AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée est égale à $f'(x) = 2xe^{x^2} Ln(1+x) + \frac{e^{x^2}}{1+x}$ et $f'(0) = 1$.

2. Il faut que la dérivée seconde soit nulle pour obtenir un point d'inflexion et qu'elle change de signe :

$$f''(x) = 6x - 6 = 0, \text{ d'où } x = 1.$$

3. $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2) = 0$, d'où $x = 1$ car $(x^2 + x + 2) \neq 0$.

4. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4 = 0$, d'où $x = 1$ avec une multiplicité d'ordre 4.

5. $I = Ln4 - \int_0^1 Ln(1+x)\,dx = Ln4 - [xLn(1+x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = Ln2 + [x - Ln(1+x)]_0^1 = 1$.

6. $\underset{n\leftarrow\infty}{Lim} S_n = -1 + \underset{n\to\infty}{Lim} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = -1 + 2 = 1$.

7. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ est définie par :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt, \text{ soit ici 7/3.}$$

8. Si i désigne le taux d'inflation de février, on doit avoir :

$$(1+0{,}008)(1+i) = 1{,}01808, \text{ soit } i = 1\%.$$

9. Par combinaison des deux lignes, on obtient :

$$2x^3 + 3x^2 - 5 = (x-1)(2x^2 + 5x + 5) = 0, \text{ d'où } x = y = 1, \text{ car } (2x^2 + 5x + 5) \neq 0.$$

10. La moyenne nationale est égale à : $\frac{(8{,}2\times120)+(13{,}1\times80)+(9{,}68\times100)}{(120+80+100)} = 10$.

Exercice n° 2

1. La dérivée de f est égale à $f^{'}(x)=\dfrac{1-Ln\,x}{x^2}$, cette fonction est croissante sur l'intervalle $]0,e]$, décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$ et nulle pour $x=e$.

2. La dérivée seconde de f est égale à : $f^{''}(x)=\dfrac{(-3+2Ln\,x)}{x^3}$ et cette dérivée seconde s'annule pour $x=e\sqrt{e}$ et change de signe au voisinage. Le point de coordonnées $(e\sqrt{e},3/2e\sqrt{e})$ est donc un point d'inflexion pour cette fonction.

3. On obtient directement $I=\int_1^e f(x)\,dx=\left[\dfrac{(Ln\,x)^2}{2}\right]_1^e=1/2$.

Exercice n° 3

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+z=2 \\ x+2y+3z=\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

En combinant la première et la troisième ligne, on obtient : $z=x+\dfrac{1}{2}$, puis en remplaçant dans les deux premières équations; $xy+x=\dfrac{3}{2}$ et $2x+y=\dfrac{5}{2}$, d'où $-4x^2+7x-3=0$. On obtient alors les solutions suivantes :

$$(x,y,z)=(1,1/2,3/2) \text{ ou } (3/4,1,5/4).$$

Exercice n° 4

1. Cette fonction f est strictement convexe (dérivée seconde strictement positive), elle admet un minimum unique en la valeur qui annule la dérivée première.

$f'(x)=2ax-2(1-x)\;\; b=0$ pour $x=\dfrac{b}{a+b}$ et le minimum est égal à $f(\dfrac{b}{a+b})=\dfrac{ab}{a+b}$

2. On a $\frac{ab}{a+b} = 2/3$ et $a+b=3$. Il s'agit donc de trouver deux nombres connaissant leur produit et leur somme. On trouve $b=1$ et $a=2\,(b<a)$.

3. Les points d'intersection sont déterminés par l'équation : $f(x)=g(x)$ ou encore $ax^2+(1-x)^2 b = \alpha x$, ce qui revient à résoudre l'équation : $(a+b)x^2-(\alpha+2b)x+b=0$. Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta = (\alpha+2b)^2 - 4b(a+b) = \alpha^2 + 4\alpha b - 4ab$.

Si $0<\alpha<-2b+2\sqrt{b(a+b)}$, on a deux points d'intersection,

Si $\alpha = -2b+2\sqrt{b(a+b)}$, on a un seul point d'intersection (la droite est tangente à la parabole),

Si $\alpha > -2b+2\sqrt{b(a+b)}$, pas d'intersection entre les deux graphes.

