INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x\cos^2 x}{1+x^2}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$
3. Trouver une primitive de $\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$
4. Résoudre le système : $\begin{cases} x-y=2\,Ln2 \\ x+y=4\,Ln2 \end{cases}$
5. Soit la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$. Déterminer, si elle existe, la valeur du minimum de f sur cet intervalle.
6. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^2-2}{x-1}\leq 0$
7. Donner l'équation de la droite dans le plan, parallèle au vecteur $u(1,2)$, et qui passe par le point $A(1,-1)$

8. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x - e^{-x/2})$
9. Dans une classe de lycée, la moyenne des filles à l'épreuve de mathématiques est de 12/20 et celle des garçons de 10,2/20. Sachant que la classe est composée pour les 2/3 de filles, quelle est la moyenne de la classe ?
10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)}$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.
2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Calculer $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.
3. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

   Etudier la convergence de cette suite (u_n) et calculer sa limite si elle existe.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

1. Etudier les variations de f .

2. Monter que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.

3. Trouver une primitive de f sur $]0,1[$.

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe ox, le graphe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$.

5. Soit g la fonction numérique définie sur $]0,1[$ par :

$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

Trouver la primitive G de g qui vérifie $G(\frac{1}{2}) = 6$

Exercice n° 5

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = x^n \sin x$, où *n* est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, \pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout *n*.

3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_n(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice n° 6

L'exercice consiste à prouver l'irrationalité de π et π^2 selon la méthode de Niven (Bulletin Amer. Math. Soc. 53, 509, 1947).
Soit $n \in N^*$. On définit la fonction :

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k \text{ , où } c_k \in Z^*$$

1. Montrer que $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ pour tout $x \in [0,1]$ et que $f(1-x) = f(x)$ pour tout x.

2. Calculer la dérivée $m-ième$ $f^{(m)}(0)$ de f en 0 en fonction de m, n et c_m pour tout $m \in N$. En déduire que les nombres $f^{(m)}(0)$ et $f^{(m)}(1)$ sont des entiers relatifs quels que soient les entiers m (On peut dériver *m* fois l'égalité $f(1-x) = f(x)$).

3. On suppose que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in N^2$. Soit

$$G(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x)$$

a) Montrer que $G(0)$ et $G(1)$ sont des entiers relatifs.

b) Montrer que $\frac{d}{dx}(G'(x)\sin \pi x - \pi G(x)\cos \pi x) = \pi^2 a^n \sin \pi x \times f(x)$

c) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \pi \int_0^1 a^n \sin \pi x \times f(x)\,dx$ en fonction de $G(0)$ et $G(1)$, et en particulier que I est un entier relatif.

d) Conclure à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Exercice n° 7

Deux laboratoires pharmaceutiques proposent chacun leur vaccin contre une maladie. On dispose des données suivantes :

- Un quart de la population a utilisé le vaccin *A*. Un cinquième le vaccin *B*.
- Lors d'une épidémie, 8 malades sur 1000 avaient utilisé le vaccin A et 6 le vaccin *B*.

On choisit un individu au hasard dans la population et on note :

M = « l'individu est malade » et *V* = « l'individu est vacciné »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un vaccin le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{\text{Probabilité qu'un individu non vacciné soit malade}}{\text{Probabilité qu'un individu vacciné soit malade}}$$

Calculer λ pour chacun des deux vaccins. Que peut on en conclure ?

La société de développement durable que nous appelons de nos vœux conduit à des reconversions professionnelles guidées par des impératifs, pas seulement économiques : l'écologie, la diversification, les échanges équitables, l'épanouissement, la moralisation des grands circuits financiers, la culture.

(….) Le respect des hommes ne peut passer que par un dialogue régulier entre science et société civile, entre scientifiques et citoyens. En toute modestie et avec l'appétit de contradictions que réclame la démocratie. Nous sommes nombreux, scientifiques ou non, à partager notre inquiétude quant à la situation. Nous craignons notamment que le corps scientifique ne révise aisément la conception de son rôle. Car un danger nous guette : l'outil de liberté et de culture que la science est devenue, pourrait devenir un outil d'asservissement. C'est pourquoi nous invitons les jeunes chercheurs en sciences de la vie à prononcer un serment éthique qui engage leur responsabilité morale, à l'instar du serment d'Hippocrate pour les médecins. Le chercheur s'engagerait ainsi à respecter l'état du monde, à mesurer l'impact de ses recherches sur l'homme et sur les écosystèmes, à transmettre son savoir.

Devenus conscients de l'état de la planète, citoyens soucieux du bien commun ces chercheuses et chercheurs passionnés par cet extraordinaire objet vivant retrouveraient la capacité de s'enchanter et de préserver la Terre pour les dix milliards d'êtres humains qui s'annoncent… Un pas des hommes vers l'homme. Et la société y gagnera des savants.

(1) axiome : proposition – principe
(2) biotope : lieu , étendue géographique correspondant à un groupement d'êtres vivants
(3) animaux de trait : animaux qui tirent une voiture
(4) consubstantiel : de la même substance
(5) à l'aune : à la mesure