AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. La dérivée de la fonction f est égale à : $f'(x) = \frac{-2\sin x\cos x}{1+x^2} + \frac{(1-x^2)\cos^2 x}{(1+x^2)^2}$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = 1 - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = 1 - Ln(\frac{1+e}{2})$, en posant $u = e^x$
3. Une primitive de $\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ est $3\sqrt{1+x^2}$
4. Par soustraction des deux lignes, on obtient $y = Ln2$, puis $x = 3Ln2$:
5. On obtient $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x = -2+\sqrt{3}$ sur l'intervalle $\left]-2,+\infty\right[$ et on vérifie que la fonction admet un minimum en ce point, à savoir $f(-2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3-3}$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x^2-2}{x-1} \leq 0$ est $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right] \cup \left]1,\sqrt{2}\right]$
7. L'équation de la droite est $y = 2x-3$
8. $\lim_{x\to-\infty} (1+x-e^{-x/2}) = -\infty$ (la convergence de l'exponentielle est plus rapide que celle de x).
9. La moyenne de la classe est : $12\times\frac{2}{3} + 10{,}2\times\frac{1}{3} = 11{,}4$
10. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = \frac{3}{4}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1 = f(0)$, donc f est dérivable en 0.

2. La fonction f est impaire et son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine. Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ sur R^+ et f est donc strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$; Son graphe admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptôte horizontale (et $y = -1$, comme f est impaire).

3. $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1 - \dfrac{1}{1+x})\,dx = 1 - Ln2$ et $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$ (car f est impaire)

Exercice n° 3

1. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}} > 0$ et f est strictement croissante de $]-1,+\infty[$ sur R^+, avec une branche parabolique dans la direction oy.

2. $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_{-1}^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. Pour tout n, $u_n > 0$ et on vérifie par récurrence (comme f est croissante) ; que $u_n < 1$ et $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est donc croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l = f(l)$, d'où $l = 1$.

Exercice n° 4

1. On a $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$. Le numérateur est toujours négatif. La fonction f est donc strictement décroissante de $]0,1[$ dans R.

2. Le graphe de f est symétrique par rapport au point $A(1/2, 0)$, en effet si on pose $X = x - 1/2$, on obtient $\tilde{f}(X) = \dfrac{2X}{X^2 - 1/4}$ qui est impaire.

3. Une primitive de f sur $]0,1[$ est $F(x) = Ln\, x(1-x)$.

4. L'aire comprise entre l'axe *ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$ est égale à : $-Ln\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + Ln\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3}) = Ln\frac{9}{8}$.

5. On obtient $G(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + k$ et avec $G(\frac{1}{2}) = 6$, $k = 2$.

Exercice n° 5

1. Pour $x \in [0, \pi/2]$, $f_n^{'}(x) = x^{n-1}(n\sin x + x\cos x)$ et $f_n^{'}$ est du signe de $z_n = n\sin x + x\cos x$ $\quad z_n^{'} = x\cos x\left(\frac{n+1}{x} - tg(x)\right)$ et $z_n^{'}$ est du signe de $\left(\frac{n+1}{x} - tg(x)\right)$.

D'après les graphes de ces deux fonctions : $\frac{n+1}{x}$ et $tg(x)$, il existe une unique valeur $x_0 \in]0, \pi/2[$ telle que $\frac{n+1}{x_0} = tg(x_0)$. Les fonctions z_n sont donc croissantes de $[0, x_0]$ et décroissantes sur $[x_0, \pi/2]$, mais elles sont toujours positives.

Les fonctions f_n sont donc croissantes de $[0, \pi/2]$ sur $[0, (\pi/2)^n]$.

2. trouve $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x \; dx = 1$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} x\sin x \; dx = 1$.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx = \left[-x^n \cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} nx^{n-1}\cos x\, dx = n\left(\left[x^{n-1}\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(n-1)x^{n-2}\sin x\, dx\right)$$

d'où $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$

3. On obtient $u_n(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})\sin x$

Pour $x = 1$, $u_n(1) = n\sin 1$ et cette suite tend vers $+\infty$

Pour $x \neq 1$, $u_n(x) = (\frac{1-x^n}{1-x})\sin x$.

Pour $|x| < 1$, la suite $u_n(x)$ converge vers $u(x) = \frac{\sin x}{1-x}$

Pour $|x| > 1$, la suite $u_n(x)$ est divergente.

On étudie $u(x)$ pour $|x| < 1$. Sa dérivée est : $u^{'}(x) = \frac{(1-x)\cos x + \sin x}{(1-x)^2}$ qui est du signe du numérateur et positive. La fonction $u(x)$ est croissante sur cet intervalle avec une asymptote verticale en $x = 1$ (on pouvait plus rapidement remarquer que $\sin x$ est croissant sur l'intervalle $]-1,1[$ et le dénominateur décroissant).