4. Montrons que l'axe vertical qui passe par le minimum de la fonction est un axe de symétrie.

Soit $X = x - \frac{b}{a+b}$, la fonction devient $f(x) = f(X+\frac{b}{a+b}) = (a+b)X^2 + \frac{ab}{a+b}$ et cette fonction est paire en *X*.

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie sur R^* par : $f(x) = \frac{Ln(1+x^2)}{x}$

1. On peut remarquer que cette fonction est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine) et faire l'étude que pour les valeurs positives. De plus $\underset{x\to 0}{Lim}\, f(x) = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{x^2}{x} = 0$, on peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0)=0$.

La dérivée de f est égale à $f'(x) = \frac{2x^2-(1+x^2)Ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$.

ou encore $2(t-1)-tLnt=0$ en posant $t=1+x^2$, $t\geq 1$.

Soit $z(t)=2(t-1)-tLnt=0$, $z'(t)=1-Lnt$ qui est nulle pour $t=e$.

On trouve $z(e)=e-2>0$ et par exemple $z(e^2)=-2<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur t_0 dans l'intervalle $]e,e^2[$ qui annule $z(t)$. Soit $x_0=\sqrt{t_0-1}$. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0,x_0[$ et décroissante sur $]x_0,+\infty[$.

La fonction est croissante sur l'intervalle $]0,\sqrt{e-1}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{e-1},+\infty[$.

2. $I = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^1 Ln(1+x^2)\, dx = \left[x\, Ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = Ln2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

On obtient :

$$I = Ln2 - 2 + 2\left[Arctgx\right]_0^1 = Ln2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel *n* strictement positif.

On vérifie facilement par récurrence que $u_n > 0$ pour tout *n*.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{Ln(1+u_n^2) - u_n^2}{u_n} < 0$,

La suite (u_n) étant minorée et décroissante, elle converge vers une limite unique l solution de l'équation $l = f(l)$, car f est continue, avec son prolongement par continuité en 0, d'où $l = 0$

Exercice n° 6

On note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x. On définit alors la fonction numérique f par : $f(x) = x\,E(x)$.

1. $E(x)$ étant constante sur tout intervalle $[n, n+1[$, où *n* est un entier. Elle est continue et dérivable sur $R - Z$. Donc f est également continue et dérivable sur $R - Z$. Les questions ne se posent qu'aux valeurs entières.

Pour $x = n$, $f(x) = n^2$ et $\underset{x\to n^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to n^-}{Lim}\, x(n-1) = n(n-1) \neq f(n)$ si $n \neq 0$.

En conclusion f est continue seulement en $x = 0$ parmi les valeurs entières.

2. D'après la question précédente, la dérivabilité ne se pose qu'en zéro. $\underset{x\to 0^-}{Lim} \frac{(f(x) - f(0))}{x} = -1 \neq f(0) = 0$, donc f n'est pas dérivable à l'origine.

3. $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} x\, dx + 0 + \int_{1}^{2} x\, dx = 1/2 + 3/2 = 2$

Exercice n° 7

On considère la fonction f définie sur $R^{+*} \times R^{+*}$ par $f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, où R^{+*} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs, α et β étant des paramètres réels strictement positifs.

1. On obtient : $(g_y)^{'}(x) = \alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta}$. La dérivée étant strictement positive, la fonction est strictement croissante. Elle est convexe si $\alpha > 1$, concave pour $0 < \alpha < 1$ et constante si $\alpha = 1$.

2. Comme la fonction f est croissante, son maximum est atteint pour la plus grande valeur possible de x qui vérifie la contrainte $ax + by \leq r$, donc pour $x = \dfrac{r - by}{a}$

Ce maximum est égal à $(\dfrac{r - by}{a})^{\alpha} y^{\beta}$

3. On peut considérer que x et y correspondent à deux produits. L'individu cherche à maximiser sa consommation en x (quitte à diminuer sa consommation en y, sans être nulle) sans dépasser son revenu (r) disponible. La fonction correspond à une fonction de Cobb-Douglas.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

1. Le graphique de la fonction f admet la droite $y = x - 3$ comme asymptote si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-3) = 0.$$

   À partir de la première limite nous obtenons

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3}{(b+cx)^3} = \frac{a}{c^3}$$

   et

$$-3 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{c^3x^4}{(b+cx)^3} - x \right) = -3\frac{b}{c}.$$

