ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Tous les problèmes et les exercices sont indépendants.

Problème 1

L'objet du problème est l'étude des polynômes f_n de la variable réelle x tels que l'on ait :

$$(1)\ \forall x \in R \qquad f_n(x) - f_n(x-1) = x^n \ et\ f_n(0) = 0, \forall n \in N$$

N.B. – Pour n donné, on admettra l'existence et l'unicité du polynôme f_n remplissant les conditions (1).

Question 1 – Démontrer que :

a) f_n est de degré $(n+1)$.

b) f_n est divisible par $(x+1)$ pour n supérieur ou égal à 1.

c) Pour tout entier strictement positif p, on a, quel que soit l'entier naturel n,

$$(2)\ f_n(p) = 1^n + 2^n + 3^n + ... + p^n$$

Question 2 – Soit $f_n^{'}(x)$ la dérivée de $f_n(x)$.

a) Démontrer que l'on a, pour n supérieur ou égal à 1

$$(3)\ \forall x \in R \qquad f_n^{'}(x) - nf_{n-1}(x) = f_n^{'}(0)$$

b) En déduire que l'on a, toujours pour n supérieur ou égal à 1

$$(4)\ \forall x \in R \qquad f_n(x) = n\int_0^x f_{n-1}(t)dt + nx\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt$$

Question 3

a) Calculer $f_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3.

b) En déduire les expressions des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{i=p} i \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{i=p} i^2 \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{i=p} i^3$$

Problème 2

A tout entier naturel n, n strictement positif, on associe la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [1;+\infty[\qquad f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$$, ln désignant le logarithme népérien.

Question 1 – Etude des fonctions f_n

a) Calculer la limite de f_n en $+\infty$.

b) Calculer la fonction dérivée $f_n'(x)$ sur $[1 ; +\infty[$.

c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f_n' est nulle ?

d) Donner le tableau de variation de f_n .

e) Calculer en fonction de n la valeur maximale y_n de f_n .

Question 2 – Etude de la suite y_n , n supérieur ou égal à 1

a) Calculer, pour $x > 1$, le rapport $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b) Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$

c) En déduire que $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n$

d) Montrer que $y_n \leq \dfrac{1}{2^n e}$

e) Donner la limite de la suite y_n

Question 3 – Etude des primitives des fonctions f_n

A tout entier naturel n , n strictement positif, on associe l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$

a) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, montrer que : $0 \leq I_n(\beta) \leq (\beta - 1)y_n$.

b) En déduire la limite de $I_n(\beta)$ quand n tend vers + ∞.

c) Démontrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{x}$

d) En déduire que : $I_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{(\ln x)^2}{2!x} - ... - \dfrac{(\ln x)^n}{n!x}$

e) Exprimer, pour n supérieur ou égal à 1 et x supérieur ou égal à 1, $Z_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \dfrac{(\ln x)^i}{i!}$ en fonction de $I_n(x)$

f) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, déterminer la limite de $Z_n(\beta)$ quand n tend vers +∞.

g) En déduire la limite L de la suite S_n de terme général : $\sum_{i=0}^{i=n} \dfrac{1}{i!}$

Exercice 1

Dans une cage, il y a 5 lions et 7 tigres. On ouvre la porte de la cage, et les félins sortent tous les uns après les autres. On suppose que tous les ordres de sortie sont équiprobables.

a) Calculer la probabilité que le premier animal qui sorte soit un tigre.

b) Calculer la probabilité que tous les lions sortent avant les tigres.

c) Calculer le nombre d'ordres de sortie possibles, si on ne distingue pas les lions entre eux, ni les tigres entre eux.

Exercice 2

Un message expédié par l'émetteur A le jour J arrive à son destinataire B, suivant la loi de probabilité explicitée ci-après :

Arrivée le jour J+1 avec la probabilité 0,1
Arrivée le jour J+2 avec la probabilité 0,3

Arrivée le jour J+3 avec la probabilité 0,4

Arrivée le jour J+4 avec la probabilité 0,2

Tous les messages expédiés suivent la même loi de probabilité, de façon indépendante les uns des autres. On suppose les jours numérotés 0, 1, 2, 3,…

a) A expédie son message le jour 0. Soit X le jour où B reçoit le message, calculer E(X).
b) Le jour même de l'arrivée du message, B renvoie immédiatement à A un accusé de réception. Soit Y le jour où A reçoit l'accusé de réception, calculer E(Y) et donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 3

On considère les trois équations différentielles suivantes :

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^2 = 0 \qquad (3)$$

On désigne respectivement par S_1, S_2 et S_3 les ensembles des fonctions réelles solutions sur R respectivement des équations (1), (2) et (3).

a) Démontrer l'inclusion $S_1 \cup S_2 \subset S_3$
b) Démontrer que l'inclusion réciproque est fausse.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Les pays en voie de développement : éléments communs et diversité.

