ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Il est rappelé aux candidats que les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1

Toutes les fonctions considérées dans cet exercice sont des applications de R dans R. On rappelle que tout nombre irrationnel est limite d'une suite croissante et d'une suite décroissante de nombres rationnels.

Question 1

On appelle F l'ensemble des applications continues f de R dans R satisfaisant l'égalité :

$$(1)\ \forall (x,y)\in R^2 \qquad f(x+y)\,f(x-y)=\left[f(x)\,f(y)\right]^2$$

Soit f un élément de F

a) Vérifier que la fonction 2^{-x^2} appartient à F
b) Ecrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants : $x = 0$; $y = 0$
c) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
d) Montrer que f est l'application nulle si et seulement si $f(0) = 0$
e) Montrer que si f s'annule pour une valeur $x = a$, elle s'annule pour $x = 0$ (on pourra considérer les nombres $f(a/2)$, $f(a/4)$, …, et la question 1b)
f) Montrer que si f n'est pas l'application nulle, on a $f(R)\subset R_+^*$ *ou* $f(R)\subset R_-$

Question 2

On appelle G l'ensemble des applications continues g de R dans R satisfaisant à l'égalité :

$$(2)\ \forall (x,y) \in R^2 \qquad g(x+y) + g(x-y) = 2\left[g(x) + g(y)\right]$$

a) Déterminer les éléments de G à partir des éléments de F (on pourra considérer la fonction $g(x) = ln\,|\,f(x)\,|$, où f est un élément de F distinct de l'application nulle sur R)

b) Soit g un élément de G
   i. Montrer que $g(0) = 0$
   ii. Montrer que g est une fonction paire
   iii. Démontrer l'égalité $\forall x \in R \quad \forall n \in N \quad g(nx) = n^2 g(x)$
   iv. Que peut-on en déduire de $g\left(\dfrac{p}{q}x\right)$, où p appartient à Z et q à N^* (on pourra effectuer une démonstration par récurrence et poser $y = -\dfrac{qx}{q+1}$ dans la relation (2))

c) Déterminer l'ensemble G. En déduire l'ensemble F.

Exercice 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x différent de 1, par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

$f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f ; par convention $f^{(0)} = f$

Question 1

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \quad (x \neq 1)$$

où P_n est un polynôme de degré n dont on précisera le terme de plus haut degré. Exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $P'_n(x)$

b) Calculer $P_n(1)$, pour n entier naturel

c) Donner les expressions de P_0, P_1 et P_2

Question 2

a) Montrer que, pour tout réel x différent de 1, on a :

$$(x-1)\, f'(x) - (x-2)\, f(x) = 0$$

b) En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on a :

$$P_{n+1}(x) = (n+2-x)\, P_n(x) + n\,(x-1)\, P_{n-1}(x)$$

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$P'_n = -\, n\, P_{n-1}$$

Question 3

a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ *et* P_{n-k}. En déduire que $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k\, n!$

b) Appliquer la formule de Taylor à P_n entre 1 et x (x étant au voisinage de 1). En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_n(x)}{n!} = e^{1-x}$

Exercice 3

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'apparition de pile (P) est p, celle de face (F) est q avec $p+q = 1$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X le rang d'apparition pour la première fois de deux résultats « pile » consécutifs. Ainsi, dans la série suivante de 10 lancers, on a X = 5 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	P	P	F	F	P	P	F

Pour tout entier naturel n différent de 0, on pose $a_n = P(X=n)$

Question 1

Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4 en fonction de p et q

Question 2

Montrer, en distinguant suivant le résultat du premier lancer, que, pour $n \geq 3$, on a :

$$a_n = q\, a_{n-1} + p\, q\, a_{n-2}$$

Question 3

On suppose à présent que $p = 2/3$ et $q = 1/3$

a) Etablir que, pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X

Exercice 4

Soient k un nombre réel et f une application linéaire de R^4 dans R^3 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + kz + t, x + z + t, y + z)$$

Question 1

Déterminer, pour chaque valeur de k, les sous espaces Ker f et Im f. On en donnera une base et une (ou des) équation(s)

Question 2

Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques de R^4 et de R^3

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La liberté est-elle une donnée ou une conquête ?