   La seconde limite fournit les mêmes relations. En conclusion, les constantes a, b et c doivent satisfaire les relations

$$a = c^3 \text{ et } b = c.$$

2. On en déduit que l'expression de la fonction est

$$f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}, \text{ pour tout } x \in E = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

3. Comme

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty,$$

le graphique de f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale. La dérivée de la fonction f est

$$f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$$

et nous avons le tableau de variation suivant :

x	-∞		-4			-1			0		+∞
$f'(x)$		+	0	-		|		-	0	+	
$f(x)$	-∞	↑	-256/27	↓	-∞	|	+∞	↓	0	↑	+∞

Exercice 2

- **A.** Si $x_0 \geq a$.

  1. Nous démontrons par récurrence que $x_n \geq a$ pour tout entier $n \geq 1$. D'abord, $x_1 - a = \frac{a(x_0-a)}{x_0+a} \geq 0$, donc $x_1 \geq a$. Ensuite, en supposant que $x_{n-1} \geq a$, nous avons

  $$x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+a} \geq \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+x_{n-1}} = a.$$

  2. $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a-x_n)}{x_n+a} \leq 0$, car $(a - x_n) \leq 0$ et $x_n > 0$.
  3. La suite étant décroissante et minorée, elle est par conséquent convergente. Notons par l_1 sa limite, $l_1 = \lim_{n\to+\infty} x_n$. À partir de la relation de récurrence nous avons :

  $$l_1 = \frac{2al_1}{l_1+a},$$

  d'où on obtient $l_1 = 0$ ou $l_1 = a$. D'autre part, nous savons que $x_n \geq a > 0$, ce qui implique que $l_1 \geq a > 0$. Par conséquent, la limite recherchée est $l_1 = a$.

- **B.** Si $x_0 < a$.

  1. D'abord, $x_1 - a = \frac{a(x_0-a)}{x_0+a} < 0$, donc $x_1 < a$. En plus, nous avons $x_1 = \frac{2ax_0}{x_0+a} > 0$, donc $0 < x_1 < a$. Par récurrence on démontre que $0 < x_n < a$ pour tout entier $n \geq 1$.
  2. $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a-x_n)}{x_n+a} > 0$, car $(a - x_n) > 0$ et $x_n > 0$.
  3. La suite étant croissante et bornée, elle est par conséquent convergente. Soit $l_2 = \lim_{n\to+\infty} x_n$. À partir de la relation de récurrence nous obtenons $l_2 = 0$ ou $l_2 = a$. D'autre part, comme $0 < x_n < a$ et la suite est strictement croissante, nous en déduisons $l_2 = a$.

Exercice 3

1. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ étant périodiques de période 2π, la fonction f est périodique de période 2π. Par conséquent, on peut d'abord considérer la restriction de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
2. En résolvant l'équation $g'(x) = 0$, nous obtenons $-\sin(x) - \cos(x) = 0$, qui a les solutions $x_1 = 3\pi/4$ et $x_2 = 7\pi/4$ sur $[0, 2\pi]$. En tenant compte du fait que $g(0) = g(2\pi) = \lambda + 1$ et de la variation de g, nous obtenons que la fonction g a un minimum global $g(3\pi/4) = \lambda - \sqrt{2}$ et un maximum global $g(7\pi/4) = \lambda + \sqrt{2}$. Par conséquent, $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.
3. Si $\lambda \leq -\sqrt{2}$, on a $g(x) \leq 0$, donc $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. Cette fonction est évidement dérivable sur $[0, 2\pi]$. Si $\lambda \geq \sqrt{2}$, on a $g(x) \geq 0$, donc $f(x) = \lambda + \cos(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$, cette fonction étant dérivable sur $[0, 2\pi]$.
4. Pour $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$, comme la fonction g est continue, avec $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$, $g(3\pi/4) = \lambda - \sqrt{2} < 0$ et $g(7\pi/4) = \lambda + \sqrt{2} > 0$, il en résulte par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe x_0, $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$, tel que $g(x_0) = 0$. Par conséquent, sur l'intervalle $[3\pi/4, 7\pi/4]$ la fonction f a l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{si } 3\pi/4 < x < x_0, \\ \lambda + \cos(x), & \text{si } x_0 < x < 7\pi/4. \end{cases}$$

