AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. $\underset{n}{Lim}\, u_n = \underset{n}{Lim}\, n(e^{1/n} - 1) = \underset{n}{Lim}\, n(1 + \frac{1}{n} - 1) = 1$.

2. $I = \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \left[\frac{(2x-1)^3}{6} \right]_0^1 = 1/3$

3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ (x+2y)(x-y) = 28 \\ x > 0 \end{cases}$$

dans l'ensemble des nombres réels. On obtient $x = 6$ et $y = 4$ (On remarque que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$).

4. Trouver, dans R^3, un vecteur orthogonal au vecteur $u(1,2,3)$ et dans le plan d'équation : $x + y + z = 0$. Ce vecteur v(x,y,z) doit vérifier $x + y + z = 0$ et $x + 2y + 3z = 0$. Par exemple v(1,-2,1).

5. Paul a 4 ans de plus que Pierre et 2 ans de moins que Jacques. A eux trois, ils totalisent 70 ans. Quel est l'âge de Pierre ? Pierre a 20 ans.

6. La dérivée de $xArctgx$ est égale à $Arctgx + \frac{x}{1+x^2}$ et au point $x = \pi/4$,

on trouve $1 + \frac{4\pi}{16+\pi^2}$.

7. Laquelle de ces affirmations est-elle exacte (pour des fonctions numériques d'une variable réelle) ?

a. Toute fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.

b. Toute fonction continue est dérivable.

c. La dérivée d'une fonction dérivable est continue.

d. Il existe des fonctions définies sur tout R et continues en aucun point.

Réponse (d), avec la fonction caractéristique des rationnels (par exemple).

8. Un groupe d'entreprises possède 3 usines. Dans la première, le salaire moyen est de 100, dans la deuxième de 120 et dans la troisième de 90. Sachant que la moyenne des salaires dans ce groupe est de 104, qu'il y a 10 salariés dans la première usine et 20 salariés dans la deuxième, quel est l'effectif salarié de la troisième usine ?

Soit x l'effectif salarié de la troisième usine. On doit avoir :

$$\frac{(100\times 10)+(120\times 20)+(90\times x)}{10+20+x}=104 \text{, d'où } x = 20.$$

9. Ecrire le nombre suivant x, ayant un développement décimal infini et périodique, sous la forme d'une fraction rationnelle : x = 2,356356356…

On a $1000x$ = 2356,356356…et par différence : $999x = 2354$, d'où $x=\frac{2354}{999}$.

10. Trouver une primitive de la fonction f définie, pour x>1, par $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

On a $f(x)=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$, donc $F(x)=x-2Ln(x+1)+k$

Exercice n° 2

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f_n(x)=\frac{n^2x^2+2(n-1)x+1}{x+1}$$

1. Résoudre l'équation $f_n(x)=0$. Il faut résoudre $n^2x^2+2(n-1)x+1=0$.

Soit $\Delta' = (n-1)^2 - n^2 = -2n+1$.

Si $n>1/2$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $n=1/2$, l'équation admet une racine double égale à 2.

Si $n<1/2$, l'équation admet deux racines : $x=\frac{1-n\pm\sqrt{\Delta'}}{n^2}$

2. Montrer que l'on peut exprimer $f_n(x)$ sous la forme $f_n(x)=a_nx+b_n+\frac{c_n}{x+1}$.

Par identification des polynômes, on obtient :

$$a_n=n^2, b_n=-n^2+2(n-1) \text{ et } c_n=n^2-2n+3.$$

3. Soit :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 a_n x + b_n + \frac{c_n}{x+1}dx = \left[a_n \frac{x^2}{2} + b_n x + c_n Ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{a_n}{2} + b_n + c_n Ln2 .$$

D'où $I_n = -\frac{n^2}{2} + 2(n-1) + (n^2 - 2n + 3)Ln2$

4. Calculer l'aire comprise entre les graphes de f_0 et f_1, et les axes verticaux d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Cette aire est égale à :

$$A = \int_0^1 \left| f_0(x) - f_1(x) \right| dx = \int_0^1 \left| -x - 1 + \frac{1}{x+1} \right| dx = 3/2 - Ln2$$

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{2n} = +\infty$

6. Tracer le graphe de la fonction f_1. On a : $f_1(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ et sa dérivée $f_1^{'}(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$ est nulle pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$. La fonction n'est pas définie pour $x = -1$.