Sujet n° 2

Faut-il penser que l'accroissement des pouvoirs de la médecine lié aux découvertes de la biologie (clonage, médecine génétique, moléculaire) peut constituer un problème inquiétant ?

Sujet n° 3

Qu'est-ce que le développement durable ? Quelles en sont les conditions ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

La participation des pays en développement à la croissance mondiale est très inégale. Comment expliquer la diversité des trajectoires de ces pays, conduisant à leur intégration ou à leur exclusion ?

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

Exercice

I - Le Consommateur

Soit le consommateur A dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1^2 \; q_2$$

I.I L'échange bilatéral

1) Le consommateur A possède le panier $Q_A = (2, 2)$. Rappelez la définition précise d'une courbe d'indifférence. Tracez la courbe sur laquelle le consommateur se trouve (sur une 1ère figure) et interprétez sa forme.

2) Donnez le taux marginal de substitution de A en Q_A. Interprétez votre résultat.

3) Soit un autre consommateur B, qui a les mêmes préférences que A, mais qui possède lui le panier $Q_B = (2, 1)$. Représentez succinctement (sur une 2ème figure) l'ensemble des échanges possibles entre ces deux agents dans une boîte d'Edgeworth (on considère donc que la quantité totale de biens disponibles est donnée par $Q_A + Q_B$).

4) Après avoir rappelé la définition d'un optimum de Pareto, représentez l'ensemble de ces optima de Pareto dans la boîte d'Edgeworth tracée précédemment.

<u>I.II Le choix de concurrence parfaite</u>

Le consommateur A est en situation de concurrence parfaite.

Les prix des deux biens sont $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$.

1) Rappelez la définition de la concurrence parfaite.

2) Quelle est la valeur du revenu de A à ces prix ? Tracez sa contrainte budgétaire sur la 1ère figure.

3) Calculez son choix optimal. Interprétez votre résultat, économiquement et graphiquement.

4) Comment modifie-t-il son choix si $p_1 = 4$ avec p_2 inchangé ? Comment interpréter cette modification en termes d'effet de revenu et d'effet de substitution (le calcul précis des deux effets n'est pas demandé) ?

II - Le Producteur

Soit une entreprise en situation de concurrence parfaite. Sa fonction de coût total est donnée par :

$$C(q) = q^2 - 7q + 16 \qquad \text{où } q \text{ est la quantité du bien produit.}$$

1) Donnez la fonction de coût marginal. Rappelez son interprétation économique.

2) Donnez la fonction de coût moyen. Rappelez son interprétation économique.

3) Tracez-les succinctement sur la même figure. Interprétez.

4) A partir de quel niveau du prix p de son produit l'entreprise amortit-elle ses coûts fixes ?

5) Donnez sa fonction d'offre de concurrence parfaite.

6) Si $p = 3$, donnez son profit et représentez-le sur le graphique précédent.

7) Supposons désormais que l'entreprise se trouve en situation de monopole. Comment d'après vous va-t-elle modifier son comportement ?

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (3 points)

Soit une économie composée de ménages, d'entreprises et de l'Etat.

La fonction de consommation des ménages est donnée par $C = C_0 + aY_D$, où Y_D représente le revenu disponible des ménages. L'investissement I des entreprises, les dépenses publiques G ainsi que le montant de l'impôt T sont tous exogènes.

1) Déterminez le revenu d'équilibre de l'économie.

2) Calculez le multiplicateur keynésien. De quoi dépend sa valeur ?

Supposons désormais que $I = 100$, $C_0 = 200$, $G = 300$, $T = 300$ et que $a = 0{,}8$.

3) Calculez le multiplicateur de dépenses publiques. Quel est l'effet sur le revenu d'une hausse de 50 des dépenses publiques ?

