CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2003

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1) Si u o u = u alors u o (u-e) = (u-e) o u = 0, alors (e-u) o (e-u) = (e-u) -u o (e-u) = e-u. la réciproque se vérifie de la même façon.

2) Comme u o (e-u) = 0, Im(e-u) est inclus dans Ker(u). Réciproquement, pour tout x appartenant à Ker(u), u(x)=0 donc x=u(x)+(e-u)(x)=(e-u)(x), ce qui implique que x appartient à Im(e-u). D'où, finalement, Im(e-u)=Ker(u).
   En remplaçant u par e-u, on obtient l'autre égalité demandée.

3) Pour tout x appartenant à l'intersection entre Ker(u) et Im(u), on a, en utilisant la question précédente, u(x)=(e-u)(x)=0 donc x=0. De plus, on a, pour tout x appartenant à E, x=u(x)+(e-u)(x). Autrement dit, tout vecteur s'écrit comme la somme d'un élément de Im(u) et d'un élément de Im(e-u). Comme Im(e-u) est égal à Ker(u), tout vecteur de E s'écrit comme combinaison d'un vecteur de Im(u) et de Ker(u). Ces deux sous-espaces sont donc supplémentaires.

Exercice n° 2

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout n supérieur ou égal à 3, J^n est la matrice nulle

2) $M = aI + 3J$. En utilisant la formule du binôme, on obtient, pour tout n supérieur ou égal à 2 :

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 3na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{9}{2}n(n-1)a^{n-2} & 3na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

Exercice n° 3

1) $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{4}{3}$; $u_4 = \frac{13}{10}$
2) $u_{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4u_n}$
3) Suite croissante majorée par 3/2, donc convergente. La limite est $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$
4) Suite décroissante minorée par 0, donc convergente. La limite est $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$
5) Les suites extraites ayant même limite, la suite converge vers la même limite.

Exercice n° 4

En utilisant l'intégration par parties et la décomposition en éléments simples, on obtient la primitive suivante : $I = x\ln(x^2-1) - 2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \text{constante}$

L'intégrale tend vers l'infini quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Pour $a \in]1,2[$, on calcule $\int_a^2 \ln(x^2-1)dx = 3\ln3+2a-4-(a+1)\ln(a+1)-(a-1)\ln(a-1)$

Quand $a \to 1^+$, $(a-1)\ln(a-1) \to 0$, donc l'intégrale est convergente vers $3\ln3 - 2\ln2 - 2$

Exercice n° 5

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; Soit Y' la matrice colonne ayant comme composantes x', y' et z', on a alors Y'=AY

2) Les valeurs propres de la matrice A sont –1, -4 et 5. A est diagonalisable puisqu'elle a 3 valeurs propres distinctes. A est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre.

3) Les trois vecteurs propres de A, indépendants, sont : (1,0,0) (1,3,0) (1,-6,54)

4) $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 54 & -18 & -3 \\ 0 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) D'après la question 1, on a Y'=AY. Soit Z la matrice colonne ayant comme composantes z_1, z_2 et z_3 et Z' la matrice colonne ayant comme composantes z'_1, z'_2, z'_3 (fonctions dérivées des fonctions z_1,z_2,z_3 par rapport à la variable t),

on a alors Z'=DZ d'où le résultat : $\begin{cases} z_1 = a\,e^{-t} \\ z_2 = be^{-4t} \\ z_3 = ge^{5t} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = ae^{-t} + be^{-4t} + ge^{5t} \\ y = 3be^{-4t} - 6ge^{5t} \\ z = 54ge^{5t} \end{cases}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2003

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Situation au 1er janvier 1998 des salariés déjà présents au 1er janvier 1995
Distributions conditionnelles

1/1/98 1/1/95	Cadre	Agent de maîtrise	Agent d'exécution	Parti de l'entreprise	Total
Cadre	0,820	0,000	0,000	0,180	1,000
Agent de maîtrise	0,040	0,880	0,000	0,080	1,000
Agent d'exécution	0,000	0,025	0,850	0,125	1,000
Total	0,047	0,142	0,680	0,121	1,000

2) Le niveau de classification influe sur les départs. En effet, on constate que :

- Les probabilités conditionnelles de l'événement « départ sachant que le salarié avait initialement le niveau i » diffèrent sensiblement selon le niveau.
- Les probabilités de l'événement « départ et niveau i » diffèrent, quelle que soit la catégorie i, du produit des probabilités marginales. Par exemple, on a : P(départ et agent d'exécution) = 0,125 alors que P(départ)xP(agent d'exécution) = 0,0968

3) Il faut observer 440 départs. Sachant que l'on observe par période triennale 121 départs, le nombre n de périodes triennales recherché est solution de l'équation :

$$440 \leq 879(1-0,121)^n$$

On trouve n = 6 périodes, soit 18 ans.

4) La répartition trouvée est la suivante :

Tableau prévisionnel des effectifs sans embauche

	1/1/98	1/1/01	1/1/04
Cadre	50	48	46
Agent de maîtrise	175	177	176
Agent d'exécution	920	782	665
Total	1145	1007	887

Exercice n° 2

Pas de corrigé type