AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de la fonction f est égale à : $f'(x) = \dfrac{e^x \sin x}{(1+e^x)^2} + \dfrac{e^x \cos x}{1+e^x}$

2. $\int_0^3 E(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 2dx = 1 + 2 = 3$

3. Soit x l'âge de Michel, y celui de Paul et z celui de Pierre. On a :
$x = y+3,\ x = z+7,\ x+y+z = 101$, d'où $z = 30\ (x = 37, y = 34)$

4. De ce système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2x+3y = 12 \end{cases}$, on obtient $x = \dfrac{12-3y}{2}$ et on remplace dans la première équation pour obtenir : $5y^2 - 72y + 124 = 0$. Les solutions sont :
$(x = 3, y = 2)$ et $(x = -63/5, y = 62/5)$

5. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$. Il est évident que $f(x) > 0$ pour tout x, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

6. La suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e}$ est une suite géométrique dont la raison est strictement inférieure à 1. Elle converge donc vers 0.

7. La variation du pouvoir d'achat de votre salaire durant cette période est égale à +12% ($\dfrac{1{,}40}{1{,}25} = 1{,}12$).

8. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} x^k\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} = +\infty$

9. La moyenne de l'ensemble des candidats est égale à :

$$\frac{6\times10+3\times8+1\times12}{10} = 9{,}6$$

10. $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k - n\overline{x} = n\overline{x} - n\overline{x} = 0$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Cette fonction est définie pour tout nombre réel, sa dérivée est égale à $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$4/e^2$	$\downarrow$	0

2. La convexité de f est étudiée à partir des valeurs qui annulent sa dérivée seconde. On a $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Cette dérivée s'annule pour $x = 2 \pm \sqrt{2}$. La fonction est convexe sur les intervalles : $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right]$ et $\left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$

3.
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-e^{-x}x^2\right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\left[-e^{-x}x\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{5}{e} + 2$$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2(x-1)g(x)$$

où $g(x)$ est la fonction indicatrice des nombres rationnels (Q)

1. Soit x un nombre rationnel, alors la suite $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est une suite de nombres irrationnels qui converge vers x.

2. Etude de la continuité de g sur R.

En un point $x \in R - Q$, $g(x) = 0$ et il existe une suite de nombres rationnels x_n qui converge vers g (Q est dense dans R), donc $g(x_n) = 1$ et g n'est pas continue en x.

En un point $x \in Q$, $g(x) = 1$ et il existe une suite de nombres irrationnels x_n qui converge vers g (question 1), donc $g(x_n) = 0$ et g n'est pas continue en x.

En conclusion g n'est continue en aucun point.

3. Etude de la continuité de f sur R.

Le raisonnement est identique à celui de la question précédente à savoir que tout nombre réel est à la fois limite d'une suite de nombres rationnels et de nombres irrationnels. f est donc seulement continue en 0 et 1.

4. Etude de la dérivabilité de f sur R. Seuls les points 0 et 1 peuvent être des points de dérivabilité pour f.

En 1, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=x^2 g(x)$ et cette expression n'admet pas de limite quand $x \to 1$ (distinguer les cas rationnels et irrationnels).

En 0, $\frac{f(x)-f(0)}{x}=x(x-1)g(x)$ qui tend vers 0 et f est dérivable en zéro avec une dérivée égale à 0.

Exercice n° 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}+1}$ et $u_0 = 1$

1. On vérifie par récurrence que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) converge, sa limite l vérifie le théorème du point fixe, $l = \frac{l+2}{l+1}$ et on trouve $l = \sqrt{2}$

3. La fonction f est une fonction homographique décroissante qui admet les droites $x = -1$ et $y = 1$ comme asymptotes.

4. L'aire comprise entre l'axe *Ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à

$$\int_1^2 \frac{x+2}{x+1}dx = \int_1^2 (1+\frac{1}{x+1})dx = \left[x+Ln(x+1)\right]_1^2 = 1+Ln(3/2)$$