4) Calculez le multiplicateur fiscal. Quel est l'effet sur le revenu d'une baisse d'impôt de 50 ? En comparant votre résultat avec celui de la question précédente, expliquez pourquoi les deux politiques n'ont pas la même efficacité.

5) Si l'Etat décide désormais de maintenir son équilibre budgétaire, c'est-à-dire de financer la hausse des dépenses publiques de 50 par une hausse équivalente de l'impôt, cela aura-t-il un effet sur le revenu ? Interprétez.

Questions (7 points)

I) La théorie quantitative de la monnaie : enjeux et limites. **(5 points)**

II) Les déterminants de l'investissement chez Keynes. (**2 points**)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1

A partir des 5 tableaux donnés en annexe, il vous est demandé de répondre aux questions ci-dessous.

Question 1

Donner la variation de la criminalité globale (faits constatés) et de la délinquance de voie publique (faits constatés) entre 1994 et 1995.

Question 2

Calculer le taux annuel moyen de croissance de la criminalité globale entre 1990 et 2000.

Question 3

Sur la décennie étudiée, commenter l'évolution de la criminalité par rapport à celle de la population. Quelle représentation graphique est la plus appropriée pour comparer ces deux évolutions ? Justifier.

Question 4

Calculer le taux de criminalité en 2000 (rapport pour 1.000 habitants). Comparer avec l'année 1990.

Question 5

Pour l'année 2000, donner la part de chacune des catégories suivantes dans la criminalité :

- vols ;
- infractions économiques et financières ;
- atteintes aux personnes ;
- autres infractions.

Quelle représentation graphique vous semble la plus souhaitable pour représenter ces données ? Justifier.

Question 6

Donner les quatre régions qui concentrent à elles seules plus de la moitié des crimes et délits constatés en France en 2000.

Question 7

Donner le nombre de personnes majeures mises en cause en 2000.

Exercice 2

Rédiger une synthèse de 20 lignes sur l'évolution de la criminalité.

Evolution de la criminalité en France (faits constatés)

Années 1990 - 2000 (en nombre et en évolution)

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Criminalité globale	**3 492 712**	**3 744 112**	**3 830 996**	**3 881 894**	**3 919 008**	**3 665 320**	**3 559 617**	**3 493 442**	**3 565 525**	**3 567 864**	**3 771 849**
		7,20%	2,32%	1,33%	0,96%	-6,47%	-2,88%	-1,86%	2,06%	0,07%	5,72%
Infractions économiques et financières	551 810	566 567	413 417	409 246	440 179	357 104	310 910	295 511	287 415	295 734	352 164
		2,67%	-27,03%	-1,01%	7,56%	-18,87%	-12,94%	-4,95%	-2,74%	2,89%	19,08%
Crimes et délits contre les personnes	134 352	141 716	146 095	152 764	175 374	191 180	198 155	214 975	220 948	233 194	254 514
		5,48%	3,09%	4,56%	14,80%	9,01%	3,65%	8,49%	2,78%	5,54%	9,14%
Autres infractions	500 950	578 958	656 040	679 467	730 381	716 392	719 552	738 655	765 758	786 408	830 475
		15,57%	13,31%	3,57%	7,49%	-1,92%	0,44%	2,65%	3,67%	2,70%	5,60%
Vols (y compris recels)	2 305 600	2 456 871	2 615 444	2 640 417	2 573 074	2 400 644	2 331 000	2 244 301	2 291 404	2 252 528	2 334 696
		6,56%	6,45%	0,95%	-2,55%	-6,70%	-2,90%	-3,72%	2,10%	-1,70%	3,65%

Source : Ministère de l'Intérieur - Direction centrale de la police judiciaire

Comparaison entre les faits constatés et la population

Années 1990 - 2000 (base 100 en 1990)

