

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note** : l'épreuve est composée d'exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent. Un barème indicatif est donné.*

Exercice 1 (3,5 points)

On considère l'application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à tout complexe z associe le complexe z' tel que :

$$z' = \frac{1+i}{3\sqrt{2}} z$$

On pose : $z_0 = 1$, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$ et, de façon générale, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = f(z_n)$.

- 1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $q = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}$
- 2) Calculer z_1 , z_2 , z_3 . On fournira les résultats sous forme algébrique et trigonométrique.
- 3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $z_n = \left(\frac{1+i}{3\sqrt{2}}\right)^n$.
En déduire le module et un argument de z_n .
- 4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , z_n est-il :
 - a) réel ?
 - b) imaginaire pur ?
- 5) Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, du module de z_n .

Exercice 2 (3,5 points)

On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$

- 1) Calculer I_1 .
- 2) Etablir pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

- 3) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

- 4) Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

- 5) On pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $u_n = \frac{2^n}{n!}$

- a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

- b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3$

- 6) En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n) .

- 7) Justifier enfin que : $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right)$

Exercice 3 (2 points)

La publicité d'un nouveau véhicule automobile est axée sur sa longévité. L'un des slogans publicitaires est « pas de grosse réparation avant 150 000 km ». Le service des études techniques du constructeur a cependant fourni au service commercial les probabilités d'occurrence avant 150 000 km des 5 grosses pannes classiques, à partir de ses études de fiabilité. Pour les cardans cette probabilité est $p_1 = 0,001$, pour le moteur cette probabilité est $p_2 = 0,05$, pour l'embrayage elle est $p_3 = 0,01$, pour les freins on a trouvé $p_4 = 0,013$ et pour la boîte on a $p_5 = 0,03$. Quelle est la probabilité pour que le banc d'essai des revues spécialisées de l'automobile, ou des associations de consommateurs, prenne à défaut la publicité de ce nouveau modèle, après étude d'une seule voiture ?

Exercice 4 (2 points)

Un test de culture générale comportant 20 questions doit être passé par un candidat à un poste d'agent d'administration. Chaque question vaut 1 point et comporte 5 réponses possibles. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant totalement au hasard obtienne strictement plus de 2, sachant qu'aucune pénalité ne frappe les mauvaises réponses.

Exercice 5 (3 points)

Soient t un réel, X un vecteur de \mathbb{R}^3 de coordonnées (x, y, z) , et f_t la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui associe à tout vecteur X le vecteur de coordonnées $(x, y + tx, z + ty + \frac{1}{2} t^2 x)$

- 1) Donner la matrice F_t de la fonction f_t dans la base canonique.
- 2) Trouver la matrice J telle que $F_t = I + tJ + \frac{1}{2} t^2 J^2$. I est la matrice identité de \mathbb{R}^3 .
- 3) Montrer que l'ensemble des matrices F_t muni du produit matriciel est un groupe commutatif.
- 4) Etudier la suite $S_n(t) = I + F_t + \frac{1}{2!} F_t^2 + \dots + \frac{1}{n!} F_t^n$
- 5) Donner les valeurs propres de F_t et les vecteurs propres associés.

Exercice 6 (3 points)

Déterminer les fonctions f continues et dérivables qui vérifient :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

Pour vous aider, vous êtes invité à poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et à chercher à résoudre une équation différentielle de type $x^2 F''(x) + \alpha_1 x F'(x) + \alpha_2 F(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2$

Exercice 7 (3 points)

Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ définie pour tout x , réel positif

- 1) Montrer que la fonction f est une fonction décroissante.
- 2) On pose $g(x) = x f(x) f(x-1)$. Montrer que g est périodique de période 1.
- 3) Calculer $g(n)$, n étant un entier naturel.
- 4) Donner un équivalent de $f(n)$, n étant un entier naturel.
- 5) En déduire que la fonction g est constante.
- 6) En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quelles sont les grandes orientations de la politique étrangère des Etats africains ? Vous essayerez de dégager les signes d'une volonté unitaire.

Sujet n° 2

Quels sont les nouveaux Centres d'impulsion économiques et les nouveaux flux (commerciaux et migratoires) apparus avec la Mondialisation ?

Sujet n° 3

Commentez cette phrase de l'écrivain américain Samuel Huntington dans « Le choc des Civilisations et la Refonte de l'ordre mondial » 1996 : « Il est probable que les premières années du 21^e siècle voient une résurgence de la puissance et de la culture non occidentale ainsi que le choc des peuples de civilisations non occidentales avec l'Occident et entre eux ».

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans quelle mesure l'Etat peut-il intervenir pour soutenir la croissance ?

