

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. $F(x) = \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x} + \text{constante}$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\text{Ln}(1+e^x) \right]_0^1 = \text{Ln}\left(\frac{1+e}{2}\right)$

3. L'équation de la droite est $y = -2x + 3$

4. On pose $u = \text{Ln } x$ et on obtient alors l'équation $u^2 - u - 6 = 0$, d'où $u = 3 = \text{Ln } x$ et $u = -2 = \text{Ln } x$. En conclusion : $x = e^3$ ou $x = e^{-2}$

5. La dérivée de $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x^2+1}$ est $f'(x) = \frac{e^{x+1}(1-x)^2}{(x^2+1)^2}$

6. Les réels a, b, c doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = -3/2 \end{cases}$$

On obtient : $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

7. Soit $x = 2,3535353535\dots$, alors $100x = 235,353535\dots$ et par différence $99x = 233$, d'où x est égal à la fraction $233/99$

8. On a : $\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)} < 0$ si et seulement si $x < -1$ ou $1 < x < 2$

9. On vérifie par récurrence que : $U_n = \frac{1}{3^{2^{n-1}}}$ et la limite est donc nulle.

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3\text{Ln}x-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(-1+\frac{3\text{Ln}x}{x})} = 0$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Ln}x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Exercice n° 2

∂ Par identification des polynômes, on obtient $a = b = c = 1$ et $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

÷ On a $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ qui tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers $+\infty$

La courbe représentative de f est au dessus de P.

≠ La dérivée de f est $f'(x) = 2x \left(1 - \frac{1}{(x^2 - 1)^2} \right) = \frac{2x^3(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}$

Tableau de variation :

x	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	$+\infty$ ↓ 4	4 ↑ $+\infty$	

≡ Le graphe de f admet une asymptote verticale en $x = 1$ et une branche parabolique dans la direction oy en $+\infty$

Exercice n° 3

∂ On applique le théorème des accroissements finis à la fonction logarithme sur l'intervalle $[\ln p, \ln(p+1)]$, d'où il existe un réel c de cet intervalle tel que :

$$\ln(p+1) - \ln(p) = f'(c) = \frac{1}{c}$$

On a : $\frac{1}{p+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{p}$, d'où $\frac{1}{p+1} < \ln(p+1) - \ln(p) < \frac{1}{p}$

• Par sommation : $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p+1} < \sum_{p=1}^n (\ln(p+1) - \ln(p)) < \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$

Soit $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$, l'inégalité précédente devient $u_n + \frac{1}{n+1} - 1 < \ln(n+1) < u_n$.

La suite (u_n) étant minorée par la suite divergente de terme général $(\ln(n+1))$, elle est divergente et équivalente à $\ln(n+1)$.

Exercice n° 4

∂ La fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est paire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe vertical. Il suffit de faire l'étude pour des valeurs positives. Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ qui est toujours positive, la fonction est donc strictement croissante sur R^+ et donc aussi bijective (car continue) sur cet ensemble. Elle admet une branche parabolique dans la direction oy.

• Soit $y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On pose $t = e^x$, l'équation devient $t^2 - 2ty - 1 = 0$, d'où $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$ et $f^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

÷ Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice.

≠ On vérifie facilement que $f^2 = (f')^2 - 1$.

≡ on a : $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Cette fonction a des valeurs comprises entre -1

et 1 et elle est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine et les droites horizontales d'équation $x = 1$ et $x = -1$ sont des asymptôtes.

Exercice n° 5

∂ $\text{Prob}(L/G) = 0,01$ et $\text{Prob}(L/F) = 0,02$

- $\text{Prob}(G \cap L) = \text{Prob}(G) \cap \text{Prob}(L) = 0,52 \times 0,01 = 0,0052$
 $\text{Prob}(F \cap L) = \text{Prob}(F) \cap \text{Prob}(L) = 0,48 \times 0,02 = 0,0096$
Par ailleurs $L = (G \cap L) \cup (F \cap L)$, d'où $\text{Prob} L = 0,0052 + 0,0096 = 0,0148$

÷ La probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille est égale à $\frac{2}{3}$

≠ Pour 20 naissances en moyenne par semaine.

- La probabilité qu'aucun de ces nouveau-nés ne présente de luxation de la hanche est égale à $(1 - 0,052) + (1 - 0,096) = 0,9852$
- La probabilité qu'au moins un de ces nouveau-nés présente une telle luxation est égale à $1 - 0,9852 = 0,0148$ (la valeur 20 n'intervient pas).

Exercice n° 6

On montre que f est constante. Soit $t \in [a, b]$. Pour s suffisamment petit, il existe un $u(s)$ dans $[t - s, t + s]$ tel que $f(u(s)) = f(a)$ ou $f(b)$.

On a alors par continuité

$(s \rightarrow 0) \Rightarrow (u(s) \rightarrow t) \Rightarrow (f(u(s)) \rightarrow f(t)) \Rightarrow (f(t) \rightarrow f(a) \text{ ou } f(b))$

L'image de $[a, b]$ par f est $f(a)$ ou $f(b)$ avec au maximum deux éléments. Mais f est continue donc l'image de $[a, b]$ est un intervalle fermé $[m, M]$. Il faut alors $m = M$ (sinon on a plus de deux éléments) et donc $f(x) = \text{Constante} = f(a) = f(b)$.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Posons $X = x^2$ et $Y = y^2$ Les deux équations de (S) s'écrivent ainsi :

$$(E1): X - Y = 2\sqrt{2} \text{ et } (E2): XY = 2$$

Procédons par substitution :

Avec (E1), exprimons Y en fonction de X : $Y = X - 2\sqrt{2}$

En remplaçant dans (E2) : $(X - 2\sqrt{2})X = 2$

On obtient ainsi l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - 2\sqrt{2}X - 2 = 0$$

Son discriminant est égal à 16 d'où : $X = \sqrt{2} + 2$ ou $X = \sqrt{2} - 2$

Mais comme $X \geq 0$ (puisque $X = x^2$), on a : $X = \sqrt{2} + 2$. D'où $Y = 2 - \sqrt{2}$

Tenant compte des relations $X = x^2$ et $Y = y^2$ et des conditions $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on déduit :

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ et } y = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Le système (S) admet donc un unique couple solution : $S = \{ \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 - \sqrt{2}} \}$

2. $Z = 2e^{i\frac{\pi}{8}} = 2(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$

a) $Z^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = 2\sqrt{2}(1 + i)$

b) On a donc : $x = \operatorname{Re}(Z) = 2 \cos \frac{\pi}{8}$ et $y = \operatorname{Im}(Z) = 2 \sin \frac{\pi}{8}$

i) Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos \frac{\pi}{8} \geq 0$ et $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

ii) $Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

iii) D'après 2)a) et 2)b)ii), on a : $x^2 - y^2 + 2ixy = 2\sqrt{2}(1 + i)$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales. D'où :

$$x^2 - y^2 = 2\sqrt{2} \text{ et } 2xy = 2\sqrt{2}$$

C'est-à-dire : $x^2 - y^2 = 2\sqrt{2}$ et $x^2 y^2 = 2$

Et comme, d'après 2)b)ii), $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on peut affirmer que le couple (x, y) est solution du système (S).

c) D'après la question 1), on a : $x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

D'après la question 2), on a : $x = 2 \cos \frac{\pi}{8}$ et $y = 2 \sin \frac{\pi}{8}$

$$\text{D'où : } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

3) a) D'après les formules d'Euler, on a :

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} + 2}{4} = \frac{2 \cos(2\alpha) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} - 2}{4} = \frac{2 \cos(2\alpha) - 2}{-4} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

b) En prenant $\alpha = \frac{\pi}{8}$ on obtient :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Et comme $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ on a : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

De même :

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Et comme $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ on a : $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

Exercice n° 2

1. a) $4! = 24$; $5! = 120$ et $6! = 720$

b) Comme $1! = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$ donc la l'inégalité est vraie pour $k=1$.

Supposons la vraie jusqu'à l'entier $k \geq 1$:

$$k! \geq 2^{k-1}$$

En multipliant par $k+1$, on obtient :

$$(k+1)k! \geq (k+1)2^{k-1}$$

$$(k+1)! \geq (k+1)2^{k-1}$$

Et comme $k+1 \geq 2$: $(k+1)! \geq 2 \times 2^{k-1} = 2^k$

Donc l'inégalité est vraie pour $k+1$. On en déduit que l'inégalité est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

c) On a $10! = 3\,628\,800$ et $11! = 39\,916\,800$. L'entier recherché est donc $n = 11$

2. a) On a $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{5}{2} = 2.5$ et $u_3 = u_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.6666666$

b) Pour tout entier n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc (u_n) est une suite strictement croissante.

c) On a vu (partie 1, question c) que pour tout entier $k > 0$: $k! \geq 2^{k-1}$

Comme la fonction $g(t) = \frac{1}{t}$ est décroissante, on en déduit :

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n , nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

Puis en ajoutant 1 de chaque côté, il vient :

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

(ii) La quantité $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

On a donc:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

Et comme $\left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \leq 1$, il vient $u_n \leq 3$

La suite (u_n) est majorée par 3.

d) La suite (u_n) est (strictement) croissante et majorée, donc elle converge.

$$3. \text{ a) } v_0 = u_0 + 1 = 2, \quad v_1 = u_1 + 1 = 3, \quad v_2 = u_2 + \frac{1}{2} = 3, \quad v_3 = u_3 + \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \approx 2.86$$

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{-n+1}{(n+1)!}$$

Et comme $n \geq 2$, on a : $v_{n+1} - v_n < 0$.

La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante. Par ailleurs, on a vu que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

De plus, pour tout $n \geq 2$ on a :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

D'où, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

On en déduit que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. Elle convergent donc vers une limite commune l

b) On a pour tout $n \geq 2$:

$$u_n \leq l \leq v_n$$

Donc en retranchant u_n de chaque membre :

$$0 \leq l - u_n \leq \frac{1}{n!}$$

En choisissant $n=11$, on aura (d'après 1.c) :

$$0 \leq l - u_{11} \leq 10^{-7}$$

La distance entre l et u_{11} est bien inférieure à 10^{-7} .

Les calculs donnent : $u_{11} = \sum_{k=0}^{11} \frac{1}{k!} = 2,7182818$ à 10^{-7} par défaut.

Problème

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur \mathbf{R} comme somme et produit de fonctions dérivables et on a :

$$g'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$$

Donc : $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

On en déduit que g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$

2) La fonction g admet donc un minimum global en 0. Or ce minimum étant nul puisque $g(0)=0$, la fonction g est positive sur \mathbf{R} .

Partie B

$$\begin{aligned} 1) \text{ On pose : } \quad u(t) &= x-t & u'(t) &= -1 \\ v'(t) &= e^t & v(t) &= e^t \end{aligned}$$

D'où :

$$I(x) = \left[(x-t)e^t \right]_0^x + \int_0^x \int e^t dt = -x + e^x - I = e^x - (I+x)$$

2) La fonction exponentielle étant croissante, $0 \leq t \leq x$ entraîne $1 \leq e^t \leq e^x$

En multipliant ce dernier encadrement par $(x-t) \geq 0$, il vient :

$$(x-t) \leq (x-t)e^t \leq (x-t)e^x$$

En intégrant entre 0 et $x \geq 0$, on obtient :

$$\int_0^x (x-t) dt \leq I(x) \leq e^x \int_0^x (x-t) dt$$

$$\text{Or : } \int_0^x (x-t) dt = \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{D'où, pour tout } x \in [0, +\infty[: \frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

3) Idem avec $x \leq t \leq 0$

$$4) \text{ D'après la question 1 : } \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{I(x)}{x^2}$$

$$\text{Et d'après la question 2, pour } x > 0, \text{ on a : } \frac{1}{2} \leq \frac{I(x)}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x>0, x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On montre, de même, en utilisant la question 3, que :

$$\lim_{x<0, x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Partie C

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc par produit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$

La courbe C admet donc en $-\infty$ un asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ Donc par somme: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$$

La limite est infinie en $+\infty$, donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ mais une direction asymptotique vers l'axe verticale.

2) On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = [(e^x)']_{x=0} = 1$

Cette limite étant finie, la fonction f admet un prolongement continu en 0 et $f(0) = 1$.

3) Par définition, la dérivée de f en 0 est la limite du taux de variation de f en 0. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$$

D'après la question B.4) on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

4) D'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

La fonction g étant positive sur \mathbf{R} , on en déduit que la fonction dérivée f' est positive sur \mathbf{R} .

On en déduit que f est croissante sur \mathbf{R} .

5) La tangente T à C au point d'abscisse 0 est donnée par l'équation :

$$y = f(0) + f'(0)x$$

Compte tenu de $f(0) = 1$ et de $f'(0) = \frac{1}{2}$, on obtient : $(T) : y = \frac{1}{2}x + 1$