   Prouvons que la fonction f n'est pas dérivable en x_0. En effet, nous avons $f'_g(x_0) = \cos(x_0)$ et $f'_d(x_0) = -\sin(x_0)$, où f'_g et f'_d désignent les dérivées à gauche respectivement à droite de f. L'égalité $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ a lieu si et seulement si $\cos(x_0) = -\sin(x_0)$, c'est-à-dire si $x_0 = 3\pi/4$ ou $x_0 = 7\pi/4$, ce qui n'est pas possible car $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en x_0.
5. On conclut que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda \leq -\sqrt{2}$ ou $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Exercice 4

- **A.**
  1. Nous avons
  $$z_2 = \frac{1 - \overline{z}_1}{1 + \overline{z}_1} = \frac{1 - a + bi}{1 + a - bi} = \frac{1 - a^2 - b^2 + 2bi}{(1+a)^2 + b^2},$$
  donc
  $$m = \frac{1 - a^2 - b^2}{(1+a)^2 + b^2} \text{ et } n = \frac{2b}{(1+a)^2 + b^2}.$$
  2. Nous obtenons
  $$z_1 - z_2 = \frac{a[(1+a)^2 + b^2] + a^2 + b^2 - 1 + (a^2 + b^2 - 1 + 2a)bi}{(1+a)^2 + b^2}$$

et

$$z_2^2 = \frac{(1-a^2-b^2)^2 - 4b^2 + 4(1-a^2-b^2)bi}{[(1+a)^2+b^2]^2},$$

qui fournissent les parties réelles et imaginaires demandées.

3. Le nombre complexe $z_1 - z_2$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire :

$$(a^2 + b^2 - 1 + 2a)b = 0. \tag{0.1}$$

De même, pour que le nombre complexe z_2^2 soit un nombre réel il faut que sa partie imaginaire soit nulle, ce qui implique

$$(a^2 + b^2 - 1)b = 0. \tag{0.2}$$

Nous devons résoudre le système formé par les équations (0.1) et (0.2). Si $b = 0$, les deux équations sont satisfaites et nous obtenons $z_1 = a$, avec a un réel quelconque. Si $b \neq 0$, alors de l'équation (0.2) on obtient $a^2 + b^2 = 1$, ce qui implique, en utilisant l'équation (0.1), que $a = 0$. À partir de l'équation (0.2) on en déduit que $b = 1$ ou $b = -1$, donc les valeurs possibles de z_1 dans ce cas sont $z_1 = i$ ou $z_1 = -i$.

- **B.**

1. Pour tout réel x nous avons $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 2$. Par conséquent, nous obtenons

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 2, \\ 0, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

D'autre part,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x) - 2)^2 = \begin{cases} 9, & \text{si } x < 0, \\ 4, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2. La fonction $f \circ g$ est constante sur $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, donc elle est continue sur $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$. Comme

$$\lim_{x \to 2} f \circ g(x) = 1 \neq f \circ g(2) = 0,$$

on obtient que $f \circ g$ n'est pas continue en $x = 2$.
La fonction $g \circ f$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, donc elle est continue sur ces deux intervalles. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g \circ f(x) = 9 \neq 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g \circ f(x),$$

donc la fonction $g \circ f$ n'a même pas limite en $x = 0$ et, donc, elle n'est pas continue en $x = 0$.

Exercice 5

1. Soit A l'événement $A = \{$trouver plus de 2 sujets ayant la maladie M dans le groupe de 100 sujets$\}$ et X la variable aléatoire qui donne le nombre de sujets ayant la maladie M dans ce groupe de 100 personnes. Nous pouvons alors écrire

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > 2).$$

2. La variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(100; 0,03)$, avec

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{100}^{k} 0,03^{k}(1 - 0,03)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 100.$$

3.

$$\begin{aligned} F(2) &= \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 0,97^{100} + 100 * 0,03 * 0,97^{99} + \frac{100 * 99}{2} * 0,03^{2} * 0,97^{98} \\ &= 0,4199. \end{aligned}$$

4. Nous calculons la probabilité demandée :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 0,5801.$$

5. Le nombre moyen des malades dans le groupe de 100 sujets est donné par

$$\mathbb{E}(X) = 100 * 0,03 = 3.$$