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

Exercices

I Le Consommateur et l'offre de travail (6 points)

Soit le consommateur A dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(l, q) = l^{1/3} q^{1/3}$$

où l désigne la quantité de loisir et q la quantité de bien consommé.

Le temps disponible de ce consommateur est de 24h, soit $T = 24$.

Notons s le salaire et p le prix du bien de consommation.

- 1) Donnez l'équation de la contrainte budgétaire de A. Tracez cette contrainte ainsi que le vecteur de prix et interprétez.
- 2) Les préférences du consommateur sont-elles convexes ? Interprétez.
- 3) Donnez le taux marginal de substitution de A. Interprétez.
- 4) Ce consommateur est en situation de concurrence parfaite. Qu'introduit-on alors comme hypothèses ?
- 5) Calculez son choix optimal de concurrence parfaite et représentez le graphiquement sur le schéma précédent. Décrivez le type d'arbitrage auquel se livre le consommateur. Donnez son offre de travail optimale. Comment interpréter ce résultat ?
- 6) Supposons désormais que le salaire s augmente. Décrivez – sans calcul – l'effet de ce changement sur le choix optimal du consommateur (vous décomposerez notamment cet effet en effet revenu et effet substitution). Que peut-on dire de la forme de sa fonction d'offre de travail ?
- 7) Supposons désormais que A dispose d'une dotation de survie notée q_0 . Tracez, sur un nouveau schéma, son ensemble de consommations possibles. Quel est alors son salaire de réserve ?
- 8) Quelle forme de chômage permet d'expliquer cette représentation de l'offre de travail en concurrence parfaite ?

II Le producteur (4 points)

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/2} q_2^{1/2}$$

Notons p , le prix de l'output et p_1, p_2 les prix respectifs des deux inputs.

- 1) Quelle est la nature des rendements d'échelle ? Interprétez.
- 2) Après en avoir rappelé la définition, calculez le taux marginal de substitution technique du producteur.
- 3) Donnez l'équation du profit du producteur et calculez alors ses demandes optimales d'inputs en fonction des prix. Comment interpréter ce résultat ? Que peut-on en déduire quand à l'offre d'output de ce producteur ?
- 4) De manière plus générale, quels problèmes pose la présence de rendements constants en concurrence parfaite sur l'offre d'output ?

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (4 points)

Soit une économie à prix fixes formée de trois agents : Etat, entreprises et ménages. La fonction de consommation est donnée par :

$$C = 0.6 Y^d + 200$$

où Y^d est le revenu disponible.

La fonction d'investissement est donnée par :

$$I = 200 - 1000i$$

où i est le taux d'intérêt.

La fonction de demande de monnaie est donnée par :

$$M^d = 0.4Y - 1000i$$

Le niveau des taxes T est de 100, celui des dépenses publiques G de 200 et celui de l'offre de monnaie M de 400.

- 1) Interprétez brièvement les différentes fonctions, ainsi que leur sens de variation.
- 2) Tracez les courbes d'équilibre du marché des biens et de la monnaie. Calculez l'équilibre global de cette économie.
- 3) Expliquez graphiquement les effets d'une politique budgétaire expansionniste sur l'équilibre global de cette économie. Précisez les mécanismes économiques à l'œuvre.
- 4) Expliquez graphiquement les effets d'une politique monétaire expansionniste sur l'équilibre global. Précisez les mécanismes économiques à l'œuvre.

Questions (6 points)

- I) La théorie de la valeur travail chez A. Smith.
- II) Le principe de la demande effective chez J. M. Keynes.

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

On veut étudier l'évolution de la productivité horaire de l'industrie manufacturière de la France. On rappelle que la productivité horaire (dite « apparente ») est égale à la valeur ajoutée par heure travaillée. Pour des comparaisons portant sur plusieurs années, on part de la valeur ajoutée en prix constants (ici les prix de l'année 2000).

- (a) Productivité horaire = (valeur ajoutée en volume) / (durée du travail x nombre d'emplois)

Le nombre d'heures travaillées sera mesuré à partir de la durée annuelle effective du travail des salariés et du nombre total d'emplois de la branche. Ceci revient à admettre que la durée du travail est identique pour les salariés et les non-salariés.

