AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de $x e^{x^2+3x}$ est égale à $(1+x(2x+3))e^{x^2+3x}$ et en 1, on obtient $6e^4$

2. $I = \int_0^1 (x^2+\sqrt{x})\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = 1$

3. La résolution du système : $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{4} \\ xy = 6 \end{cases}$ donne (x, y) = (3, 2) ou (-3, -2)

4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

5. L'inéquation : $\frac{x^2-1}{x-2} < 0$ est vérifiée pour x<-1 ou 1<x<2.

6. Donner l'équation de la droite dans le plan qui passe par les points A(1,1) et parallèle au vecteur de composantes (2, -1). Cette droite d'équation $y=ax+b$ admet pour pente a=-1/2 et donc : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

a. Toute fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné est continue sur cet intervalle. Faux

b. Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. Vrai

c. Toute fonction bornée sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. Faux

d. Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle fermé et borné qui ne sont pas bornées. Faux

8. Quel est le capital obtenu au bout de 3 mois pour un montant de 200 Euro placé au taux mensuel de 1% ? Ce capital est égal à : $200(1{,}01)^3 = 206{,}06$

9. Laquelle de ces assertions est exacte ?

a. Riemann (célèbre pour ces travaux sur l'intégrale) est né en 1926. Faux en 1826

b. Cauchy (célèbre pour ces travaux sur les séries) est né en 1789. Vrai

c. Newton (qui partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal) est né en 1843. Faux en 1643

d. Euler (reconnu pour ses apports tant sur les fonctions que sur la théorie des nombres) est né en 1807. Faux en 1707

10. Une primitive de la fonction *f* définie, pour *x*>1, par $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ est $F(x) = \dfrac{1}{2} Ln\left|x^2-1\right|$.

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x - Ln|x|$$

où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f.

La fonction f est définie sur R^*.

On trouve les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

La dérivée est égale à $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et décroissante sinon.

Tableau de variation :

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$-\infty$ $\uparrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\downarrow$ 1	1 $\uparrow$ $+\infty$

2. Tracer le graphe de f .

Pour le graphe de f , on a une branche parabolique dans la direction $y = x$ et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale. Le graphe suit le tableau de variation. La dérivée seconde étant toujours positive, la fonction est convexe.

3. Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x = 1$ et $x = 2$, et le graphe de f .

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\,Ln\,x + x\right]_1^2 = \frac{1}{2} - Ln4$$

On considère maintenant la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - Ln\,x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

4. Etudier les variations de f_m.

f_m est définie sur R^*. Sa dérivée est égale à : $f_m'(x) = m - \frac{1}{x}$ et elle est nulle pour $x = \frac{1}{m}$. f_m est donc décroissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{m}\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right[$.

Elle admet un minimum en $x = \frac{1}{m}$ égal à $Ln\,m$.

5. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \le x - 1$.

Pour $m = 1$, le minimum est nul, d'où pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $Ln\,x \le x - 1$.

6. On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G la moyenne géométrique $G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times .... \times a_n}$ et H la moyenne harmonique, à savoir $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$.

Comparer G et M (on pourra appliquer la question 5 avec $x = \frac{a_i}{M}$).

En appliquant la question 5 avec $x = \frac{a_i}{M}$, on obtient : $Ln\frac{a_i}{M} \le \frac{a_i}{M} - 1$.

En sommant ces différentes inégalités, on a : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \le \frac{1}{M}\sum_i a_i - n$.

Comme par ailleurs $M = \frac{1}{n}\sum_i a_i$, l'inégalité devient : $\sum_i (Ln\,a_i - Ln\,M) \le 0$ ou encore

$\frac{1}{n}\sum_i Ln\,a_i \le Ln\,M$ et $\sum_i Ln\,a_i^{1/n} = Ln\,G \le Ln\,M$. Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on obtient $G \le M$

7. Comparer G et H .

On remplace a_i par $\frac{1}{a_i}$ dans $G \leq M$ pour obtenir :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \times .... \times \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} \text{, c'est à dire } \frac{1}{G} \leq \frac{1}{H} \text{, d'où } H \leq G$$

Exercice n° 3

On considère la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$f(x) = x\cos(\frac{\pi}{x})$ si x est non nul et $f(0) = 0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f .

f est indéfiniment dérivable en dehors de l'origine, le problème ne se pose donc qu'en x=0.

On a : $\underset{0}{Lim}\, f(x) = 0 = f(0)$ (car la fonction cosinus est bornée par 1) et $\underset{0}{Lim} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \underset{0}{Lim} \cos(\pi / x)$ qui n'existe pas. La fonction est donc continue en 0, mais non dérivable.

