble des sociétés présentes dans le LID au 1^{er} janvier 2007 et qui restent dans les 10 plus grandes capitalisations boursières au 1^{er} janvier 2008 ; (ensemble 1)
- les sociétés présentes dans le LID au 1^{er} janvier 2007 et qui ne font plus partie des 10 plus grandes capitalisations boursières au 1^{er} janvier 2008 ; (ensemble 2)
- les sociétés absentes du LID au 1^{er} janvier 2007 et qui font parties des 10 plus importantes capitalisations boursières au 1^{er} janvier 2008 ; (ensemble 3)
- les autres (ensemble 4)

Vous préciserez les noms des sociétés présentes dans chaque ensemble et explicitez l'indicateur « contribution à l'évolution » du tableau 3 qui a été établi pour vous aider. Vous êtes invité à calculer d'autres indicateurs pour étayer vos commentaires.

Tableau 3

Société	Année 2007 (1 ^{er} janvier)			Année 2008 (1 ^{er} janvier)			Evolution 08/07	Contribution Evol
	Cours	Nb actions	Capitalisation	Cours	Nb actions	Capitalisation		
C	45	37 000	1 665 000	49	37 000	1 813 000	1,089	19,4%
D	30	65 000	1 950 000	32	65 000	2 080 000	1,067	17,0%
E	42	45 000	1 890 000	45	45 000	2 025 000	1,071	17,7%
J	37	37 000	1 369 000	34	50 000	1 700 000	1,242	43,4%
K	26	70 000	1 820 000	27	70 000	1 890 000	1,038	9,2%
L	44	40 000	1 760 000	40	40 000	1 600 000	0,909	-21,0%
O	50	39 000	1 950 000	54	39 000	2 106 000	1,080	20,4%
P	3	500 000	1 500 000	3	500 000	1 500 000	1,000	0,0%
V	33	47 000	1 551 000	32	47 000	1 504 000	0,970	-6,2%
Total		880 000	15 455 000		893 000	16 218 000	1,049	

Question 3 : Détailler l'évolution de l'entreprise J entre le 1^{er} janvier 2007 et le 1^{er} janvier 2008.

Partie° 2

Les personnes en charge de la composition du LID au 1^{er} janvier 2009 examinent comment se présentent les choses à partir des cours au 1^{er} novembre 2008. Ils constatent que le LID au 1^{er} janvier 2009 risque de voir 3 sociétés entrantes donc 3 sortantes également.

Le tableau 4 montre ce que pourrait donner le LID au 1^{er} janvier 2009 avec les cours au 1^{er} novembre 2008.

Tableau 4

LID 2009 (prévision)			
Société	Cours au 1/11/2008	Nb actions	Capitalisation au 1/11/2008
D	28	65 000	1 820 000
E	38	45 000	1 710 000
O	37	39 000	1 443 000
J	26	50 000	1 300 000
K	16	70 000	1 120 000
C	30	37 000	1 110 000
L	25	40 000	1 000 000
X	28	34 000	952 000
R	24	37 000	888 000
T	11	73 000	803 000
		490 000	12 146 000

La capitalisation boursière était de 550.000.000 d'euros au 1^{er} janvier 2008 et est de 400.000.000 d'euros au 1^{er} novembre 2008.

Question 1 : Commenter le tableau 4.

Question 2 : Calculer les « contributions à l'évolution » de la capitalisation boursière des 10 valeurs figurant dans le tableau 4. Commenter.

Question 3 : a) Estimer la capitalisation boursière du LID au 1^{er} janvier 2009 si l'évolution constatée entre le 1^{er} janvier 2008 et le 1^{er} novembre 2008 se poursuit.

b) Expliquer la méthode de calcul que vous utiliseriez pour donner le poids économique du LID au 1^{er} janvier 2009 par rapport à la capitalisation boursière du pays.

Question 4 : Quelles valeurs du LID au 1^{er} janvier 2007 un investisseur aurait dû acheter pour optimiser son portefeuille de 3 valeurs ?