- 1) A l'aide des tableaux fournis en annexe, tracer sur 3 graphiques distincts l'évolution de 2000 à 2005 de la valeur ajoutée aux prix de 2000, de la durée du travail, de l'emploi de l'ensemble des branches.
- 2) Pour les années 2001 à 2005, calculer l'indice de la productivité horaire de l'ensemble des branches sur la base 100 en 2000. Tracer la courbe correspondante.
- 3) Graphiquement, estimer l'indice de productivité horaire de l'année 2010.
- 4) En utilisant la méthode des moindres carrées, extrapoler la durée du travail en 2010.
- 5) En vous référant à la définition (a), et dans l'hypothèse où la valeur ajoutée en volume augmente de 2,5% par an de 2006 à 2010, estimer le niveau de l'emploi en 2010.
- 6) Pour les années 2001 à 2005, calculer l'indice de la valeur ajoutée sur la base 100 en 2000. Sur un même graphique, les présenter ainsi que ceux de la productivité. Commenter.
- 7) Commenter les tableaux fournis en rédigeant un article d'une vingtaine de lignes sur l'évolution de la valeur ajoutée par branche.

Tableau 1 : Valeur ajoutée par branche en volume (prix chaînés, base 2000)

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	36,6	35,6	37,4	31,7	38,1	35,9	35,2
DB	Industrie (= EB à EG)	229,0	233,9	235,2	239,5	242,2	245,0	249,1
EB	Industries agricoles et alimentaires	26,5	25,5	25,9	27,7	27,9	28,1	28,8
EC	Industries des biens de consommation	36,2	38,2	38,3	37,7	37,3	38,0	38,6
ED	Industrie automobile	16,0	14,6	14,8	15,7	16,3	16,7	15,1
EE	Industries des biens d'équipement	45,2	46,4	45,8	46,0	48,1	49,2	52,2
EF	Industries des biens intermédiaires	79,5	80,8	80,4	82,0	81,5	81,8	82,6
EG	Energie	25,6	28,4	30,0	30,2	31,0	31,0	31,8
DH	Construction	66,6	68,9	68,0	67,4	68,5	70,8	72,8
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	684,2	697,4	708,4	722,1	741,3	757,1	774,5
EJ	Commerce	135,7	138,3	138,6	139,7	140,6	142,9	144,5
EK	Transports	52,8	52,2	53,3	53,7	56,5	57,4	58,8
EL	Activités financières	66,4	64,8	66,1	70,5	71,9	74,1	75,3
EM	Activités immobilières	158,8	164,7	165,6	168,0	174,0	177,3	182,3
EN	Services aux entreprises	202,7	206,7	213,0	217,4	225,1	230,6	238,2
EP	Services aux particuliers	67,9	70,6	71,8	73,0	73,6	75,4	75,8
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	274,4	277,9	277,4	278,7	283,7	286,5	289,3
EQ	Education, santé, action sociale	169,4	172,3	174,5	174,7	178,5	179,5	180,6
ER	Administration	104,9	105,6	102,9	103,9	105,2	106,9	108,7
TOTAL	Ensemble	1 290,7	1 313,6	1 326,4	1 339,5	1 374,5	1 396,7	1 422,5

Milliards d'euros 2000

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

Tableau 2 - Durée annuelle du travail des salariés par branche

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	1 567,1	1 600,4	1 586,5	1 561,5	1 580,9	1 605,5
DB	Industrie (= EB à EG)	1 582,2	1 557,1	1 525,5	1 524,2	1 549,2	1 545,7
EB	Industries agricoles et alimentaires	1 536,8	1 520,4	1 484,0	1 494,6	1 497,2	1 498,7
EC	Industries des biens de consommation	1 602,7	1 580,2	1 559,4	1 551,7	1 575,7	1 572,5
ED	Industrie automobile	1 561,9	1 537,2	1 523,4	1 515,9	1 550,3	1 538,3
EE	Industries des biens d'équipement	1 605,7	1 585,0	1 551,1	1 549,0	1 580,9	1 573,5
EF	Industries des biens intermédiaires	1 598,6	1 564,6	1 526,3	1 524,2	1 555,0	1 553,6
EG	Energie	1 455,7	1 442,7	1 433,1	1 440,5	1 454,1	1 453,0
DH	Construction	1 759,6	1 736,0	1 695,8	1 688,5	1 722,4	1 709,7
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	1 525,8	1 520,2	1 489,2	1 480,6	1 503,6	1 492,9
EJ	Commerce	1 546,7	1 523,4	1 498,2	1 490,7	1 507,3	1 502,3
EK	Transports	1 629,3	1 647,5	1 618,4	1 590,5	1 630,3	1 624,6
EL	Activités financières	1 508,2	1 486,7	1 440,6	1 449,2	1 491,1	1 486,8
EM	Activités immobilières	1 584,3	1 636,7	1 597,3	1 582,2	1 600,4	1 591,3
EN	Services aux entreprises	1 511,5	1 520,7	1 491,4	1 484,5	1 512,1	1 502,9
EP	Services aux particuliers	1 459,5	1 437,9	1 402,6	1 394,6	1 402,9	1 375,2
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	1 336,0	1 325,1	1 273,2	1 277,9	1 310,5	1 308,1
EQ	Education, santé, action sociale	1 245,6	1 236,9	1 202,6	1 216,3	1 247,1	1 244,8
ER	Administration	1 494,3	1 483,2	1 407,6	1 396,9	1 432,3	1 429,7
TOTAL	Ensemble	1 490,6	1 481,0	1 443,3	1 439,1	1 465,7	1 458,9