5. Comme la fonction f est décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les suites extraites de rang pair et impair sont monotones. La suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ (on le vérifie par récurrence à partir de u_1) et la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Ces deux suites sont adjacentes et (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice n° 5

Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \text{, puis } \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$$

1. On a, en posant $t = x + p$,

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{x+p}dx = \frac{1}{p}\int_p^{p+1} \frac{t-p}{t}dt = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = u_p$$

2. On a : $\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$, d'où $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

On en déduit que $0 \leq \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leq \sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$

et $\gamma_{n+1} - \gamma_n = u_{n+1} \geq 0$, la suite γ_n est croissante et majorée donc elle converge.

Exercice n° 6

1. Soit $y = f(x) - g(x) = Ln(x+e) - \sqrt{x+1}$ sur R^+, sa dérivée est $y' = \frac{2\sqrt{x+1} - (x+e)}{2\sqrt{x+1}(x+e)}$, elle est du signe du numérateur. Soit $z = 2\sqrt{x+1} - (x+e)$ dont la dérivée $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$ est toujours négative, et y' aussi, donc y est décroissante et négative. En conclusion : $f(x) \leq g(x)$.

2.

$$I_n = \int_0^n (\sqrt{x+1} - Ln(x+e))dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^n - \int_e^{n+e} Lnt\,dt = \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1) - [tLnt - t]_e^{n+e} \text{, d'où}$$

$I_n = \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1) - (n+e)Ln(n+e) + (n+e)$ et $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$.

3. On a, pour x positif, $f(x)$ et $g(x)$ minorés par 1 donc les valeurs $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont comprises entre zéro et 1 et peuvent correspondre à des probabilités. D'après la première question, $f(x) \leq g(x)$ et A a plus de chances de gagner la course.

Exercice n° 7

Soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $\left[-1, +\infty\right[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in \left]0,1\right[$.

2. Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ (car $x_n \in \left]0,1\right[$)

et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

1. $$\left\{\begin{array}{lcl} u+v & = & -\frac{1}{2} \\ uv & = & -\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u & = & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ v & = & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 1$, $1+z+z^2+z^3+z^4$ est la somme des 5 premiers termes d'une série géométrique de raison z, c'est à dire $1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$. Le cas particulier de $z=\omega$ donne $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$ (ou encore $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$ est la somme des racines 5-ième de l'unité qui est égale à 0).

3. On en déduit aisément l'égalité demandée en remarquant que $\omega^3 = \mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{5}}$ et que $\omega^4 = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}}$ et en utilisant le fait que $\mathrm{e}^{i\frac{l\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-i\frac{l\pi}{5}} = 2\cos(l\pi/5)$, $l=2,4$.

4. Les formules trigonométriques $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\cos(a-b)$ et $\cos(-a) = \cos(a)$ (a et b réels), donnent immédiatement le résultat
$$\begin{array}{lcl} \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) - \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) & = & \cos(\frac{4\pi}{5}), \\ \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) + \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) & = & \cos(\frac{2\pi}{5}). \end{array}$$

5. D'après la question 3 et en sommant les deux égalités de la question précédente, on obtient la résultat $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$.

6. Les équations des questions 3 et 5 correspondent aux équations du système de la question 1, on en déduit que
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cos(\frac{4\pi}{5}) & = & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ \cos(\frac{2\pi}{5}) & = & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array} \right. .$$