2. Préciser l'ensemble des nombres réels tels que :

a) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $\cos(\pi / x) = \cos(\pi / 2)$, soit $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x = \frac{2}{1 + 2k}$

b) $f(x) = x$ si et seulement si $\cos(\pi / x) = 1 = \cos(2k\pi)$, soit $x = \frac{1}{2k}$

c) $f(x) = -x$ si et seulement si $\cos(\pi / x) = -1 = \cos((2k+1)\pi)$, soit $x = \frac{1}{2k+1}$

3. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

$f^{'}(x) = \cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}$ et

$f^{''}(x) = -\frac{\pi}{x^3}\cos\frac{\pi}{x}$

4. Etudier la convexité de f pour $x \geq \frac{1}{2}$.

$f^{''}(x) = -\frac{\pi}{x^3}\cos\frac{\pi}{x} = 0$ pour $\cos\frac{\pi}{x} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, d'où $x = \frac{2}{2k+1} > \frac{1}{2}$

Seules les valeurs de k=0 et 1 conviennent. Et f est convexe sur l'intervalle (2/3, 2).

Exercice n° 4

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de son produit, elle décide d'offrir des places pour une rencontre de football dans un dixième des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 80% permettent de gagner une place et 20% deux places.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places gagnées par un acheteur d'une seule tablette de chocolat.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

X	0	1	2
Probabilités	9/10	0,8/10	0,2/10

2. Calculer l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1,2}{10} = 12\%$$

3. Un autre client achète deux tablettes de chocolat.

Ecrivons la loi de probabilité de Y (nombre de places gagnées dans l'achat de deux tablettes) :

Y	0	1	2	3	4
Probabilités	81/100	14,4/100	4,24/100	0,32/100	0,04/100

- La probabilité qu'il ne gagne aucune place est égale à 81%.
- La probabilité qu'il gagne au moins une place est égale à 19%.
- La probabilité qu'il gagne exactement deux places est égale à 4,24%.

4. Le processus aléatoire est indépendant des équipes.

Exercice n° 5

Soit la fonction réelle f définie par : $f(x)=\dfrac{Ln(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

Cette fonction est définie pour x>-1 et $x \neq 0$, mais remarquons que l'on peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0)$=1.

La dérivée de f est égale à $f^{'}(x)=\dfrac{x-(1+x)\,Ln\,(x+1)}{x^2\,(x+1)}$.

Etudions alors $z=x-(1+x)\,Ln\,(x+1)$. On obtient alors $z^{'}=-Ln\,(x+1)$. Cette fonction est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, mais elle est reste toujours négative.

La fonction f est donc décroissante sur $]-1,+\infty]$ et à valeurs dans $]+\infty,0[$

2. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Le graphe de f permet de voir qu'il ne coupe la première bissectrice qu'en un seul point.
Algébriquement, il faut résoudre l'équation : $f(x)=x$, soit $Ln(x+1)=x^2$.

L'étude de la fonction $g(x)=Ln(x+1)-x^2$ et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de montrer qu'il existe un unique point fixe sur l'intervalle $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

Exercice n° 6

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x)=x^n \sin x$, où n est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0,\pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.

La fonction f_n est positive sur $[0,\pi/2]$, ainsi que sa dérivée : $f^{'}{}_n(x)=nx^{n-1}\sin x+x^n\cos x$.
La fonction est donc croissante sur cet intervalle et à valeurs dans $[0,(\pi/2)^n]$.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout n.

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = \left[-x^n \cos x\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx = n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx \text{ et}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx = \left[x^{n-1}\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(n-1)x^{n-2}\sin x\,dx \text{, d'où :}$$

$$I_n = n(\frac{\pi}{2})^n - n(n-1)I_{n-2}$$

3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_{n+1}(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

On note $u(x)$ la limite quand elle existe de la suite $(u_n(x))$.

On a : $u_0(x) = f_0(x) = 0$, $u_1(x) = f_1(x)$ et par récurrence :

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sin x \sum_{k=1}^{n} x^n = x(\frac{x^n - 1}{x-1})\sin x$$

La suite $(u_n(x))$ est divergente pour $|x| \geq 1$, et elle est convergente pour $|x| < 1$. Dans ce cas, sa limite est égale à $u(x) = \dfrac{-x\sin x}{x-1}$

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle positive définie par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

1. Etudier les variations et la convexité de. *f.*

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est toujours positive. La fonction est donc strictement croissante et elle est nulle à l'origine.

Sa dérivée seconde est égale à : $f''(x) = 2 - \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ et elle est nulle pour $x = \dfrac{1}{4}$. La fonction est concave avant cette valeur et convexe ensuite.

2. Tracer le graphe de *f.*

3. $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = 1$.

Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 9e \quad et \quad u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$$

On pose $v_n = \ln(\dfrac{u_n}{9})$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

On vérifie par récurrence que : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$. La raison est égale à 1/2 et le premier terme est : $v_0 = \ln(e) = 1$

2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de *n*.