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Total faits constatés tous services (source Ministère de l'Intérieur)	**100,00**	**107,20**	**109,69**	**111,14**	**112,21**	**104,94**	**101,92**	**100,02**	**102,08**	**102,15**	**107,99**
Nombre	3 492 712	3 744 112	3 830 996	3 881 894	3 919 008	3 665 320	3 559 617	3 493 442	3 565 525	3 567 864	3 771 849
Population (source INSEE) *	**100,00**	**100,49**	**101,07**	**101,61**	**102,06**	**102,50**	**102,90**	**103,32**	**103,72**	**103,36**	**103,77**
Nombre	56 614 493	56 893 206	57 217 577	57 526 521	57 779 305	58 027 305	58 255 883	58 493 885	58 722 674	58 518 748	58 746 500

Source : Ministère de l'Intérieur - Direction centrale de la police judiciaire

*Années 1990 et 1999, chiffres obtenus par les recensements réalisés par l'INSEE.

*Années 1991 à 1998 et 2000, chiffres estimés annuellement par l'INSEE entre deux recensements. Les données obtenues reposent sur une méthode d'estimation du solde migratoire mise en œuvre par l'INSEE.

Evolution de la délinquance de voie publique en France (faits constatés)
Années 1990 - 2000 (en nombre et en évolution)

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Délinquance de voie publique	**1 772 278**	**1 944 222**	**2 146 447**	**2 204 255**	**2 146 801**	**2 020 464**	**2 008 356**	**1 931 625**	**1 957 010**	**1 899 281**	**1 937 509**
Evolution		9,70%	10,40%	2,69%	-2,61%	-5,88%	-0,60%	-3,82%	1,31%	-2,95%	2,01%
Part D.V.P. dans la criminalité globale	50,74%	51,93%	56,03%	56,78%	54,78%	55,12%	56,42%	55,29%	54,89%	53,23%	51,37%

*** La délinquance de voie publique =**
- Vols à main armée, vols avec violences, cambriolages
- Vols d'automobiles, vols à la roulotte et vols d'accessoires
- Destructions et dégradations

La délinquance et la criminalité constatées par région en France
Années 1999 - 2000

Régions administratives	Nombre de faits constatés			
	Année 1999	Année 2000	Variation	Différence en nombre
Alsace	98 591	107 124	8,65%	8 533
Aquitaine	154 997	161 959	4,49%	6 962
Auvergne	46 998	48 516	3,23%	1 518
Basse-Normandie	59 666	60 923	2,11%	1 257
Bourgogne	63 143	68 174	7,97%	5 031
Bretagne	109 996	121 979	10,89%	11 983
Centre	115 587	121 663	5,26%	6 076
Champagne-Ardenne	67 087	69 671	3,85%	2 584
Corse	15 044	14 377	-4,43%	-667
Franche-Comté	47 773	49 589	3,80%	1 816
Haute-Normandie	95 314	96 258	0,99%	944
Ile-de-France	960 657	1 007 104	4,83%	46 447
Languedoc-Roussillon	176 632	192 895	9,21%	16 263
Limousin	24 308	27 420	12,80%	3 112
Lorraine	103 837	110 967	6,87%	7 130
Midi-Pyrenées	116 069	123 045	6,01%	6 976
Nord-Pas-de-Calais	261 434	269 921	3,25%	8 487
Pays de la Loire	141 351	148 981	5,40%	7 630
Picardie	96 229	106 137	10,30%	9 908
Poitou-Charentes	69 834	73 349	5,03%	3 515
Provence-Alpes-Côte-d'azur	390 336	412 152	5,59%	21 816
Rhône-Alpes	349 367	374 412	7,17%	25 045
Non ventilés	3 614	5 233	44,80%	1 619
Total National	**3 567 864**	**3 771 849**	**5,72%**	**203 985**

Les mineurs mis en cause par l'ensemble des services
1991 - 2000

	Mineurs mis en cause	Part dans le total PMC
1991	101 631	13,2%
1992	98 864	13,9%
1993	92 912	13,5%
1994	109 338	14,1%
1995	126 233	15,9%
1996	143 824	17,9%
1997	154 437	19,4%
1998	171 787	21,8%
1999	170 387	21,3%
2000	175 256	21,0%

Source de tous les tableaux : Ministère de l'Intérieur - Direction centrale de la police judiciaire