AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1) Le module de q est 1/3 et un argument de q est π/4.
2) $z_1 = (e^{i\pi/4})/3$, $z_2 = (e^{i\pi/2})/9$, $z_3 = (e^{i\pi})/27$.
3) Pas de difficulté pour la récurrence. Le module de z_n est égal à $(1/3)^n$ et un argument est nπ/4.
4) a) z_n est réel pour les entiers naturels multiples de 4 (de la forme 4k).
   b) z_n est imaginaire pur pour les entiers naturels pairs non multiples de 4 (de la forme 4k+2).
5) La limite, quand tend vers l'infini, du module de z_n est nulle.

Exercice n° 2

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$$

1) Par intégration par partie, on trouve $I_1 = e^2 - 3$
2) Pas de difficulté en partant du fait que x est compris entre 0 et 2 et en utilisant le fait que la fonction puissance est une fonction croissante.
3) Démonstration par récurrence en utilisant l'intégration par parties.
4) Démonstration par récurrence.
5) a) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à 2/(n+1) qui est inférieur à ½ pour tout pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3, d'où le résultat demandé.
   b) Démonstration par récurrence.
6) La limite de la suite (u_n) es nulle, ainsi que celle de la suite (I_n) en utilisant la question 2.
7) En utilisant la question 4 et la question 6, on montre le résultat demandé.

Exercice n° 3

Les pannes sont indépendantes les unes des autres. La probabilité demandée est égale à :

$$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5) = 10\%$$

Exercice n° 4

Le nombre de réponses justes suit une loi binomiale de paramètre n = 20 et p = 0,2. On cherche P(X > 2) qui est égal à 1 – P(X=0) – P(X=1) – P(X=2). Après calculs, on trouve 0,794.

Exercice n° 5

Soit t un réel, X un vecteur de R^3 de coordonnées (x, y, z), et la fonction f_t de R^3 dans R^3 qui associe à tout vecteur X le vecteur de coordonnées (x, y + tx, z + ty + ½ t^2 x)

1) $F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$

2) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Pas de difficulté et on démontre que $F_t F_{t'} = F_{t+t'}$

4) On montre que $F_t^k = F_{kt}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ te & e & 0 \\ \frac{t^2 e}{2} & te & e \end{pmatrix}$

5) λ = 1 est valeur propre d'ordre 3. Si t est différent de 0, un vecteur propre est (0, 0, 1). Si t = 0, alors F_t = I.

Exercice n° 6

On dérive la formule proposée par rapport à *b* et par rapport à *a* et on fait la différence.
On fixe ensuite *a*=0 et *b*=x pour obtenir l'égalité suivante :

$$x^2 f'(x) - 6xf(x) + 12\int_0^x f(t)dt = 6xf(0) + x^2 f'(0)$$

En posant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, il nous faut résoudre l'équation différentielle

$$x^2 F''(x) - 6xF'(x) + 12F(x) = 6\lambda x + \mu x^2$$

On cherche une fonction particulière de la forme *F*(x) = ax^2 + bx + c. On trouve
$F(x) = \frac{\mu}{2}x^2 + \lambda x$

La solution générale (x^2*F''*- 6x*F'*+12*F* = 0) s'obtient en utilisant la formule d'Euler (*F*(x) = x$^\beta$). On trouve β=3 ou β=4.

On a $F(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \frac{\mu}{2}x^2 + \lambda x$
f(x) est donc un polynôme de degré 3. $f(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + \mu x + \lambda$

Exercice n° 7

Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ définie pour tout x, réel positif

1) t fixé, la fonction (sint) puissance x est décroissante, d'où le résultat.
2) Par intégration par parties, on montre que *g*(x+1)=*g*(x), car (x+1) f (x+1) = x f (x-1)
3) *g(n) = g(1) = π/2.*
4) On montre que $\frac{g(n+1)}{n+1} \le f^2(n) \le \frac{g(n)}{n}$. Donc $f(n)$ a pour équivalent $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

5) On a déjà démontré que *g* est constante sur l'ensemble des entiers naturels à la question 2. Pour le démontrer sur l'ensemble des réels, on commence par montrer que $f^2(n) \leq f(n)f(n-1) = \dfrac{\pi}{2n}$ et que $f^2(n+1) \geq f(n+1)f(n+2) = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ (vraie du fait de la décroissance de la fonction).