Exercice n° 6

Soit

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}c_k x^k \text{ , où } c_k \in Z^*$$

1. On vérifie aisément que $0<x(1-x)<1/4$ pour tout $x\in \left]0,1\right[$, d'où $0<f(x)<\frac{1}{4^n n!}<\frac{1}{n!}$. La second assertion est triviale.

2. La dérivée $m-ième$ est $f^{(m)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}c_k\, k(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}$ si $m\le n$, d'où $f^{(m)}(0)=0$ si $m<n$ ou $m>2n$, $f^{(m)}(0)=\frac{m!}{n!}c_m$ si $n\le m\le 2n$.

Dans les deux cas, $f^{(m)}(0)$ est un entier relatif. Il suffit de dériver *m* fois l'égalité $f(1-x)=f(x)$

pour obtenir $(-1)^m f^{(m)}(1-x)=f^m(x)$, d'où $f^{(m)}(1)=(-1)^m f^m(0)$ qui est un entier relatif.

3. On suppose que $\pi^2=\frac{a}{b}$ avec $(a,b)\in N^2$. Soit

$$G(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

a) $G(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k b^k a^{n-k}f^{(2k)}(0)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(0)$ est un entier relatif puisque les $f^{(2k)}(0)$ le sont. Le raisonnement est identique pour $G(1)$.

b) $\frac{d}{dx}(G'(x)\sin\pi x-\pi G(x)\cos\pi x)=G''(x)\sin\pi x+\pi^2G(x)\sin\pi x=\pi^2A\sin\pi x$

où

$$A(x)=\frac{1}{\pi^2}G''(x)+G(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k-2}f^{(2k+2)}(x)+b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

$$A(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2(k+1)}f^{(2(k+1))}(x)+b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

$$A(x)=b^n\sum_{u=1}^{n+1}(-1)^{u-1}\pi^{2n-2u}f^{(2u)}(x)+b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f^{(2k)}(x)$$

$$A(x)=b^n(-1)^n\pi^{-2}f^{(2n+2)}(x)+b^n\pi^{2n}f(x)=b^n\left(\frac{a}{b}\right)^n f(x)=a^n f(x)$$, d'où l'égalité demandée.

c) On en déduit que $I=\pi\int_0^1 a^n \sin\pi x\times f(x)\,dx=\left[\frac{1}{\pi}G^{'}(x)\sin\pi x-G(x)\cos\pi x\right]_0^1=G(0)+G(1)$ et I sera un entier relatif.

d) L'encadrement obtenu à la première question pour $x\in\left]0,1\right[$ implique $0<I<\frac{2a^n}{n!}$, de sorte que $0<I<\frac{2a^n}{n!}<1$ pour *n* assez grand. Ceci est absurde puisque I est un entier relatif. Ainsi, l'hypothèse de départ, que π^2 est rationnel, est fausse. De même π n'est pas rationnel sinon π^2 le serait.

Exercice n° 7

On a :

$$\lambda=\frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)}=\frac{\mathrm{P}(M\cap\overline{V})P(V)}{\mathrm{P}(M\cap V)P(\overline{V})}=\frac{P_M(\overline{V})P(M)P(V)}{P_M(V)P(M)P(\overline{V})}=\frac{P_M(\overline{V})P(V)}{P_M(V)P(\overline{V})}=\frac{(1-P_M(V))P(V)}{P_M(V)(1-P(V))}$$

Pour le vaccin A : $\lambda=\frac{(1-0{,}008)\times 0{,}25}{0{,}008\times(1-0{,}25)}\approx 41{,}33$

Pour le vaccin B : $\lambda=\frac{(1-0{,}006)\times 0{,}2}{0{,}006\times(1-0{,}2)}\approx 41{,}42$

Les deux vaccins ont quasiment la même efficacité, mais l'effectif de la population est trop faible pour en tirer des conclusions plus précises.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

La fonction qui à $y \geq 0$ associe $\ln(1+y)$ est continue et dérivable pour tout $y \geq 0$. Considérons la sur l'intervalle $[0, x]$, avec $x > 0$. Le Théorème des Accroissements Finis implique qu'il existe un réel $c \in]0, x[$ satisfaisant

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \frac{1}{1+c}, \tag{0.1}$$

avec la fonction $\dfrac{1}{1+y}$ qui est la fonction dérivée de $\ln(1+y)$. L'inégalité $1 + c < 1 + x$ avec $0 < 1 + c$ est équivalente à $\dfrac{1}{1+c} > \dfrac{1}{1+x}$. Cette dernière inégalité et l'équation (0.1) prouve que pour tout $x > 0$,

