

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

$$P(A \cap D) = P(D/A) \times P(A) = 0,001$$

Question 2

$$P(D) = P(D/A) \times P(A) + P(D/B) \times P(B) + P(D/C) \times P(C) = 0,001 + 0,030 + 0,030 = 0,061$$

Question 3

$$P(A/D) = P(A \cap D) / P(D) = 1/61$$

Question 4

La probabilité cherchée est égale à $1 - P$ (les 8 compteurs ne sont plus sous garantie). Les huit compteurs sont indépendants les uns des autres. Cela revient à chercher $1 - P(\bar{A}/D)^8$. Hors $P(\bar{A}/D) = P(\bar{A} \cap D) / P(D) = 60/61$

Exercice n° 2

Question 1

En utilisant la définition de la probabilité comme étant le rapport entre le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles, on obtient $p(A) = 1/15$; $p(B) = 7/15$ et $p(C) = 7/15$

Question 2

X correspond au total des valeurs des deux pièces tirées. Les valeurs prises par la variable X sont 20 centimes d'euros (tirage de 2 pièces de 10 centimes d'euros), 60 centimes d'euros (tirage d'une pièce de 10 centimes d'euros et d'une pièces de 50 centimes d'euros), 1 euro (tirage de 2 pièces de 50 centimes d'euros). D'où $P(X = 20) = p(B)$; $P(X = 60) = p(C)$ et $P(X=100) = p(A)$

L'espérance de X vaut 44 centimes d'euros

Question 3

Pour un tirage donné, la probabilité p d'obtenir une somme supérieure à 50 centimes d'euros est la somme de $p(X=60)$ et de $p(X=100)$ donc $k = 8/15$

Soit E l'évènement « on tire deux fois une somme supérieure à 50 centimes d'euros », l'évènement E est réalisé lorsque 2 des 3 tirages sont tels que le total est supérieur à 50 centimes d'euros et lorsque l'autre tirage donne une somme inférieure à 50 centimes d'euros (c.a.d. égale à 20 centimes d'euros). Par suite,

$$P(E) = C_3^2 k^2 (1-k) = 448/1125$$

Exercice n° 3

Question 1

Le module cherché vaut $1/3$ et un argument de z_1 est $\pi/4$

Question 2

Soit $P(n)$ la propriété cherchée, celle-ci est valable pour $n=1$. On la suppose vraie pour le rang n et on cherche à la vérifier pour le rang $n+1$. Ce qui ne pose aucun problème.

En ce qui concerne le module, on trouve $1/3^n$ et comme argument $n\pi/4$, par utilisation de la formule de Moivre.

Question 3

- a) z_n est réel si et seulement si $n\pi/4 = k\pi$, c'est-à-dire $n=4k$ (multiple de 4)
- b) z_n est imaginaire pur si et seulement si $n\pi/4 = k\pi/2$, c'est-à-dire $n=2k$ mais non égal à $4k$, ou encore si n est un entier naturel pair non multiple de 4

Question 4

La limite cherchée est nulle car $1/3$ est inférieur à 1

Exercice n° 4

En effectuant un changement de variable pour ramener l'étude au point zéro afin d'utiliser les développements limités connus ($u = x-2$), on obtient comme équivalent du numérateur N et du dénominateur D :

$$N = 2 \left(\frac{u}{8} - \frac{u^2}{8 \times 16} + u^2 \varepsilon(u) \right)$$

$$D = 3 \left(\frac{u}{18} - \frac{u^2}{8 \times 81} + u^2 \varepsilon(u) \right)$$

Ensuite, on trouve que la fonction y qui est égale à $N/D - (3/2)$ a comme équivalent $-5u/96$

Exercice n° 5

En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur (de façon à faire disparaître la fonction racine au dénominateur), l'intégrale cherchée se

simplifie et le problème se ramène au calcul de l'intégrale $J = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$. En effet,

les autres termes du calcul sont des fonctions simples pour lesquelles l'intégration ne pose aucune difficulté. En effectuant une intégration par parties sur J , le problème se ramène

au calcul de l'intégrale $K = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$. Pour finir, on réalise un changement de variable

en posant $\sqrt{1+x^2} = x+t$ et on trouve le résultat suivant :

$$I = -\frac{2}{x} + x - 2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - 2 \ln \left| \sqrt{1+x^2} - x \right| + Cste$$

Exercice n° 6

Question 1

Si $a = 0$, la dimension de $\text{Ker } f$ est 1 et une base du noyau est le vecteur $(1,0,0)$. Si a est différent de 0, f est injective et $\dim \text{Ker } f = 0$

Pour le sous espace vectoriel « image », si a est différent de 0, $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$. Si a est nul, la dimension de $\text{Im } f$ est 2. Une base de ce sous espace vectoriel est constitué des vecteurs $(1,2,1)$ et $(1,1,2)$

Question 2

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

La moyenne obtenue est égale à 1,73 nuitées et l'écart type vaut 0,91 nuitées.

Question 2

- 1) $f_{2000} = 0,478$ et $f_{2004} = 0,437$
- 2) $p = 0,458$ et $s = 0,03$
- 3) $x = 0,041$ et $t = 1,36$ donc $P(X > x)$ est voisin de 0,09
- 4) La probabilité que nous constatons la différence observée est donc inférieure à 10%. Hors, nous l'observons. Si l'on accepte un risque de se tromper supérieur à la probabilité trouvée à la question précédente, on peut affirmer que les taux de réponse ont « bel et bien » diminués en 4 ans.

Question 3

Si l'on note, conformément à ce qu'indiquait dans l'énoncé :

- Q_0 le nombre d'arrivées en 2003. Q_0 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- Q_1 le nombre d'arrivées en 2004. Q_1 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- P_0 la durée du séjour en 2003. P_0 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- P_1 la durée du séjour en 2004. P_1 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.

$$\sum P_0 Q_0 = 2.880.000$$

$$\sum P_1 Q_0 = 2.950.000$$

$$\sum P_0 Q_1 = 2.901.000$$

$$\sum P_1 Q_1 = 2.970.000$$

L'indice de Laspeyres des prix vaut 102,4 ($\sum P_1 Q_0 / \sum P_0 Q_0$) et l'indice de Paasche des quantités vaut 100,7 ($\sum P_1 Q_1 / \sum P_1 Q_0$). Le nombre de nuitées entre 2003 et 2004 sur la région a augmenté de 3,1%. Cette hausse est donc due principalement à l'effet « durée du séjour » (prix).

Question 4

Sur 13 ans, l'augmentation moyenne annuelle constatée s'élève à 0,51%
Pour atteindre le seuil des 2.800.000 nuitées, il faudra encore 11 ans. Ce sera donc en 2014 que ce chiffre sera atteint.

Question 5

Il n'y a pas de corrigé type mais on peut signaler :

- que la saison 2004 est une bonne année puisque le nombre de nuitées a augmenté (+2,8%)
- que la venue des estivants étrangers explique cette augmentation, particulièrement dans le département C (+45,7% de nuitées étrangères)
- que les britanniques sont les plus nombreux parmi les touristes étrangers
- que la durée moyenne de séjour progresse dans tous les départements pour la clientèle étrangère mais qu'elle régresse pour la clientèle française
- que le pic de la saison touristique correspond au mois d'août
- qu'en 2004, le taux d'occupation en juin a bien progressé
- ...