En partant du fait que $n \leq x < n+1$, on trouve un encadrement de $f(x)$, donc de $g(x)$.

$$\frac{n\pi}{2\sqrt{n(n+1)}} \leq g(x) \leq \frac{(n+1)\pi}{2\sqrt{n(n-1)}}$$

Ceci permet de trouver la limite de $g(x)$ en $+\infty$ ($\pi/2$ en l'occurrence).

La fonction *g* étant périodique de période finie non nulle et admettant une limite à l'infini, elle est constante sur R.

6) En utilisant de nouveau qu'il existe *n* tel que $n \leq x < n+1$ pour x réel, on a $g(x+1) \leq xf^2(x) < g(x)$. D'où l'équivalent de $f(x)$ est $\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

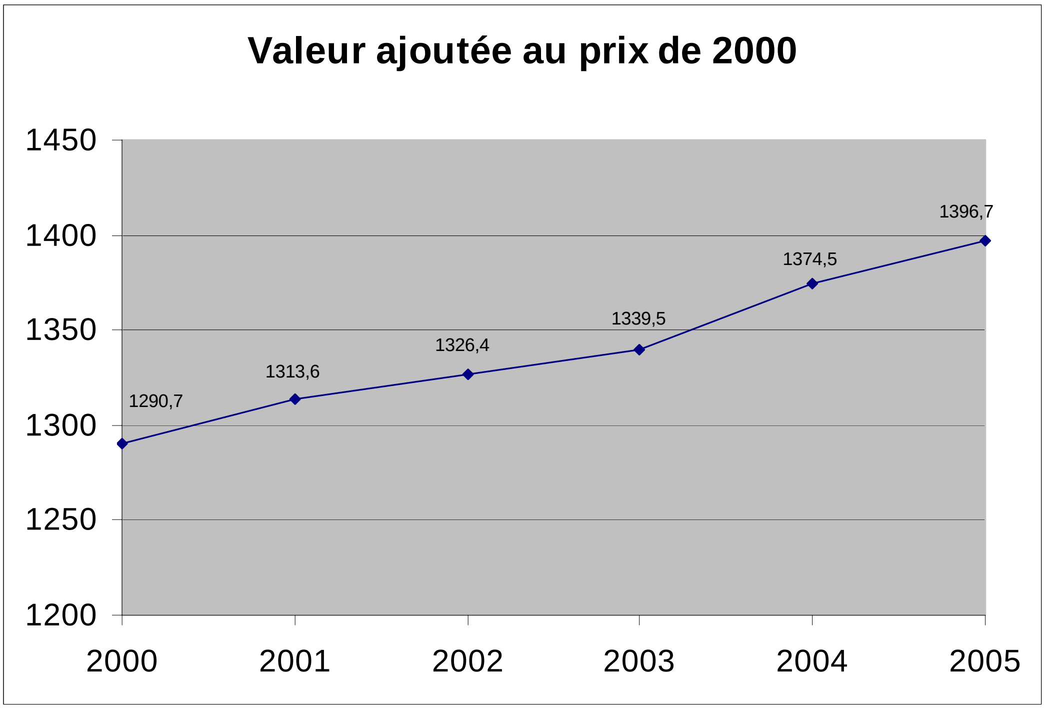
AVRIL 2008

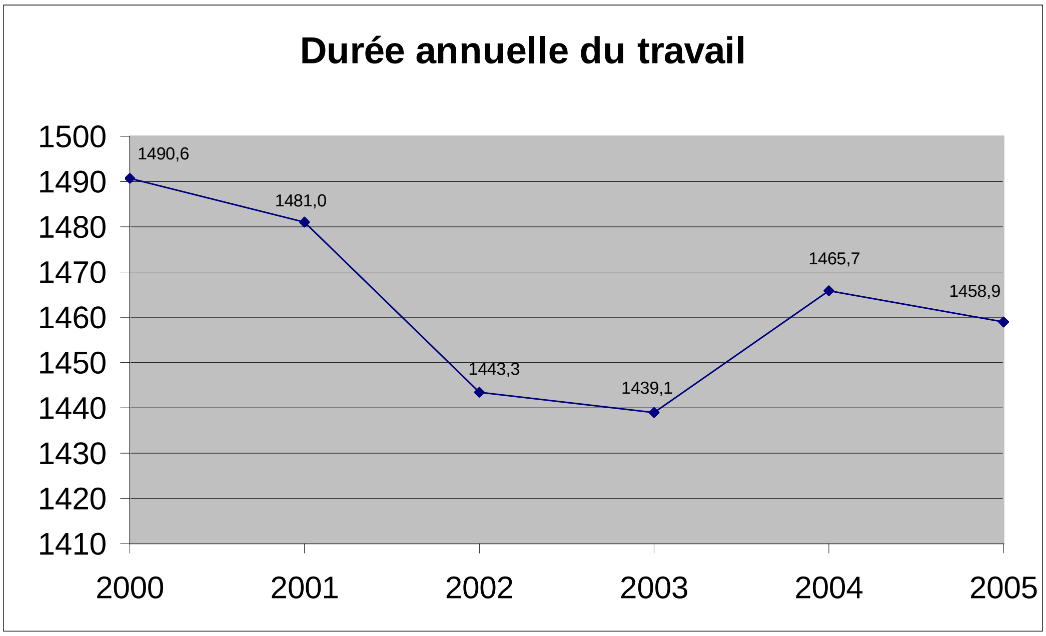
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