On obtient $v_n = (\frac{1}{2})^n$, puis $u_n = 9 e^{1/2^n}$

3. La limite de la suite (u_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$ est égale à 9.

Exercice n° 3

Calculer en fonction de *n* (où *n* est un entier strictement positif), l'expression :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k$$

On obtient :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k = n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6}$$

Exercice n° 4

1. Une grande enveloppe contient les douze « figures » d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 5 cartes simultanément, associe le nombre de rois obtenus.

Déterminer la loi de probabilités de *X* et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Le nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 12 est le nombre de combinaisons de 5 cartes parmi 12, soit $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et après simplification 99x8.

Le nombre de façons de choisir *k* rois parmi 4 est $\begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}$.

Le nombre de façons de choisir 5-*k* autres cartes parmi les 8 restantes est $\begin{pmatrix} 8 \\ 5-k \end{pmatrix}$

Pour k=0, 1, 2, 3, 4, on obtient $P(X = k) = \dfrac{\binom{4}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{12}{5}}$

La loi de probabilités de X :

X	0	1	2	3	4	Total
Probabilités	7/99	35/99	42/99	14/99	1/99	1

Espérance de X :

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{165}{99} = \frac{5}{3}\text{ ,où } p_i = P(X = x_i)\,.$$

En moyenne, le nombre de rois obtenus par cette méthode de tirage est de 5/3 (environ 1,67)

2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus avec ces cinq tirages. Déterminer la loi de probabilités de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Cette expérience aléatoire possède deux issues : obtenir un roi (succès) ou non (échec), c'est une loi de Bernoulli, où la probabilité d'obtenir un roi est égale à 4/12=1/3.
On répète de façon indépendante 5 fois cette expérience.
La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres n=5 et p=1/3.

Pour k=1, 2, 3, 4, 5, on obtient $P(Y = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$

La loi de probabilités de Y :

Y	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilités	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004	1

Espérance de Y :

$$E(Y) = np = 5 \times (1/3) = 5/3$$

En moyenne, le nombre de rois obtenus par cette méthode de tirage est le même que dans la méthode de tirage précédente.

Problème

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$.

1. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(t)\,dt = 0$$

Exprimer F à l'aide de la fonction G définie par : $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Si F_1 et F_2 vérifient les conditions précédentes, alors $F_1' = F_2'$ et $F_1 = F_2 + k$. La condition sur l'intégrale implique que cette constante k est nulle, d'où l'unicité de la fonction F, qui est continûment dérivable par définition.

De plus, $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x F'(t)\,dt = F(x) - F(0)$ et $\int_0^x F'(t)\,dt = F(x) = G(x) + F(0)$

2. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique suite de polynômes :

$B_0 = 1,\ B_{n+1}' = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$ pour tout $n \geq 0$

Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré.
Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4.

L'existence de la suite de polynômes est un cas particulier de la question précédente.
Par définition de la suite, on a :

$B_1' = B_0 = 1$, d'où $B_1(x) = x + k$ et $\int_0^1 B_1(t)\,dt = \left[(x^2/2) + kx\right]_0^1 = 1/2 + k = 0$ et $k = -1/2$

Par conséquent :

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

On procède de même pour les autres polynômes et on obtient :

$$B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

$$B_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x$$

$$B_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2$$

On vérifie facilement par récurrence que le degré de B_n est égal à n et que le terme de plus haut degré est égal à 1/n !

3. Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

On a : $\int_0^1 B_n(t)\,dt = \int_0^1 B_{n+1}{}'(t)\,dt = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$, donc $B_n(0) = B_n(1)$.

4. On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout entier naturel n :

$$C_n(X) = (-1)^n\, B_n(1-X)$$

a) Comparer les suites (B_n) et (C_n).

On a : $C_0 = B_0 = 1$, puis $C_{n+1}{}'(X) = (-1)^{n+1}(-1)B_{n+1}{}'(1-X) = (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X)$ et $\int_0^1 C_{n+1}(t)\,dt = 0$ pour tout $n \geq 0$ (il suffit d'effectuer le changement de variable t =1-u).

En conclusion la suite (C_n) vérifie les mêmes propriétés que la suite (B_n), qui est unique, donc

$$B_n = C_n$$

b) Que peut-on en déduire pour les graphes des B_n et pour les valeurs, lorsque n est impair supérieur ou égal à 3, de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$?

On a : $B_n(X) = C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ et pour $X = 1/2$, on obtient pour n impair : $B_n(1/2) = -B_n(1/2)$, donc $B_n(1/2) = 0$

De même pour $X = 1$, $B_n(0) = -B_n(1)$. Comme ces deux termes sont égaux d'après la question précédente, on trouve :

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n(1/2) = 0$$

Les graphes des B_n sont symétriques par rapport au point de coordonnées (1/2, 0).

5. Montrer que les polynômes B_{2p+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.

B_{2p+1} est un polynôme de degré 2p+1, qui peut s'écrire sous la forme :

$B_{2p+1}(X) = X^{2p-1}(aX^2 + bX + c)$ et qui admet trois racines 0, ½ et 1. Il ne s'annule donc pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.