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$

Exercice 2

1. En mettant au même dénominateur le membre de droite de l'équation suivante

$$\frac{2x^2 + 2x + 5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x+2)} + \frac{\eta}{(x+2)^2},$$

nous obtenons le système suivant à résoudre en α, β, γ et η

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 \\ 3\alpha + \beta + \eta & = & 2 \\ 4\beta - 3\gamma - 2\eta & = & 2 \\ -4\alpha + 4\beta + 2\gamma + \eta & = & 5 \end{cases}$$

Ce qui conduit au système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & -\gamma \\ \eta & = & 2-\beta+3\gamma \\ 2\beta & = & 1+\frac{3}{2}\gamma \\ 12\gamma+3\gamma-\frac{3}{2} & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & 0 \\ \eta & = & 1 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Les primitives sont alors sur chacun des intervalles $]-\infty,-2]$,]-2,1[et $]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)} + k,\ k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3

1. La variable aléatoire X suit la loi Binomiale $B(100, 0.05)$.
2. $I\!P(X=3) = C_{100}^3\,(0.05)^3\,(0.95)^{97} = 0.1395757$.
3. Considérons $p_n \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} C_n^k\, p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\frac{(np_n)^k}{k!}(1-p_n)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\frac{(np_n)^k}{k!}\exp(np_n\frac{\ln(1-p_n)}{p_n})\exp(-k\ln(1-p_n)). \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(np_n)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(-k\ln(1-p_n)) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(np_n\frac{\ln(1-p_n)}{p_n}) = \exp(-\lambda)$ car $\lim\limits_{p_n\to 0}\frac{\ln(1-p_n)}{p_n} = \lim\limits_{p_n\to 0}\frac{\ln(1-p_n)-\ln(1)}{p_n-0} = -\frac{1}{1-0}$ en utilisant la dérivabilité de la fonction $\ln(1-x)$ en zéro. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k\, p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \exp(-\lambda)\,\frac{\lambda^k}{k!},\quad \forall k \in \{1,\ldots,n\},$$

4. On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(100 * 0.05 = 5)$. Le calcul approché de $I\!P(X=3)$ est donné par

$$\exp(-5)\frac{5^3}{3!} = 0.1403739.$$

Problème

Partie 1 : Convergence de la série définissant γ

1. Pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $\frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[p, p+1]$, on a $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$, pour $t \in [p, p+1]$. Cela implique que :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. D'après la question précédente, on a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = u_{n+1} \geq 0$, la suite (γ_n) est par conséquent une suite croissante. Par ailleurs, toujours d'après la question précédente, on a

$$0 \leq \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leq \sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ équivaut à la majoration de la suite γ_n par 1. Donc (γ_n) est une suite convergente (car croissante et majorée) et par passage à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. Pour tout $p \geq 1$, on a les égalités suivantes en effectant le changement de variable $y = p+u$

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du = \frac{1}{p} \int_p^{p+1} \frac{y-p}{y} dy = \frac{1}{p} \int_p^{p+1} dy - \frac{1}{p} \int_p^{p+1} \frac{p}{y} dy = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{y} dy = u_p.$$

4. Pour tout $p \geq 2$, et tout $u \in [0, 1]$, on a

$$0 < p - 1 \leq u + p \leq p + 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{u+p} \leq \frac{1}{p-1}.$$

De ces inégalités et de la question préecédente, on obtient le résultat

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+1} du \leq u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du \leq \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p-1} du$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{2p(p+1)} \leq u_p \leq \frac{1}{2p(p-1)}.$$

5. Mettons au même dénominateur le terme de droite des deux égalités ci-dessous et égalisons avec le terme de gauche de chacune d'elles :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} \text{ et } \frac{1}{p(p-1)} = \frac{c}{p} + \frac{d}{p-1}.$$

On obtient d'une part que $a(p+1) + pb = 1$ et d'autre part que $c(p-1) + pd = 1$, par identification on obtient que $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ et $d = 1$.

6. Des questions 4. et 5., on en déduit que pour tout $p \geq 2$,

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \leq u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}).$$

On note m un entier strictement supérieur à $n+1$ avec $n \geq 1$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}) \leq \sum_{p=n+1}^{m} u_p \leq \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}) \\ \Longleftrightarrow \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}) \leq \sum_{p=n+1}^{m} u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{m-1}). \end{array} \tag{0.2}$$

Par passage à la limite en faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation (0.2), on obtient

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}.$$

7. On cherche le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $r_n \leq 10^{-2}$, respectivement tel que $r_n \leq 10^{-8}$. Si n est tel que $\frac{1}{2n} \leq 10^{-2} \Longleftrightarrow n \geq \frac{10^2}{2} = 50$, respectivement $\frac{1}{2n} \leq 10^{-8} \Longleftrightarrow n \geq \frac{10^8}{2}$ alors on a $r_n \leq 10^{-2}$, respectivement $r_n \leq 10^{-8}$. En prenant $n = 50$, respectivement $n = \frac{10^8}{2}$, on a la précision demandée.