Son graphe admet les droites d'équation $x = -1$ et $y = x - 1$ comme asymptotes.

La fonction est décroissante sur l'intervalle $\left]-1, -1 + \sqrt{2}\right[$ et croissante sur l'intervalle $\left]-1 + \sqrt{2}, + \infty\right[$.

7. Montrer que le graphe de la fonction f_1 admet un point de symétrie. Ce point de symétrie correspond à l'intersection des deux asymptotes, à savoir le point de coordonnées (-1, -2). Avec le changement de variables : $x = X - 1$ et $y = Y - 2$, on obtient $Y = X + \frac{2}{X}$ qui est une fonction impaire.

Exercice n° 3

1. On a : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_0^1 (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx = -1/2 + Ln2$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} Log(1 + \frac{k}{n})$$

On a : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}Log(1+\frac{k}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}Log(1+\frac{k}{n}) = \int_0^1 xLn(x+1)\,dx$ (somme de Riemann).

Avec une intégration par parties, on retrouve l'intégrale précédente et :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}Log(1+\frac{k}{n}) = 1/4$$

Exercice° 4

Soit *f* une application numérique d'une variable réelle.

On rappelle que *f* est convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombre réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

On dit que *f* est quasi-convexe si et seulement si pour tout couple (x, y) de nombre réels et tout nombre réel λ compris entre 0 et 1, on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que toute fonction convexe est quasi-convexe.

Soit *f* une fonction convexe, on a :

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\, Sup(f(x), f(y)) + (1-\lambda)Sup(f(x), f(y))$ d'où

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y))$ et *f* est quasi-convexe.

2. Donner un exemple de fonction quasi-convexe et non convexe.

Par exemple, une fonction « convexe par morceaux » :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ (x-1)^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe et concave. Par exemple *Lnx*.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

1. La dérivée de f est égale à : $f^{'}(x)=\dfrac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$. Cette dérivée est toujours positive, donc la fonction est croissante. Elle passe par les points : (0,1) et (1,e/2). Elle tend vers $+\infty$ à $+\infty$ (branche parabolique dans la direction oy) et vers 0 à $-\infty$ (asymptote horizontale).

En x=1, on a une tangente horizontale et un point d'inflexion.

2. La convexité de *f* s'étudie avec le signe de la dérivée seconde.

On peur remarquer que $f^{''}(x)=e^x(v(x)+v^{'}(x))$, où $v(x)=\dfrac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$. Le signe de $f^{''}$ est celui de $v(x)+v^{'}(x)$.

On obtient : $v(x)+v^{'}(x)=\dfrac{(1-x)}{(1+x^2)^3}(-x^3+3x^2-5x-1)$

Ce polynôme d'ordre 3 est strictement décroissant sur R et s'annule pour une seule valeur α comprise entre -1 et 0.

La fonction *f* est donc convexe sur $]-\infty,\alpha]$ et $[1,+\infty[$, et concave entre α et 1.

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f(x)=\dfrac{x}{1+E(x)}$, où *E(x)* désigne la partie entière de *x*.

1. Quel est le domaine de définition de *f* ? La fonction *f* est définie pour $E(x)\neq -1$, donc pour $x\notin[-1,0[$.

2. Etudier la continuité de *f*.

Pour tout $x\in[n,n+1[\cap Df$, $E(x)=n$ et $f(x)=\dfrac{x}{1+n}$ est une fonction affine continue.

Pour *x*=*n*, $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=1\neq f(n)=\dfrac{n}{n+1}$ et *f* n'est pas continue. En conclusion, *f* est continue sur $Df\cap(R-Z)$.

3. Soit g(x) la fonction indicatrice des nombres rationnels (*Q*), à savoir :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \in R - Q \end{cases}$$

Soit $h(x) = f(x) \times g(x)$. Etudier la continuité de *h*.

La fonction *g* est définie sur *R* et continue en aucun point (densité des rationnels et des irrationnels dans *R*). Par conséquent *h* n'est continue en aucun point de *Df*.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de *f*.

On a aussi: $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. Cette fonction est définie sur $R^* - \{-1\}$. Sa dérivée est égale à : $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ qui est nulle pour $x = -\frac{1}{2}$. La fonction est croissante pour $x < -1/2$ et décroissante pour $x > -1/2$.

