AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice° 1

1. On obtient pour la dérivée de f

$$f^{'}(x)=\frac{2xe^{x^2}(\frac{1}{1+x^2}-Log(1+x^2))}{e^{2x^2}}=\frac{2x(\frac{1}{1+x^2}-Log(1+x^2))}{e^{x^2}}$$

2. $F(x)=-\frac{1}{x}+x+xe^x-e^x$

3. $x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)=0$, d'où $x=0, x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

4. $I=\int_0^1 x\,Log(1+x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 Log(u)\,du$ en posant $u=1+x^2$.

   et $I=\frac{1}{2}\int_1^2 Log(u)\,du=\frac{1}{2}\left[u\,Log(u)-u\right]_1^2=Log2-\frac{1}{2}$

5. Le diamètre du cercle doit être égal à la longueur du côté du carré. La surface S du cercle est égale à $S=\pi R^2=9$, donc le rayon est $R=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ et la longueur du côté du carré vaut $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$

6. On a $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=\frac{49}{4}$, d'où le système : $\begin{cases} x+y=\pm\frac{7}{2} \\ xy=\frac{3}{2} \end{cases}$

   Il reste à résoudre l'équation : $x^2-(\pm\frac{7}{2})x+\frac{3}{2}=0.$

   On obtient $(x,y)=\left\{(3,\frac{1}{2}),(-3,-\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},3),(-\frac{1}{2},-3)\right\}$

7. La suite $(U_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$.

   Si $|a|<1,$ la série est divergente. Si $|a|>1,$ la série est convergente. Pour $a=-1,$ la série est alternée et pour $a=1,$ la série converge vers U_0.

8. Pour le premier élément de E_3, il y a 4 possibilités, puis 3 possibilités pour le deuxième et enfin 2 possibilités pour le dernier. Le nombre d'applications injectives différentes de E_3 dans E_4 est égal à 24.

9. Les réels *a*, *b*, *c* et *d* doivent vérifier les équations suivantes :
   Pour A(0, -3) : $-3 = \frac{b}{d}$ et pour les deux asymptotes : $\frac{a}{c} = 2$ et $-\frac{d}{c} = 1$.
   On obtient $b = -3d,\ c = -d,\ a = -2d$, d'où la fonction $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

10. On a $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Exercice° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1}$

1. On a : $f(x) = \frac{x(x+1)+2}{x+1} = x + \frac{2}{x+1}$

2. La dérivée de f est égale à

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x+1)^2}$$

La fonction est croissante à l'extérieur des racines du numérateur de sa dérivée et décroissante entre ces racines. La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale et la droite d'équation $y = x$ une asymptote oblique. Le graphe de f passe par les points de coordonnées (0, 2) et (-2, -4).

3. D'après le graphe, on pose $X = x+1$ et $Y = y+1$, d'où $Y = X + \frac{2}{X}$ est une fonction impaire et la fonction f admet le point A(-1, -1) comme point de symétrie.

4. L'aire comprise entre le graphe de f, la première bissectrice et les droites $x = 0, x = 1$ est égale à $\int_0^1 (f(x) - x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1}\,dx = \left[2\,Log(x+1)\right]_0^1 = Log 4$

5. Le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est déterminé par la résolution de l'équation $x + \dfrac{2}{x+1} = \alpha x + \beta$.

Cette équation s'écrit sous forme d'une équation du second degré : $x^2(\alpha - 1) + x(\alpha + \beta - 1) + \beta - 2 = 0$.