Sujet n° 2

La Politique peut-elle faire abstraction de la Morale ?

Sujet n° 3

Dans le cadre de la Mondialisation et de ses effets sur les économies et les sociétés, quelles sont les chances de l'Afrique ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Croissance et développement.

Sujet n° 2

Les candidats sont invités à prêter attention au barème de notation.

MICROECONOMIE (10 points)

I Le Producteur en concurrence parfaite

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/4} \ q_2^{1/4}$$

Soient p le prix de l'output et p_1, p_2 les prix respectifs des deux inputs.

1) Quelle est la nature des rendements d'échelle ? Interprétez.

2) Après avoir rappelé sa définition, calculez le taux marginal de substitution technique.

3) Après avoir rappelé sa définition, tracez l'isoquante passant par le panier (16, 16).

4) Après avoir donné l'équation du profit du producteur, calculez ses demandes d'inputs pour des prix d'inputs et d'output quelconques.

5) Donnez sa fonction d'offre concurrentielle pour $p_1 = p_2 = 1$. Interprétez.

II Le monopole

Soit une entreprise en situation de monopole. Sa fonction de coût total est donnée par :

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 + \frac{16}{3}$$ où q est la quantité du bien produit.

La demande du bien qu'elle produit est donnée par :

$$d(p) = 15 - p$$

1) Quelle(s) hypothèse(s) change(nt) dans le modèle du monopole par rapport au modèle de concurrence parfaite ?

2) Donnez les définitions économique et mathématique des fonctions de coût marginal et de coût moyen. Tracez-les et interprétez graphiquement.

3) Quel est le seuil de rentabilité du monopole ? Interprétez.

4) Expliquez économiquement et calculez le choix de production optimal du monopole.

5) Quel est alors son profit ? Représentez très succinctement l'aire représentant ce profit sur un autre graphique.

6) Comparer son choix avec celui qu'il aurait fait en concurrence parfaite.

III L'échange

Soient deux consommateurs A et B dont les préférences sont représentées par la même fonction d'utilité : $U(q_1, q_2) = q_1\ q_2^2$

Le consommateur A possède le panier $Q_A = (2, 2)$ et B possède le panier $Q_B = (1, 2)$.
1) Ont-ils intérêt à échanger ? Pourquoi ?

2) Représentez l'ensemble des échanges possibles entre ces deux agents dans une boîte d'Edgeworth (on considère donc que la quantité totale de biens disponibles est donnée par $Q_A + Q_B$).

3) Après avoir rappelé la définition d'un optimum de Pareto, tracez l'ensemble de ces optima de Pareto dans la boîte d'Edgeworth tracée précédemment.

4) Donnez l'équation de la courbe des contrats.

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (3 points)

Soit une entreprise qui dispose de fonds propres et qui doit choisir entre investir ou placer ses fonds au taux d'intérêt en vigueur noté *i* et établi à 10%.

L'investissement est d'une valeur ***I*** = 2000, possède une durée de vie de deux ans et ne peut être revendu. L'entreprise anticipe que le rendement de cet investissement sera de 1200 la première année et de 1000 la deuxième année.

1) Après avoir rappelé sa définition, donnez la valeur actuelle nette de l'investissement. L'entreprise choisit-elle d'investir ?

2) Donnez le taux de rendement interne de l'investissement. Interprétez.

3) Que se passe-t-il si l'entreprise ne dispose pas de fonds propres mais doit emprunter pour réaliser cet investissement ?

4) Que fait-elle si le taux d'intérêt passe à 6%? En déduire la forme de la fonction d'investissement.

Questions (7 points)

1) La fonction de consommation keynésienne : enjeux et limites. **(5 points)**

2) Les anticipations rationnelles. (**2 points**)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note : L'épreuve est composée de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.

Attention : Le tableau 3, dûment complété dans le cadre de l'exercice 2, devra être remis avec votre copie.

Exercice 1

1) D'après les données du tableau 1, calculer les taux bruts de mortalité (définis comme le rapport du nombre de décès durant une année donnée, à la population moyenne de cette année) du Royaume-Uni et de la Côte d'Ivoire pour 2001. Commenter.

2) Calculer le nombre de décès qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Côte d'Ivoire, si ce pays avait les taux de mortalité par âge du Royaume-Uni. Commenter.

