AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

On note P(n) la proposition à démontrer. Il faut et il suffit de montrer que la proposition est vraie au rang n = 1, puis on suppose la proposition vraie au rang n et on doit montrer qu'elle est toujours vraie au rang n+1 (pas de difficultés).

Question 2

On trouve a = 2 ; b = - 4 ; c = 6

Question 3

a) La raison est égale à 1/2 et le premier terme est égal à – 9/2.
Noter que $v_{n+1} = \frac{1}{2}\, v_n$

b) $v_n = -\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) $u_n = -\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 4n + 6$

d) La suite (u_n) diverge.

Question 4

$$V_n = -9\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$R_n = \frac{n+1}{3}\left(2n^2-5n+18\right)$$

$$U_n = V_n + R_n$$

Exercice n° 2

Question 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 2

La dimension de Ker f est 1, une base de Ker f est constituée du vecteur de coordonnées (1,1,1).

On en déduit que la dimension de Im f est 2. Par exemple, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_3)$ forment une base de ce sous-espace vectoriel puisqu'ils sont indépendants.

Question 3

a) L'endomorphisme f n'est pas injectif, ni surjectif, ni bijectif car le noyau de f n'est pas réduit à l'élément nul.

b) Le rang de f est la dimension du sous-espace vectoriel « Im f ». Il vaut donc 2.

Question 4

a) Le polynôme caractéristique P(k) de A (ou de f) est le déterminant de la matrice A-kI (I étant la matrice identité). Ce polynôme est nul pour k = 0. En effet, le déterminant de la matrice A est nul puisque ses deux dernières lignes sont identiques.

b) Le vecteur propre associé à la valeur propre 0 est un vecteur de Ker f. Il suffit de prendre le vecteur de coordonnées (1,1,1), base de Ker f.

c) On trouve $P(k) = - k^2 (1+k)$. L'autre valeur propre est donc la valeur –1.

d) La valeur propre 0 est d'ordre de multiplicité 2. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est Ker f. Comme la dimension de ce sous-espace est 1, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Question 5

a) Soit la combinaison linéaire $au_1+bu_2+cu_3=0$. Pour montrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de R^3, il faut et il suffit de montrer que a=b=c=0 (pas de difficultés).

b) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\text{Det } P = -1 \quad ; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) Le rang de la matrice A' est égal au rang de A et vaut donc 2.

Exercice n° 3

Question 1

En utilisant la formule de Mac Laurin, on obtient

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2 e(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Question 2

En utilisant de nouveau la formule de Mac Laurin, on obtient

$$h(x) = 3x^2 + x^2 e(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Question 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = -\frac{1}{6}$$

Exercice n° 4

Les points stationnaires annulent les dérivées partielles d'ordre 1. On a donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f_x'(x, y, z) = 2x - y^2 + 2my = 0 \\ f_y'(x, y, z) = -z^2 - 2xy + 2mx = 0 \\ f_z'(x, y, z) = -2yz = 0 \end{cases}$$

La résolution donne le résultat suivant :

- si m = 0 ; il y a un point stationnaire : le point de coordonnées (0,0,0)

- si m est différent de 0, il y a trois points stationnaires dont les coordonnées sont : (0,0,0) ; (0,2m,0) ; $(-m^2/2,m,0)$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

a) Le nombre total de livraisons est de 4800. Le nombre de livraisons dont le parcours est inférieur à 24 kilomètres est de 1560 (=60+360+520+620). Le pourcentage cherché est donc de 1560/4800 = 32,5%

b) Le nombre total de livraisons est de 4800. Le nombre de livraisons dont le parcours est compris entre 12 et 36 kilomètres est de 2630 (=520+620+710+780). Le pourcentage cherché est donc de 2630/4800 = 54,8%

Question 2

a) En prenant la définition de la moyenne et en utilisant les centres de classe, on trouve la valeur de 30,75 kilomètres.

b) Le coût moyen d'une livraison sachant que le prix du kilomètre parcouru est facturé 1,6748 euros est égal à 30,75 x 1,6748 = 51,50 euros.

c) Le coût moyen d'une livraison en 2002 est égal à 30,75 x (1,05) x 1,6748 x (0,98) = 52,99 euros. L'augmentation entre 2001 et 2002 est de 2,89%.

Question 3

La médiane de la série proposée dans le tableau est la valeur de la variable qui sépare la population en deux parties égales. Elle se situe donc dans l'intervalle compris entre 30 et 36 kilomètres. Pour obtenir une valeur plus précise, on utilise la méthode de l'interpolation linéaire :

$$\text{Médiane interpolée} = 30 + \frac{36-30}{3050-2270}\,(2400-2270),$$

et on trouve alors une valeur de 31 kilomètres.

Exercice n° 2

Question 1

Le taux d'accroissement annuel moyen de la variable étudiée recherché que l'on nomme i se calcule par la formule $57937 = 3813\,(1+i)^{40}$. On trouve i = 7,04%.

Question 2

Le nombre de places offertes en 1975 est donné par le calcul 57937 x 49,3/100 = 28563.

Exercice n° 3

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice. On peut remarquer que :

- l'on compte un peu plus de 4 lits d'hôpital pour 1000 habitants ;
- ce nombre de lits est inégalement réparti sur le territoire (variation de 2,8 à 5) mais moins marqué que pour les personnels de santé ;
- le nombre de lits en médecine est plus élevé qu'en chirurgie alors que l'activité de court séjour (mesurée en nombre d'entrées) se répartit à parts égales ;
- l'on compte un peu plus de 3 médecins pour 1000 habitants ;
- ce nombre varie presque du simple au double entre la région Picardie et la région Provence Alpes Côte d'Azur en France métropolitaine ;
- l'espérance de vie à la naissance est plus forte pour les femmes (82,4 ans) que pour les hommes (74,9 ans) ;
- ….