On obtient pour discriminant : $\Delta = \alpha^2 + 2\alpha(3-\beta) + (\beta^2 + 2\beta - 7)$ et pour discriminant de cette expression : $\delta' = 8(2-\beta)$ En conclusion :

1. Si $\beta > 2$, alors $\Delta > 0$ et on a deux solutions.
2. Si $\beta = 2$, alors $\Delta = (\alpha+1)^2$. Si $\alpha = -1$, on a une solution et pour $\alpha \neq -1$, on a 2 solutions.
3. Si $\beta < 2$, alors $\delta' > 0$ et Δ change de signe selon la position de α par rapport aux racines de Δ, à savoir $\alpha_1 = -(3-\beta) - \sqrt{8(2-\beta)}$ et $\alpha_2 = -(3-\beta) + \sqrt{8(2-\beta)}$.

   Si $\alpha < \alpha_1$ ou $\alpha > \alpha_2$, on a deux solutions. Si $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$, une seule solution et pour $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, aucune solution.

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)e^{x^2}$

1. La dérivée de f est égale à $f'(x) = e^{x^2}(2x^2 + 2x + 1)$ qui est toujours strictement positive, donc f est strictement croissante et elle admet une branche parabolique dans la direction oy.

2. La dérivée seconde de f est égale à $f''(x) = e^{x^2}(2x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$
et elle est du signe de $z = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Cette dernière fonction est strictement croissante. On vérifie que $z(0) = 1$ et $z(-1) = -2$. Comme cette fonction est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur β, telle que $\beta \in]-1, 0[$ et $f''(\beta) = 0$. La fonction f est convexe pour $x > \beta$ et concave sinon.

3. L'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de la fonction g définie par $g(x) = e^{x^2}$ et les droites $x = 0, x = 1$ est égale à : $\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Q \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels et tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombres rationnels (densité de Q et $R-Q$ dans R).

1. Pour tout $x_0 \in Q$, il existe donc une suite $x_n \in R-Q$ qui converge vers x_0. On a $f(x_n)=0$ et $f(x_0)=1$, la suite $f(x_n)$ ne peut donc pas converger vers x_0. De même, pour $x_0 \in R-Q$, il existe donc une suite $x_n \in Q$ qui converge vers x_0. On a : $f(x_n)=1$ et $f(x_0)=0$, la suite $f(x_n)$ ne peut donc pas converger vers x_0. Cette fonction est discontinue en tout point.

2. Comme précédemment, la fonction g est discontinue en tout point de $[0,1]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Il reste à faire l'étude en ½.

Pour une suite x_n quelconque qui converge vers ½, on a : $g(x_n)=0$ ou $g(x_n)=(x_n-\frac{1}{2})$ et dans tous les cas la suite $g(x_n)$ converge vers $g(\frac{1}{2})=0$ quand x_n tend vers ½, donc g est continue en ½.

Etudions la dérivabilité de g en ½. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{g(x)-g(1/2)}{x-1/2} = \lim\limits_{x\to 1/2} f(x)$. L'étude de la dérivabilité de g revient à l'étude de la continuité de f, donc g n'est pas dérivable en ½.

3. Comme précédemment, la fonction h est discontinue en tout point de $[0,1]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Il reste à faire l'étude en ½. La fonction h est continue en ½ comme composée de deux fonctions continues (g et $(x-\frac{1}{2})$).

Etudions la dérivabilité de h en ½. $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{h(x)-h(1/2)}{x-1/2} = \lim\limits_{x\to 1/2} g(x) = g(1/2) = 0$, donc h est dérivable en ½.

Exercicen° 5

1. La moyenne $\bar{x}$ des salaires est égale à $\bar{x} = \frac{n_H \overline{x_H} + n_F \overline{x_F}}{n}$. Pour l'application numérique, on trouve : $\bar{x} = 1300$

2. $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i\in F}(x_i - \bar{x})^2$ et

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H} + \overline{x_H} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H})^2 + \sum_{i\in H}(\overline{x_H} - \bar{x})^2 + 2\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H})(\overline{x_H} - \bar{x}))$$

Par ailleurs, $\sum_{i\in H}(x_i - \overline{x_H}) = 0$, d'où $\frac{1}{n}\sum_{i\in H}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n_H}{n}V_H(x) + \frac{n_H}{n}(\overline{x_H} - \bar{x})^2$