Tableau 1 - Données Population et mortalité

	Côte d'Ivoire			Royaume-Uni		
Age	Population en 2001	Décès en 2001	Taux bruts de mortalité (en ‰)	Population en 2001	Décès en 2001	Taux bruts de mortalité (en ‰)
<1	544.130	73.900	135,8	645.170	3.569	5,5
1-4	1.921.980	25.764	13,4	2.801.530	618	0,2
5-14	4.339.460	11.242	2,6	7.732.450	961	0,1
15-24	3.571.960	19.286	5,4	7.223.660	3.573	0,5
25-34	2.157.190	35.399	16,4	8.420.970	6.112	0,7
35-44	1.520.950	29.959	19,7	9.132.020	12.068	1,3
45-54	1.078.630	21.771	20,2	7.847.850	26.750	3,4
55-64	698.250	19.435	27,8	6.335.340	56.813	9,0
65-74	376.540	20.849	55,4	4.931.980	124.728	25,3
75-84	124.430	15.084	121,2	3.294.350	214.389	65,1
+ de 85	14.331	3.503	244,4	1.175.390	195.161	166,0
Total	16.347.851	276.192		59.540.710	644.742	

Exercice 2

On dispose d'une table de survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et suivies à partir de leur naissance (âge 0).

Tableau 2 - Table de survie

i	âge (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge Sx_i
1	0	1000
2	10	850
3	20	800
4	30	750
5	40	650
6	50	530
7	60	430
8	70	330
9	80	180
10	90	5
11	100	0

1) Calculer :

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant l'âge de 40 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder après l'âge de 70 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder entre 30 et 60 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant 30 ans ou après 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 20 ans d'atteindre l'âge de 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 30 ans de décéder avant l'âge de 80 ans.

2) On définit la variable d(x,x+a) comme étant le nombre de décès entre deux âges séparés de a années. De même, on définit la variable aq_x comme étant le rapport entre d(x,x+a) et le nombre de survivants à l'âge x. En utilisant les données du tableau 2, calculer d(x,x+10) et $10q_x$ pour chacune des classes d'âge du tableau **(pour ce faire, vous compléterez le tableau 3 que vous remettrez avec votre copie)**.

3) On définit l'espérance de vie à l'âge x par la formule suivante :

$e_x = x + \frac{1}{S_x}\sum_{i=k}^{10} d(x_i, x_i + 10) * (\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x)$ où i est défini dans le tableau 2, k étant la valeur de l'indice i dans le tableau 2 correspondant à l'âge x (exemple : pour le calcul de e_{20}, espérance de vie à 20 ans, k=3).

Calculer e_0 et e_{70}. Interpréter.

Exercice 3

Le tableau 4 donne le nombre d'entrées dans un parc de loisirs et le prix moyen du billet de 1985 à 2004.

Tableau 4

ANNEE	*ENTREES* (millions)	*PRIX BILLET* (euros)
1985	355	2,10
1986	328	2,22
1987	312	2,52
1988	292	2,87
1989	276	3,13
1990	235	3,78
1991	203	4,37
1992	184	5,41
1993	184	6,62
1994	179	8,57
1995	177	11,21
1996	179	13,37
1997	175	16,01
1998	202	20,48
1999	191	23,45
2000	175	24,94
2001	168	26,96
2002	137	27,66
2003	125	29,12
2004	121	31,45

1) Tracer la courbe du nombre d'entrées. Commenter le graphique, en distinguant trois périodes dans l'évolution.

   Par lecture graphique, déterminer approximativement le nombre d'entrées pour 2005.

2) On veut étudier la relation existant entre le nombre d'entrées et le prix du billet. On utilisera, pour cela, l'information des années 1985, 1989, 1993, 1997, 2001 et 2004.

   On veut montrer que l'évolution du nombre d'entrées dépend de l'évolution relative du prix du billet par rapport à l'indice général des prix : par exemple, le nombre des entrées baisse quand le prix du billet augmente plus vite que l'indice général des prix (IGP).

   L'IGP, base 100 en 1985, est le suivant sur les années retenues :

1989	:	123,9
1993	:	171,2
1997	:	307,9
2001	:	569,9
2004	:	695,7

   Calculer les indices du prix relatif du billet P suivant la formule :

$$P = 100 \text{ x (indice du prix du billet / IGP)}$$

3) Représenter sur un graphique les couples (indice du prix relatif du billet P**,** nombre d'entrées E). Commenter.

   Tracer la droite ajustant au mieux l'ensemble des points tracés : $E = 450 - 1,3\ P$

   Sachant que le prix du billet a subi en 2005 la même hausse qu'en 2004 et que l'indice général des prix a augmenté de 3,1 % de 2004 à 2005, estimer à partir de la relation précédente, le nombre d'entrées en 2005. Comparer au résultat obtenu à la question 1.

   Que pensez-vous des deux méthodes ?

TABLEAU 3

(A RENDRE IMPERATIVEMENT AVEC VOTRE COPIE)

i	Age (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge Sx_i	Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$	$10qx_i$
1	0	1000		
2	10	850		
3	20	800		
4	30	750		
5	40	650		
6	50	530		
7	60	430		
8	70	330		
9	80	180		
10	90	5		
11	100	0		