Exercice 2

- **A.**

  1. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x) - 0}{x-0} = 0 = f'_d(0) = f'_g(0),$$
     où f'_d et f'_g désignent les dérivées à droite respectivement à gauche de f. La fonction f est par conséquent dérivable en 0. En dehors du point 0, f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables.
  2. Pour $x < 0$, $f^{(2)}(x) = 2$, où $f^{(2)}$ désigne la dérivée seconde de f. De même $f_g^{(2)}(0) = 2$. Pour $x > 0$ la dérivée première de f, $f'(x) = (1/x^2)\exp(-1/x)$ est dérivable en tant que composée et produit de fonctions dérivables. Etudions la dérivée seconde à droite de f en 0 :
     $$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x^2)\exp(-1/x) - 0}{x-0} = 0 = f_d^{(2)}(0) \neq f_g^{(2)}(0),$$
     donc f n'admet pas de dérivée seconde en 0. Pour $x > 0$,
     $$f^{(2)}(x) = ((-2/x^3) + (1/x^4))\exp(-1/x).$$

- **B.** Quand $x \neq 0$,
  $$\begin{aligned} \frac{2}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{(1-\cos(x))} &= \frac{2(1-\cos(x)) - (1-(\cos(x))^2)}{(1-\cos(x))(\sin(x))^2} \\ &= \frac{(1-\cos(x))(2-(1+\cos(x)))}{(1-\cos(x))(1-\cos(x))(1+\cos(x))} \\ &= \frac{1}{(1+\cos(x))}, \end{aligned}$$
  qui tend vers $1/2$ quand x tend vers 0.

Exercice 3

1. On note F la fonction de répartition de X_1.

$$F(x) = I\!P(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0.99 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

2. S_{10} suit une loi Binomiale $B(10, 0.01) = B(n, p)$, avec $n = 10$ et $p = 0.01$.

3. $I\!E(S_{10}) = 10 * (0.01) = 0.1$ et $\mathrm{Var}(S_{10}) = 10 * (0.01) * (0.99) = 0.099 = np(1-p)$.

4. $I\!E(Z) = I\!E(S_{10} * 100) = 100 * 0.1 = 10$ et $\mathrm{Var}(Z) = 100^2 * 0.099 = 990$.

5. $I\!P(S_{10} \geq 1) = 1 - I\!P(S_{10} = 0) = 1 - 0.99^{10} = 0.095$.

Problème

1. **Convergence des suites** (a_n) **et** (b_n)

   - **a.** $\forall n \geq 1$ et puisque $a \neq b$, on a

$$\begin{aligned} 2(a_n - b_n) = (\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2 &> 0 \\ &\Leftrightarrow \\ a_n &> b_n \end{aligned} \tag{0.1}$$

et cela implique que

$$a_n - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} > 0 \tag{0.2}$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0. \tag{0.3}$$

Par récurrence b_n est positif ou nul, et d'après les relations (0.1) , (0.2) et (0.3), on a

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 2(a_{n+1} - b_{n+1}) &= a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} \\ &= a_n - b_n + 2\sqrt{b_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \\ &\leq a_n - b_n \end{aligned} \tag{0.4}$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant la relation (0.1).

- **b.** Quand $a = b$, on a $a_1 = b_1 = a$, et par récurence, on peut montrer que $\forall n \geq 0$, $a_n = b_n = a$.
- **c.** D'aprés la question 1.**a.**, a_n est une suite décroissante et b_n est une suite croissante qui vérifient d'après la relation (0.4),

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq 2^{-n}(a_1 - b_1),$$

  qui permet de conclure, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes : elles convergent et ont la même limite $M(a, b)$.

2. **Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique**

- **a.** La limite commune des suites $(a_k)_{k\geq n}$ et $(b_k)_{k\geq n}$ est $M(a_n, b_n)$ mais elle est aussi égale à $M(a, b)$, donc par unicité de la limite, $M(a_n, b_n) = M(a, b)$.
  Soient (a'_n) et (b'_n) les suites définies par $a'_0 = b$, $b'_0 = a$, alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$, ce qui implique que $M(a'_0, b'_0) = M(b, a) = M(a, b)$.
  Soient $(\tilde{a}_n)$ et $(\tilde{b}_n)$ les suites définies par $\tilde{a}_0 = \lambda a$, $\tilde{b}_0 = \lambda b$, on a alors $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$ et $\tilde{b}_1 = \lambda b$, et par récurrence on peut montrer que $\forall n \geq 0$, $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ et $\tilde{b}_n = \lambda b_n$. On en déduit que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.
- **b.** De la question précédente et si $a \neq 0$, on a $M(a, b) = M(\frac{ab}{a}, a) = aM(\frac{b}{a}, 1) = af(\frac{b}{a})$.