2. Graphe de *f*.

Les deux axes et la droite d'équation $x = -1$ sont des asymptotes. La fonction admet un maximum local en $x = -\frac{1}{2}$, qui est égal à -4.

3. Calculer $\underset{x \to \infty}{Lim} \int_1^x f(t)\,dt$ et interpréter le résultat.

$$\int_1^x f(t)\,dt = \left[Ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \right]_1^x = Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + Ln2 \text{ et } \underset{x \to \infty}{Lim} \int_1^x f(t)\,dt = Ln2$$

Cette limite correspond à l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe des x et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice n° 2

Soit la suite $(t_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$t_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

1. Calculer $t_n(\alpha)$ en fonction de n et selon les valeurs de α .

On a, pour $\alpha \neq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_k^{k+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left((k+1)^{-\alpha+1} - k^{-\alpha+1}\right)$, puis

$$t_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right).$$

Pour $\alpha = 1$, $t_n(\alpha) = Ln(n+1)$.

2. Calculer $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha)$.

Si $\alpha = 1$, $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha) = +\infty$,

Si $\alpha > 1$, $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$,

Si $\alpha < 1$, $\lim_{n\to\infty} t_n(\alpha) = +\infty$.

3. Interpréter géométriquement $t_n(\alpha)$.

$t_n(\alpha)$ correspond à l'aire comprise l'axe ox, le graphe de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = n+1$.

4. Soit la suite $(u_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$u_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n(\alpha))$ selon les valeurs de α .

La fonction $f(k) = \frac{1}{k^\alpha}$ est positive, continue et décroissante. La suite $u_n(\alpha)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$ existe, donc si et seulement si $\alpha > 1$.

5. Trouver un encadrement de la limite de $(u_n(\alpha))$ quand elle existe.

On suppose $\alpha > 1$.

Pour $k \leq x \leq k+1$, on a : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ et par intégration : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

Puis par somation sur k de 1 à n, on obtient : $u_n(\alpha) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \leq t_n(\alpha) \leq u_n(\alpha)$. En notant $l(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))$ et par passage à la limite, on obtient :

$l(\alpha) - 1 \leq \frac{1}{\alpha - 1} \leq l(\alpha)$, d'où $\frac{1}{\alpha - 1} \leq l(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ (on rappelle que $\alpha > 1$).

6. Interpréter géométriquement $u_n(\alpha)$

$u_n(\alpha)$ correspond à la somme des aires des rectangles sous le graphe de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ (à partir de x=1 avec un pas de sous division égal à 1).

Exercice n° 3

Deux assurances automobiles proposent chacune un contrat (A et B). On dispose des données suivantes :

- Un quart des conducteurs a choisi le contrat A. Un cinquième le contrat B (les autres conducteurs ayant souscrit des contrats dans d'autres compagnies).
- Lors d'une enquête sur les conducteurs, on constate que sur 1000 conducteurs responsables d'un accident de la route, 160 ont souscrit le contrat A et 120 le contrat B.

On choisit un conducteur au hasard dans la population et on note :

R = « le conducteur est responsable d'un accident » et,

C = « le conducteur a souscrit un contrat A ou B »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un contrat le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{\textit{Prob. qu'un conducteur responsable ait souscrit un autre contrat}}{\textit{Prob. qu'un conducteur responsable ait souscrit un contrat A ou B}}$$

Calculer λ pour chacun des deux contrats. Que peut-on en conclure ?

On a :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{P(R \cap \overline{C})P(C)}{P(R \cap C)P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C})P(R)P(C)}{P(C)P(R)P(\overline{C})} = \frac{P_R(\overline{C})P(C)}{P_R(C)P(\overline{C})} = \frac{(1-P_R(C))P(C)}{P_R(C)(1-P(C))}$$

Pour le contrat A : $\lambda = \frac{(1-0{,}16)\times 0{,}25}{0{,}16\times(1-0{,}25)} \approx 1{,}75$

Pour le contrat B : $\lambda = \frac{(1-0{,}12)\times 0{,}2}{0{,}12\times(1-0{,}2)} \approx 1{,}83$

Les deux contrats ont quasiment la même efficacité, mais l'effectif de la population est trop faible pour en tirer des conclusions plus précises. On peut ajouter que ces deux compagnies d'assurance ont plutôt des assurés moins risqués que les autres (pour la première 16 % de responsables pour un quart de la population, et pour la deuxième 12% pour un cinquième de la population).