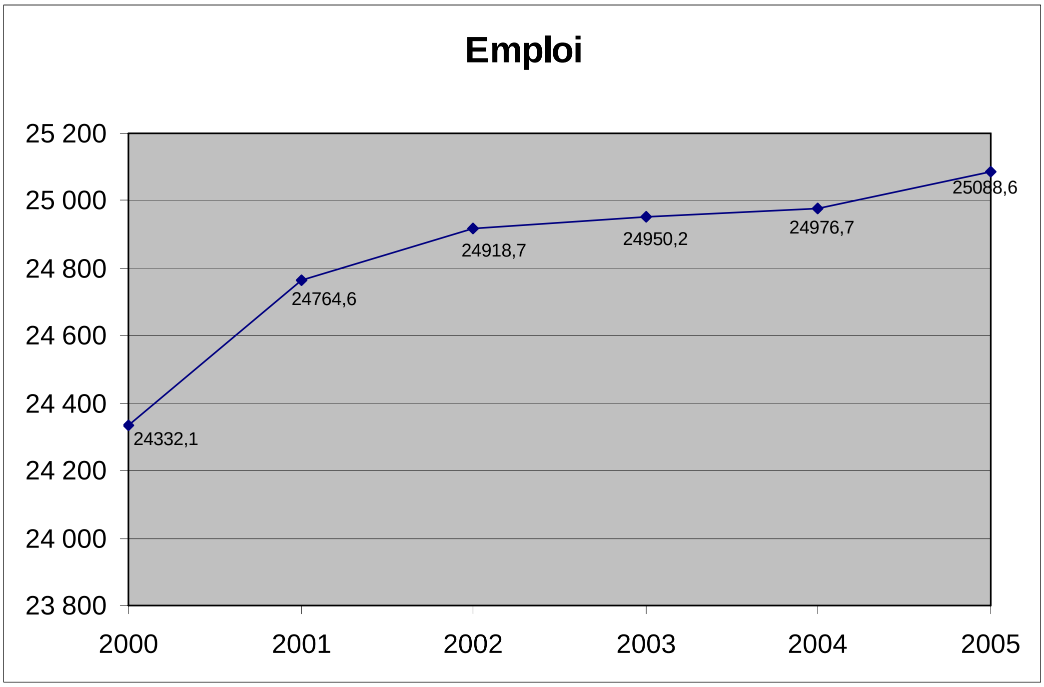
ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