8. D'après la question 6., on a

$$0 \leq \gamma-\gamma_n+\gamma_n-\gamma_{n,1} = r_n+\gamma_n-\gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{(n+1)-n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

9. On cherche à déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\gamma-\gamma_{n,1} \leq 10^{-2}$. Cette inégalité est satisfaite pour tout n tel que $\frac{1}{2n^2} \leq 10^{-2} \Longleftrightarrow n^2 \geq 50$. L'entier $n = 8$ convient. Dans ce cas, la valeur approchée de γ est $\gamma_{8,1} = 0.575$ et $0.575 \leq \gamma \leq 0.575 + \frac{1}{128} = 0.585$.

Partie 2 : Expression intégrale de γ à l'aide de S et de R

1. Faisons un raisonnement par récurrence :
pour $n = 1$, on a bien $1 = \int_0^1 \frac{1-1+v}{v}dv$. Posons l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{P}(n) : 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}dv.$$

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v}dv &= \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n+(1-v)^n-(1-v)^{n+1}}{v}dv \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\int_0^1 \frac{(1-v)^n[1-(1-v)]}{v}dv \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\int_0^1 (1-v)^n dv \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+[-\frac{1}{n+1}(1-v)^{n+1}]_0^1 \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Remarquons tout d'abord en faisant le changement de variable $\frac{t}{n} = v \in [0,1]$ dès que $t \in [0,n]$ et en utilisant la question précédente que :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt &= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}dt \\
&= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t/n}\frac{1}{n}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}dv \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad (0.3)
\end{aligned}$$

Ensuite en utilisant la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \int_1^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \int_1^n \frac{1}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + [\ln(t)]_1^n - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \ln(n) - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \qquad (0.4)
\end{aligned}$$

Le résultat découle des équations (0.3) et (0.4).

3. On étudie la fonction définie pour tout $v \in \mathbb{R}$ par $g(v) = \exp(v) - 1 - v$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $g'(v) = \exp(v) - 1$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-^\star$. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$, croissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$, ce qui implique que $g(v) = \exp(v) - 1 - v \geq 0,\ \forall v \in \mathbb{R}$.

4. Pour tout entier n strictement positif et tout réel $t \in [0,n]$, l'inégalité de droite demandée s'obtient à partir de la question précédente en posant $v = -t/n$: dans ce cas, on a $1 - \frac{t}{n} \leq \exp(-t/n) \Longrightarrow e_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \leq \exp(-tn/n) = \exp(-t)$.
Pour tout entier n strictement positif et tout réel $t \in [0,n]$, l'inégalité de gauche demandée s'obtient à partir de la question précédente en posant $v = t/n$: dans ce cas, on a $(1+\frac{t}{n})^n \leq \exp(t) \Longleftrightarrow (1+\frac{t}{n})^n \exp(-t) \leq 1 \Longleftrightarrow (1-\frac{t^2}{n^2})^n \exp(-t) \leq (1-\frac{t}{n})^n = e_n(t)$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall t \in [0,n]$ l'inégalité de droite de la question précédente est équivalente à l'inégalité $0 \leq \exp(-t) - e_n(t)$ et l'inégalité de gauche de la question précédente est équivalente à l'inégalité $\exp(-t) - e_n(t) \leq (1-(1-\frac{t^2}{n^2})^n)\exp(-t)$. L'application h définie sur $[0,1]$ par $h(v) = (1-v)^n + nv - 1$ est dérivable, elle vérifie $h(0) = 0$ et sa dérivée $h'(v) = -n(1-v)^{n-1} + n = n(1-(1-v)^{n-1}) \geq 0$. Donc pour tout $v \in [0,1]$, $h(v) \geq 0$, d'où $1 - (1-\dfrac{t^2}{n^2})^n \leq n\dfrac{t^2}{n^2} = \dfrac{t^2}{n}$, ce qui permet d'obtenir le résultat demandé.

6. Si $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ alors d'après la question 2. de la Partie 2, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt$, où $e_n(t)$ est définie sur $[0,n]$ par $e_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n$. Or d'après la question précédente

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_0^1 \frac{1-\exp(-t)}{t}dt = \int_0^1 \frac{\exp(-t)-e_n(t)}{t}dt \leq \int_0^1 \frac{t\ \exp(-t)}{n}dt \leq \frac{1}{n}.$$

Du théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt = S(1).$$

D'autre part, d'aprés la question précédente et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$0 \leq \int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \leq \int_1^n \frac{\exp(-t)t}{n}dt = \frac{1}{n}(2\exp(-1) - \exp(-n) - n\exp(-n)).$$

Le théorème d'encadrement implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{e_n(t)}{t}dt = R(1).$$

Il s'ensuit que $\gamma = S(1) - R(1)$.