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) .

Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$.

f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

2. f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $f_n(u_n) = 0$, $f_n(\frac{Lnn}{2n}) \approx \frac{Lnn}{2} > 0$ et $f_n(2\frac{Lnn}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Lnn}{2n} \le u_n \le 2\frac{Lnn}{n}$.

Problème

Soit g une fonction numérique d'une variable réelle qui vérifie : $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels.

1. Montrer que g est impaire.

On a : $g(0) = g(0+0) = 2g(0)$, donc $g(0) = 0$. Puis $g(x + (-x)) = g(x) + g(-x) = 0$, donc g est impaire.

2. Calculer $g(nx)$ en fonction de n (entier naturel) et de $g(x)$.

$g((n+1)x) = g(nx + x) = g(nx) + g(x)$ et par récurrence, $g(nx) = ng(x)$.

3. Calculer $g(ax)$ en fonction de a (nombre rationnel) et de $g(x)$.

Soit $a = \frac{p}{q}$. $pg(x) = g(px) = g(q \times \frac{p}{q} x) = qg(\frac{p}{q} x)$, donc $g(ax) = ag(x)$

4. En supposant que g est continue, expliciter $g(x)$.

D'après la question précédente, pour x=1, on a : $g(a) = ag(1)$. L'ensemble des nombres rationnels étant dense dans l'ensemble des réels, par passage à la limite (g est continue), on obtient : $g(x) = xg(1)$ pour tout réel x.

5. Soit f une application continue de R dans C (ensemble des nombres complexes) telle que :

$$f(x) = \exp(2\pi i g(x))$$

Montrer que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels.

On a :

$$f(x+y)=\exp(2\pi i g(x+y))=\exp(2\pi i(g(x)+g(y)))=\exp(2\pi i g(x))\times\exp(2\pi i g(y))$$
$$f(x+y)=f(x)\times f(y)$$

6. Calculer $f(0)$.

$f(0)=f(0+0)=f(0)^2$, donc $f(0)=0$ ou 1. Si $f(0)=0$, alors $f(x)=f(x)\times f(0)=0$ et *f* est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'expression de *f* (exponentielle). Donc $f(0)=1$

7. Montrer que *f* est dérivable.

Comme *f* est continue, elle admet une primitive *F*. $F(s)=\int_0^s f(x)dx$.

En intégrant la relation : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ par rapport à *x*, on obtient : $\int_0^s f(x+y)dx=f(y)\int_0^s f(x)dx$, puis $\int_y^{s+y} f(x)dx=f(y)\int_0^s f(x)dx$, donc $F(s+y)-F(y)=f(y)\times F(s)$.

On vérifie que $F(s)\neq 0$ pour *s* suffisamment petit car *f* est continue en 0 et *f*(0)=1. En effet, Pour $\varepsilon=1/2$, il existe $\alpha>0$, tel que $|s|<\alpha \Rightarrow |f(s)-1|<1/2$.

Si $|s|<1/2$, $|F(s)-s|=\int_0^s (f(x)-1)dx\leq\int_0^{|s|}|f(x)-1|dx\leq\int_0^{|s|}1/2=\frac{|s|}{2}$, d'où

$|s|=|F(s)-s+F(s)|\leq\frac{|s|}{2}+|F(s)|\Rightarrow 0<\frac{|s|}{2}\leq|F(s)|$ et $F(s)\neq 0$.

En conclusion, $\frac{F(s+y)-F(y)}{F(s)}=f(y)$ et *f* est dérivable.

8. Donner l'expression analytique de *f*.

On a : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$. En dérivant cette relation par rapport à *x*, puis pour *x*=0, on obtient : $f'(y)=f(y)\times f'(0)$. Les solutions de cette équation sont de la forme : $f(x)=k\exp(f'(0)x)$ et comme *f*(0)=1, *k*=1.

On a : $|f(x)|=1$ et $|\exp(f'(0)x|=\exp(\mathrm{Re}(f'(0))$. $f'(0)$ est un imaginaire pur que l'on peut écrire $f'(0)=2\pi i a$ et $f(x)=\exp(2\pi i a)$.