1) Graphiques

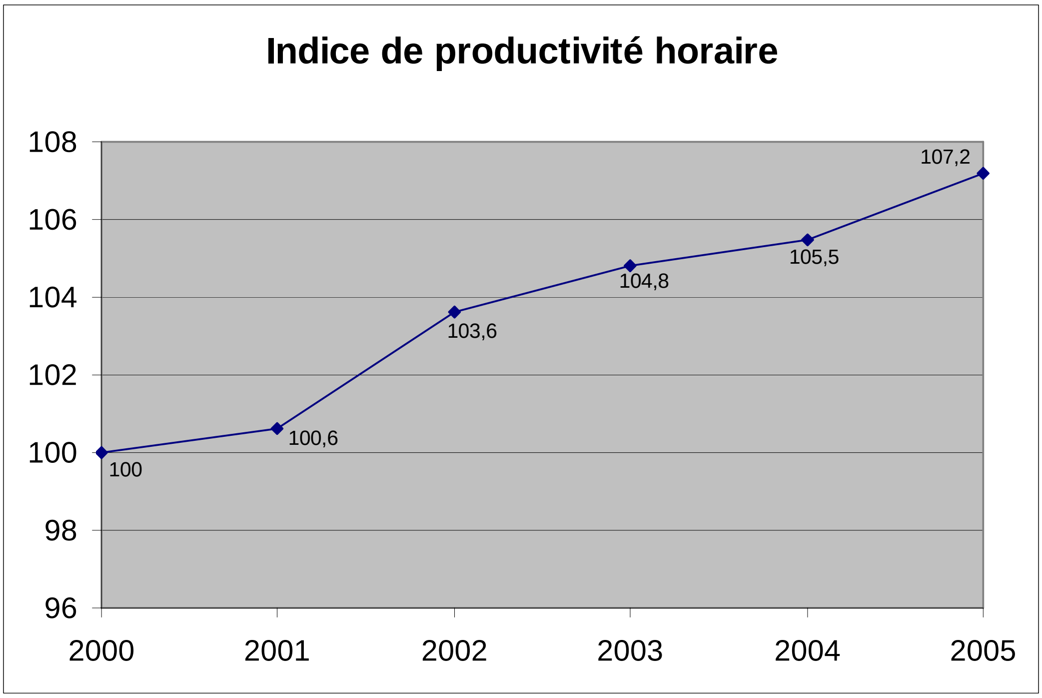






2)

Année	valeur	indice
2000	35,59	100,0
2001	35,82	100,6
2002	36,88	103,6
2003	37,31	104,8
2004	37,55	105,5
2005	38,16	107,2



3) environ 114

4) $D = -5a + 11\,475$ en posant a = 2010

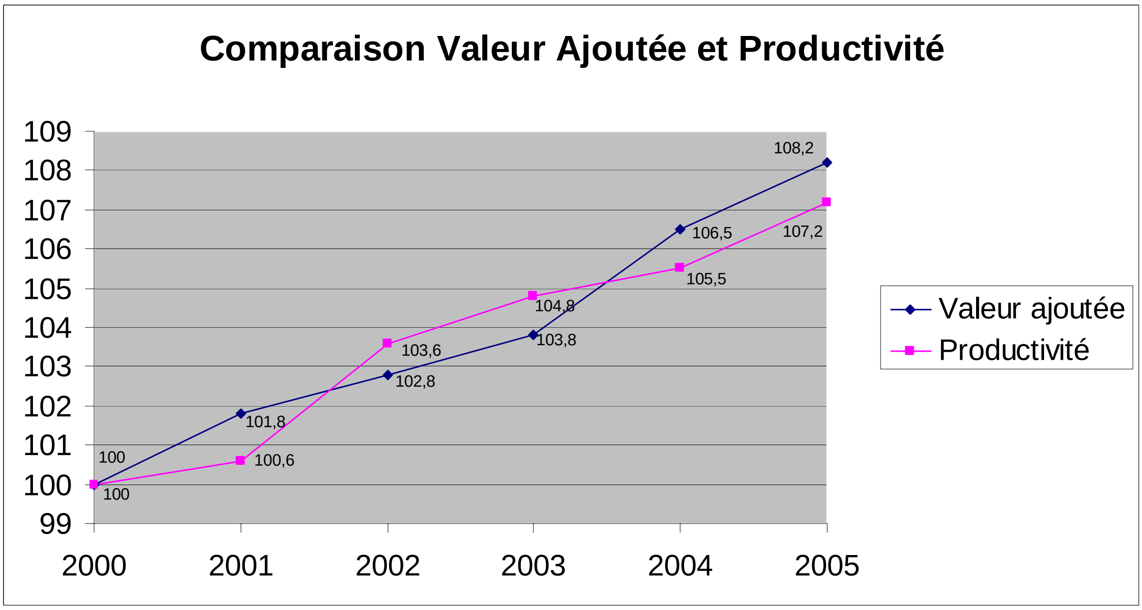
on trouve 1425 h

5) $VA_{2010} = 1422{,}5 \times (1{,}025)^4 = 1570{,}20$

$$emploi_{2010} = \frac{1570{,}2}{1425 \times 1{,}14 \times 35{,}59} = 27\,150 \text{ (milliers de personnes)}$$

6)

Année	Indice VA	Indice productivité
2000	100,0	100,0
2001	101,8	100,6
2002	102,8	103,6
2003	103,8	104,8
2004	106,5	105,5
2005	108,2	107,2



7) Pas de corrigé type