3. **Continuité de la fonction f**

- **a.** $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_0(x) = 1$, $v_0(x) = x$, et $\forall n > 0$, $u_n(x) = \frac{v_{n-1}+u_{n-1}}{2}$ et $v_n(x) = \sqrt{v_{n-1}u_{n-1}}$. Par récurrence sur n et d'après les opérations sur les fonctions continues, les fonctions (u_n) et (v_n) sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
- **b.** D'après (0.4), $\forall n > 0$ et $\forall x \geq 0$, on a

$$0 \leq u_n(x) - v_n(x) \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1}) \tag{0.5}$$

et

$$v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \leq \ldots \leq f(x). \tag{0.6}$$

  Les relations (0.5) et (0.6) impliquent que

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(x) - f(x) &\leq u_n(x) - v_n(x) \\ &\leq 2^{-(n-1)}(u_1(x) - v_1(x)) \end{aligned}$$

  Or

$$(u_1(x) - v_1(x)) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}(1 - x)\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}|1 - x|,$$

  ce qui achève la démonstration.

- **c.** En utilisant la question précédente restreinte à $x \in [0, A]$, où A est une constante strictement positive quelconque, on obtient que $\sup_{x\in[0,A]} |u_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}|1+A|$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La résultat admis $\mathcal{R}$ permet de conclure que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. **Etude de la fonction f au voisinage de 1**

- **a.** $\forall x \geq 0$,
$$v_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x), \ \forall n \geq 0,$$
qui pour $n = 1$ correspond à la relation demandée.

- **b.** Remarquons que $f(1) = M(1,1) = 1$ d'après la question 1.**b.**. D'après la question précédente, on a
$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \leq \frac{f(x)-1}{x-1} \leq \frac{x-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2};$$
en utilisant le théorème d'encadrement, f est dérivable au point $x = 1$ puisque
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{1}{2} = f'(1).$$

5. **Etude aux bornes de la fonction f**

- **a.** $f(0) = M(0,1) = 0$ puisque $v_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$. L'encadrement établi en 4.**a.** implique que f n'est pas dérivable à droite en 0 puisque
$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\sqrt{x}}{x},$$
et que la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, f admet une demi-tangente verticale en 0.

- **b.** Pour tout $x > 0$, $f(x) = M(x,1) = x\ M(1, 1/x) = x\ M(1/x, 1) = x\ f(1/x)$.

- **c.** D'après la question précédente, on a
$$\frac{f(x)}{x} = f(1/x),$$
et comme f est continue en 0, $\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = f(0) = 0$, ce qui implique que le graphe de f présente une branche parabolique de direction (Ox), quand x tend vers $+\infty$.

6. **Sens de variation de la fonction f**

- **a.** Les fonctions $u_0(x) = 1$, $v_0(x) = x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$, de même $u_1(x) = \frac{1+x}{2}$ et $v_1(x) = \sqrt{x}$ sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
- **b.** Par passage à la limite simple de u_n ou de v_n, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

7. **Représentation graphique de la fonction f**

- **a.** D'après la question 3.**b.**, on va approcher $f(x)$ par $u_n(x)$ pour $x \in [0, 3]$ et pour n tel que
$$2^{n-1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{3\log(10)}{\log(2)} = 10.96578.$$
Enfin $f(10) = 10f(0.1)$ et $f(100) = 100f(0.01)$. Avec $n = 11$, on obtient les résultats suivants :

x	0.01	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	2	3	10	100
$f(x)$	0.262	0.425	0.520	0.665	0.787	0.897	1.456	1.863	4.250	26.216

- **b.**