En conclusion : $V(X) = \frac{n_H V_H(X) + n_F V_F(X)}{n} + \frac{n_H(\overline{x_H} - \bar{x})^2 + n_F(\overline{x_F} - \bar{x})^2}{n}$

Pour l'application numérique, on trouve $V(X) = 40\,000$

Exercice n° 6

1. La somme de deux fonctions convexes est convexe (évident).
2. La norme est une application convexe (propriétés de la norme).
3. Soit $g(u_i) = u_i\, Log(u_i)$, sa dérivée seconde est égale à $\frac{1}{u_i}$, la fonction g est donc convexe et f est convexe comme somme de fonctions convexes.
4. Par exemple la fonction linéaire $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est convexe et n'admet pas de minimum.
5. Par hypothèse sur la limite :

$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall u \in R^n, \|u\| \geq B \Rightarrow f(u) > A$, donc $\underset{R^n}{Min}\, f = \underset{\{u / \|u\| \leq B\}}{Min}\, f$. Comme f est une fonction continue sur cet ensemble fermé borné $\{u \in R^n / \|u\| \leq B\}$, elle admet un minimum (et un maximum) sur cet ensemble et donc sur R^n.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2006

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

Correction de la deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $n \in \mathbb{N}^\star$.

a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i x)^2$.

a.1

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i x)^2 &= x^2(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) + 2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ \Delta &= 4(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)\end{aligned}$$

La fonction f est un polynôme de degré 2 positive ou nulle, par conséquent son discriminant est négatif ou nul.

a.2

$$\begin{aligned}\Delta &\leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \\ (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 &\leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2} \qquad (0.1)\end{aligned}$$

où l'inégalité (0.1) résulte de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On en déduit l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 &\leq \left((\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \\ \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{1/2} &\leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Exercice 2 On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on considère les deux complexes $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

En remarquant que ω est une racine cinquième de l'unité, on a la relation $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$. On en déduit que

1.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= \sum_{k=0}^{4} \omega^k - w^0 \\ &= -1 \qquad (0.2) \\ \alpha\, \beta &= (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) \\ &= \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 \\ &= \omega^3 + \omega^4 + \omega^1 + \omega^2 \\ &= -1, \qquad (0.3) \end{aligned}$$

2. Les relations (0.2) et (0.3) montrent que α et β jouent un rôle symétrique. Ces relations entraînent que α, respectivement β, satisfait l'équation du second degré:

$$X^2 + X - 1 = 0,$$

dont le discriminant est $\Delta = 5$ et qui admet deux solutions réelles $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Il s'ensuit que α et β sont réels. Le nombre α est la somme de deux complexes de module 1 ayant leur partie réelle positive tandis que β est la somme de deux complexes de module 1 ayant leur partie réelle négative donc $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. En conclusion, $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

3. $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

4. $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\alpha}{2}$.

Exercice 3 L'événement $\{X = 1\}$ correspond à un succès au premier essai; l'événement $\{X = 2\}$ correspond à un échec au premier essai et un succès au deuxième essai; l'événement $\{X = k\},\ k \in \mathbb{N}^*$ correspond à $(k-1)$ échecs aux $(k-1)$ premiers essais et un succès au k-ième essai.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= p \\ \mathbb{P}(X = 2) &= (1-p)p \\ \mathbb{P}(X = k) &= (1-p)^{k-1}p \ \ \forall k \in \mathbb{N}^\star \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs possibles de X est l'ensemble $\mathbb{N}^\star$. L'événement $\{Y = m+k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ correspond à placer $(m-1)$ succès parmi les $(m+k-1)$ premiers essais puisqu'au dernier essai il y a forcément un succès, d'où

$$\mathbb{P}(Y = m+k) = C_{m+k-1}^{m-1}\ \ p^m\ \ (1-p)^k,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Problème

I. Préliminaires

I.1. En utilisant le taux d'accroissement, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1.$$

I.2. On en déduit $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(nx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} n\dfrac{\sin(nx)}{nx} = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.3. Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des points $\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{(n+\frac{1}{2})x}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}\times\frac{(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(n+\frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} = 2n+1.$$

$\lim_{x\to 0} g(x) = n$, ce qui assure la continuité en 0 de la fonction f définie sur $[0,\pi]$. Sur $]0,\pi]$, la fonction f est continue en tant que rapport de fonctions continues sur $]0,\pi]$.

I.4. On peut définir la fonction f par

$$f : [0,\pi] \to \begin{cases} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(nx)+\frac{1}{2}\frac{\sin(nx)\ \cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si}\ \ x \in]0,\pi] \\ 0 & \text{si}\ \ x = 0 \end{cases}$$

en utilisant la formule trigonométrique suivante: $\sin((n+\frac{1}{2})x) = \sin(\frac{x}{2})\cos(nx) + \cos(\frac{x}{2})\sin(nx)$.

I.5.

$$\lim_{x\to 0}(ax+bx^2)\frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0}(a+bx)\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} = a.$$

La fonction $\psi_{a,b}$ est donc continue en 0 et elle continue sur $]0,\pi]$ en tant que produit et rapport de fonctions continues sur $]0,\pi]$.

II.

II.1.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2x)dx &= 0\\ \int_0^\pi x^2\cos(2x)dx &= \frac{2\pi}{2^2}\\ \int_0^\pi x\cos(3x)dx &= \frac{-2}{3^2}\\ \int_0^\pi x^2\cos(3x)dx &= \frac{-2\pi}{3^2}\end{aligned}$$

On en déduit que $a = -1$ et $b = \frac{1}{2\pi}$.

II.2.

$$\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$\int_0^\pi x^2\cos(kx)dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{k^2} & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{-2\pi}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

En prenant $a = -1$ et $b = \frac{1}{2\pi}$, on obtient le résultat demandé.

III.

III.1. III.2. Pour $x = 0$, on a $\sum_{i=1}^n (\mathrm{e}^{ix})^k = n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\mathrm{e}^{ix})^k &= \frac{\mathrm{e}^{ix(n+1)} - \mathrm{e}^{ix}}{\mathrm{e}^{ix} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ix(n+1)} - \mathrm{e}^{ix}}{\mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2})} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ix(n+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}}{(2i)\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2})) - \sin(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} + i\frac{-\cos(x(n+\frac{1}{2})) + \cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{2\sin(\frac{x}{2})} + i\frac{-\cos(x(n+\frac{1}{2})) + \cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

La partie réelle est bien égale à la fonction f pour $x \in [0, \pi]$.

IV. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, où $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k^2}$.

IV.1. IV.2. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2) \sum_{i=1}^n \cos(kx)dx \\
&= \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2) f(x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)\cos(nx)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(nx)\ \psi_{-1,\frac{1}{2\pi}}(x)dx
\end{aligned}$$

IV.3. On note $T_1 = -\frac{1}{2}\int_0^\pi(-x + \frac{1}{2\pi}x^2)dx$, $T_{2,n} = \frac{1}{2}\int_0^\pi(-x + \frac{1}{2\pi}x^2)\cos(nx)dx$ et $T_{3,n} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(nx)\ \psi_{-1,\frac{1}{2\pi}}(x)dx$. Comme les fonctions f et $\psi_{-1,\frac{1}{2\pi}}$ sont continues sur $[0, \pi]$ alors, d'après le résultat admis **R.A.**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty} T_{2,n} = \lim_{n\to+\infty} T_{n,3} = 0$. On en conclut que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= T_1 \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi}x^2)dx \\
&= -\frac{1}{2}[-\frac{x^2}{2}]_0^\pi - \frac{1}{4\pi}[\frac{x^3}{3}]_0^\pi \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{(6*2)\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$