Heures annuelles par salarié

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

Tableau 3 - Emploi intérieur total par branche (Nombre de personnes)

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	961,1	945,3	928,3	912,3	905,6	891,2
DB	Industrie (= EB à EG)	3 866,4	3 900,4	3 826,2	3 737,8	3 635,8	3 548,0
EB	Industries agricoles et alimentaires	567,8	570,9	577,8	580,5	567,0	558,8
EC	Industries des biens de consommation	662,0	651,8	620,9	596,1	567,5	540,8
ED	Industrie automobile	224,4	232,1	231,1	232,4	224,7	219,5
EE	Industries des biens d'équipement	799,9	805,1	790,5	768,3	759,9	755,7
EF	Industries des biens intermédiaires	1 403,0	1 434,8	1 400,6	1 360,4	1 314,0	1 269,7
EG	Energie	209,2	205,7	205,3	200,1	202,7	203,4
DH	Construction	1 464,3	1 506,0	1 527,4	1 535,7	1 558,2	1 604,7
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	10 924,0	11 299,0	11 490,8	11 554,0	11 627,6	11 741,7
EJ	Commerce	3 183,3	3 256,6	3 320,6	3 372,7	3 398,9	3 402,1
EK	Transports	1 054,1	1 093,4	1 108,6	1 112,6	1 111,5	1 111,4
EL	Activités financières	728,5	744,8	763,2	768,2	763,8	765,2
EM	Activités immobilières	252,3	249,6	254,6	256,5	258,3	266,9
EN	Services aux entreprises	3 736,3	3 909,4	3 924,0	3 885,8	3 919,2	3 988,7
EP	Services aux particuliers	1 969,5	2 045,2	2 119,7	2 158,2	2 176,0	2 207,5
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	7 116,4	7 113,9	7 146,1	7 210,3	7 249,5	7 303,0
EQ	Education, santé, action sociale	4 634,9	4 667,1	4 781,4	4 846,5	4 865,7	4 907,6
ER	Administration	2 481,5	2 446,9	2 364,7	2 363,8	2 383,9	2 395,4
TOTAL	Ensemble	24 332,1	24 764,6	24 918,7	24 950,2	24 976,7	25 088,6

Milliers de personnes

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

Tableau 4 - Productivité horaire du travail par branche

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	-2,6	-0,1	11,8	-13,4	20,7	-4,6
DB	Industrie (= EB à EG)	6,3	2,8	4,5	4,2	2,3	4,0
EB	Industries agricoles et alimentaires	0,7	-3,8	2,5	5,5	2,5	3,5
EC	Industries des biens de consommation	13,6	8,5	6,5	2,9	2,1	7,2
ED	Industrie automobile	7,3	-10,1	2,7	5,9	4,7	5,6
EE	Industries des biens d'équipement	5,7	3,2	2,8	3,5	3,6	3,2
EF	Industries des biens intermédiaires	6,1	1,5	4,5	5,0	0,9	4,0
EG	Energie	1,8	13,9	6,8	2,7	0,4	-0,4
DH	Construction	2,9	1,9	-0,9	-0,8	-2,4	1,1
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	3,3	-0,9	2,1	2,0	0,5	2,0
EJ	Commerce	5,4	1,2	0,0	-0,2	-1,2	1,9
EK	Transports	0,2	-5,7	2,5	2,2	2,6	1,9
EL	Activités financières	13,4	-3,2	2,7	5,2	-0,3	3,2
EM	Activités immobilières	8,2	1,8	1,0	1,6	1,4	-0,8
EN	Services aux entreprises	-1,1	-3,1	4,8	3,5	0,7	1,4
EP	Services aux particuliers	2,4	2,1	1,2	1,0	-0,7	3,0
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	2,1	2,1	3,2	-0,8	-1,2	0,5
EQ	Education, santé, action sociale	2,2	1,7	1,5	-2,2	-0,7	0,0
ER	Administration	1,8	2,8	6,2	1,8	-2,1	1,3
TOTAL	Ensemble	3,5	0,8	3,1	1,2	0,7	1,7

Evolution par rapport à l'année précédente en % (Valeur Ajoutée / Volume d'heures travaillées)

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee