ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Pourquoi revenir sur le passé ?

SUJET n° 2

La parole suffit-elle à faire échec à la violence ?

SUJET n° 3

Quels peuvent être les effets de la mondialisation sur les spécificités socio-culturelles ?

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est OBLIGATOIRE et toute note strictement inférieure à 5 à cet exercice sera éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement, cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer $\underset{x \to +\infty}{Lim} \dfrac{\sin x}{x}$
2. Calculer $\underset{x \to 0^+}{Lim} x^{\frac{1}{x}}$
3. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $x^2 + 2x + 2 = 0$
4. Calculer la dérivée de : $\dfrac{\ln x}{1 + x^2}$ $(x > 0)$

5. Calculer la dérivée de : $x\cos x$

6. Calculer $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k$

7. Calculer $\int_0^1 xe^x dx$

8. Calculer $\int_0^1 \frac{x-2}{x+1}dx$

9. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par : $U_n = 1+\frac{2}{3^n}$

10. Résoudre le système $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{3}{4} \end{cases}$

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x)=(x-1)^2+a$$

où a est un paramètre réel.

❶ On suppose que $0<a<1$. Calculer l'aire du domaine D suivant :

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 / 0\le x\le 1,\ a\le y\le f(x)\right\}$$

❷ Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels strictement positifs, l'équation : $f(x)=\ln x$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

❸ On suppose $a=0$. Déterminer l'aire comprise entre les points d'intersection du graphe de f et du graphe de la fonction logarithme népérien (en fonction d'un paramètre que l'on ne cherchera pas à calculer).

Exercice n° 3

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = ax + e^{bx}$$

où a est un paramètre réel non nul et b un réel strictement positif.

❶ Etudier les variations de f dans le cas où $a > 0$.

❷ On suppose toujours $a > 0$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine réelle. Dans quel intervalle de la forme $]n, n+1[$ se situe-t-elle si $b = 1$? (n étant un entier relatif).

❸ Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

❹ On suppose dans cette question que $a < 0$.

- Etudier les variations de f
- Résoudre $\underset{x}{Min}\ f(x)$
- Quelle relation doivent vérifier a et b pour que la valeur du minimum soit négative ?

Exercice n° 4

Soient u et v deux fonctions numériques d'une variable réelle indéfiniment dérivables.

❶ Exprimer $Max(u,v)$ en fonction de $(u-v)_+$, où $(u-v)_+$ désigne la partie positive de $(u-v)$ (Si $(u-v) < 0$, alors $(u-v)_+ = 0$).

❷ Pour $t \in R$, on pose :

$$F(t) = Max\left\{2, \frac{u(t)}{v(t)}\right\},$$

où $u(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ et $v(t) = t + 1$. Etudier la dérivabilité de F.

❸ Pour $t \in R$, on pose :

$$G(t) = Max\left\{2, e^{l\,t}\right\},$$

où l est un paramètre réel. Etudier la dérivabilité de G en fonction de l.

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$$

❶ Etudier les variations de f et tracer son graphe.

❷ Déterminer le nombre de points d'intersection entre le graphe de f et celui de la parabole g d'équation $y = x^2$

❸ Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire l'aire comprise entre le graphe de f, le graphe de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

❹ On pose $j(t) = \int_0^t (f(x) - g(x))\,dx$. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} j(t)$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre d'Albert Jacquard dont le titre est «DE L'ANGOISSE A L'ESPOIR, leçons d'écologie humaine», paru aux éditions Calmann-Lévy en mars 2002.

Il doit être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

Jusqu'au milieu du XX^e^ siècle, nous avons considéré tout nouveau pouvoir nous permettant de transformer notre environnement comme un progrès humain. Nous avons rarement remis cette évidence en question; nous y sommes maintenant obligés devant le développement extraordinaire de nos capacités d'action, et ce nouveau regard constitue un changement profond du parcours de l'aventure humaine.

A la façon de Prométhée découvrant le feu, nous nous sommes réjouis de chaque progrès. Selon la mythologie grecque, Zeus, créant le monde, avait prudemment caché aux hommes le secret du feu. Prométhée le leur a dévoilé et en a été puni. Nous pourrions métaphoriquement identifier les scientifiques à Zeus et les techniciens à Prométhée ; les premiers proposent des concepts permettant d'expliquer le cosmos, les seconds apportent la capacité à le transformer. Pour le philosophe Francis Bacon, au XVII^e siècle, le but de la science et de la technique était de réaliser tout ce qui était rendu possible par notre compréhension. A cette philosophie optimiste, nous sommes obligés de substituer celle d'Einstein, affirmant, le soir d'Hiroshima : « il y a des choses qu'il faudrait mieux ne pas faire ». Nous ne devons plus nous permettre d'utiliser aveuglément les moyens que nous nous donnons. La bombe nucléaire en est un exemple extrême. En découvrant le mystère de l'énergie présente dans la matière, nous nous sommes donnés des pouvoirs que nous ne devons utiliser qu'en les maîtrisant. Il en est de même pour la découverte du mystère des processus qui se déroulent chez les êtres vivants. Comment résoudre les problèmes éthiques posés par la manipulation du patrimoine génétique ?

Au cours de l'histoire, une des rares occasions où, face à un progrès technique, la question a été posée de renoncer à l'utiliser a été provoquée par la mise au point de l'arbalète, arme beaucoup plus efficace que l'arc. Au cours d'un concile, en 1139, l'Eglise romaine a interdit son usage dans les guerres entre chrétiens, mais l'a permis contre des ennemis non chrétiens. Même si la réponse nous fait sourire, constatons que la question a du moins été posée.

L'important aujourd'hui n'est pas d'accélérer les avancées techniques, mais de les orienter en fonction d'objectifs éthiques. Prenons l'exemple controversé du clonage. La célèbre brebis Dolly a montré qu'il est possible de faire agir la totalité des gènes présents dans le noyau d'une cellule, donc de ramener ce patrimoine à l'état qui était le sien lors de la conception, et de réaliser un double de l'individu. La compréhension des mécanismes en action au sein des êtres vivants nous permet d'intervenir à tous les niveaux : ce qui se produit dans le secret des organes sexuels est maintenant observé dans tous les détails. Nous avons le pouvoir de prendre en main, de transformer la réalité biologique des êtres vivants, y compris nous-mêmes. Nous sommes passés du rôle passif de spectateurs au rôle actif d'acteurs ; nous devenons des cocréateurs.

Des phénomènes évolutifs qui nécessitaient des milliers de générations, des innovations que la nature ne produisait que par erreur sont maintenant réalisables à volonté et rapidement dans les laboratoires. Les êtres vivants ne sont que des choses, la frontière entre l'inanimé et le vivant s'estompe, que devient alors la spécificité humaine ?

Cette spécificité ne peut guère être définie par notre dotation génétique, si proche de celle des autres primates. C'est en s'interrogeant sur l'origine de la conscience qu'une réponse peut être proposée.

Cette conscience nous est permise par la richesse fabuleuse de notre cerveau. Il représente l'objet le plus complexe et jouit de ce fait de performances inouïes, notamment la capacité de comprendre et de transformer le monde.

Mais surtout, cette complexité nous a permis de mettre en place un réseau de communication entre les hommes qui fait de leur ensemble, l'humanité, la seule structure qui soit plus complexe que chaque individu, et qui peut, par conséquent, avoir des performances supérieures. Parmi ces performances, la plus décisive est de permettre à chacun, non seulement d'être, mais de se savoir être, d'être conscient, de parvenir à dire « je ».

La clé de la spécificité humaine est donc l'utilisation de nos performances intellectuelles pour créer le surhomme qu'est la communauté des hommes. Cette communauté opère en chacun une métamorphose plus étrange que celle de la chenille devenant papillon : le passage de l'individu créé par la nature en une personne créée par la rencontre des autres.

Pour qu'un individu devienne un homme, pour qu'en lui émerge une personne, il faut qu'il soit immergé dans une collectivité. C'est grâce aux autres que chacun devient lui-même et est en droit d'exiger le respect. Nous devons donc mettre en place une société où chacun regardera tout autre, non comme un obstacle, mais comme une source.

Le rôle du projet

Dans notre univers, seuls interviennent le présent et le passé ; l'avenir n'existe pas. A chaque instant, les événements se déroulent en fonction de l'état actuel des choses, non en vue de réaliser un état futur. Seuls les hommes font exception : ils ont découverts que demain sera et prennent des décisions aujourd'hui en fonction de ce qu'ils désirent pour demain. Ce faisant, ils ont inversé le rôle du temps. Alors que tout ce qui peuple l'Univers subit les contraintes de l'état de choses présent, les hommes, grâce à la richesse fabuleuse de leur système nerveux central, ont eu l'idée fantastique d'inventer le concept d'avenir.

Du coup, leur statut dans le cosmos a été transformé. Au lieu de seulement subir les forces en action, ils ont pour rôle de les orienter, de choisir, de décider ce qui est bien et ce qui est mal, de construire une éthique. La morale est nécessitée par la possibilité du projet.

Ce constat doit être d'autant plus pris au sérieux que les avancées techniques ont rendues solidaires tous les hommes de la planète. Les choix collectifs doivent maintenant être « mondialisés ». La véritable mondialisation ne doit pas être celle de la finance ou du commerce, elle doit être celle de la culture, à condition de préserver la diversité et le respect des différences. Autrement dit, il faut mettre en place une démocratie planétaire de l'éthique.

Parmi les devoirs nouveaux qui s'imposent aux hommes aujourd'hui, l'un des plus urgents est la gestion raisonnée de leur effectif. Jusqu'à il y a quelques siècles, la nécessité était de préserver la survie de l'espèce en luttant contre l'excès de la mortalité. Cette lutte est maintenant victorieuse, du coup, le danger s'est inversé, c'est l'excès de naissances qui est devenu une menace. Le nombre des hommes, relativement stable jusqu'à la renaissance, a connu depuis une croissance exponentielle, qui s'est accélérée durant la seconde moitié du XX[è] en raison des succès remportés dans la lutte contre la mortalité infantile. Notre attitude envers la procréation doit désormais être inversée : elle était un devoir, elle devient un droit limité.

Un tel retournement, une telle révolution, s'impose dans de multiples domaines ; nous n'y sommes guère prêts, mais l'effort intellectuel qu'implique le raisonnement scientifique peut nous y aider. La science consiste en effet à aller au-delà des informations fournies par nos sens. Imaginer que la boule de feu qui se lève chaque matin est une étoile autour de laquelle nous tournons a exigé des siècles de réflexion. Ce n'est que bien récemment que nous avons compris la source de l'énergie qu'elle rayonne. Le soleil est un concept inventé par les hommes ; de même les protons, les quarks ou les trous noirs ; leur existence, définitivement cachée à ceux qui se contentent de leurs sensations, nous est révélée par notre capacité de raisonner. La connaissance est la naissance, en nous, d'une représentation du monde.

Pour la construire, la science s'impose quelques règles ; notamment, elle récuse les raisonnements finalistes expliquant ce qui se passe aujourd'hui en fonction de ce qui se passera demain, pour la bonne raison que demain n'existe pas. Tout doit être expliqué par des « parce que », et non pas par des « pour que ».

La connaissance toujours améliorée du cosmos est la grande tâche humaine, sa prouesse. Mais l'invention la plus extraordinaire est celle de l'Homme. Quoi de plus prodigieux que l'auto-construction qui nous permet, en nous regardant nous-mêmes, de nous transformer. La réponse de la science à la question de toujours « qu'est-ce qu'un être humain ? » est plus que jamais source d'émerveillement.

Le point d'arrivée : la personne humaine

Nous devons aujourd'hui non seulement être conscients de nos pouvoirs et nous interroger sur le droit de les exercer en assumant notre rôle de cocréateurs du cosmos, mais aussi comprendre comment notre hypercomplexité cérébrale nous permet d'échapper collectivement au sort commun des objets produits par l'Univers.

Rappelons que la « complexité » est la caractéristique d'une structure dont les éléments sont nombreux, sont divers, et sont reliés entre eux par de multiples interactions. Lorsque cette complexité est suffisante, la structure manifeste des performances qui ne peuvent être déduites de la connaissance de chacun de ses éléments. Appliquons ce constat à « l'objet » qu'est l'humanité. Elle est riche de six milliards d'individus, tous différents ; les conditions de nombre et de diversité sont donc remplies. Mais les interactions sont-elles suffisamment subtiles et intenses ? Cela dépend d'eux. S'ils sont capables de mettre en commun non seulement des projets, des angoisses, des espoirs, alors ils ne sont plus une foule, mais un ensemble intégré capable de performances inaccessibles à chacun des humains isolés, et chacun d'eux peut en profiter.

L'important est de comprendre que mettre en relation est différent d'additionner ; deux plus deux font quatre, mais deux et deux peuvent donner tout autre chose que quatre ; cela est vrai en permanence dans notre cosmos, et cette émergence de l'inattendu est particulièrement spectaculaire avec l'aventure de l'humanité. La richesse de notre cerveau nous a permis de manifester une merveilleuse intelligence, mais c'est la complexité du réseau que nous établissons avec les autres qui nous fait accéder à la conscience d'être.

Pour expliquer cette conscience, on peut évoquer une décision spécifique du Créateur ; mais c'est là une affirmation que l'on peut ni prouver, ni démontrer fausse ; elle repose sur une foi, elle n'entre donc pas dans le discours scientifique. Une autre explication est que notre capacité à dire « je » n'a pas été donnée à chacun par la nature, mais a été apportée par les « tu »venant des autres. Grâce à ce réseau, tout homme est plus que lui-même. Chacun le ressent dans le secret et dans le doute ; pour progresser, la meilleure voie est de comprendre que mon « plus », ce sont les autres, et d'en tirer les conséquences.

Pour appartenir à l'humanité, il ne suffit pas d'avoir reçu la dotation génétique caractéristique de l'espèce, il faut aussi avoir été immergé dans une communauté humaine. Il faut distinguer la définition de l'individu de celle de la personne. Le premier est fait de particules associées en cellules, réunies en organes, la seconde est constituée de liens. Il s'agit de deux univers du discours différents ; le premier est de l'ordre des objets, le second de l'ordre des valeurs.

Les liens que nous tissons constituent la meilleure définition de nous-mêmes. Etre un humain signifie être capable de sortir de soi, de dire « je » comme si l'on parlait d'un autre ; Arthur Rimbaud l'a osé : dans son œuvre, « je » se conjugue à la troisième personne.

Cette conscience a été donnée aux hommes au prix d'un long effort qui a sans doute nécessité la succession de milliers de générations ; elle est un cadeau que les hommes se sont faits à eux-mêmes. Nous avons fait l'humanité, et elle nous a transformés. Il ne s'agit pas d'un cercle vicieux constamment recommencé, mais d'une spirale vertueuse faisant toujours apparaître des possibilités nouvelles. La nature a produit, au terme provisoire d'une longue évolution, des individus ; nous avons créé les personnes.

En tant qu'individus, chacun est un objet parmi d'autres ; il est défini par ses caractéristiques biologiques résultant de son patrimoine génétique ; son histoire peu à peu le façonne, lui donnant une personnalité spécifique ; mais il ne devient véritablement une personne que lorsque la communauté humaine lui reconnaît des droits. Ce concept de droit est inconnu du cosmos ; rien parmi tous les objets qui le constituent, n'est source de droits ; chacun est aveuglément soumis aux forces qui s'exercent sur lui. Evoquer des droits, c'est changer d'univers. L'individu, le sujet, la personnalité appartiennent à l'ordre des réalités que nous pouvons constater et décrire ; la personne appartient à l'ordre du sacré, de l'infiniment respectable, de l'inviolable, défini collectivement par une décision humaine.

A quel stade de son histoire un individu devient-il une personne ? A cette question, il n'y a de réponse qu'arbitraire. Tout au plus pouvons nous évoquer des problèmes liés aux deux extrémités du parcours de vie : la conception, d'où l'interrogation concernant l'avortement, la mort, d'où l'interrogation concernant l'euthanasie.

Un ovule, un spermatozoïde ne sont pas, isolés, le support d'une personne, mais ils se fondent l'un dans l'autre, multiplient les cellules et commencent à former un individu ; celui-ci est alors capable de devenir une personne par l'échange des liens avec les autres. Le lien mère-fœtus introduit la réalité d'une personne dans l'amas de cellules qui se forment et qui, dans l'esprit de la mère, est l'équivalent de « quelqu'un ». Elle a conscience du fait qu'un enfant se forme, et cette conscience rend cet enfant sacré. Dans cette voie, le problème de l'avortement est affronté en admettant que l'embryon devient une personne en fonction de l'attitude de sa mère.

De même, la fin de la vie pose des problèmes nouveaux dus au développement de nos moyens techniques. Autrefois, la mort était la conséquence de processus naturels. Aujourd'hui, dans la plupart des cas, l'instant précis de la mort est le résultat d'une décision technique. Une possibilité de réflexion est de recourir au concept de « mourir », défini comme cette période de la vie qui est ressentie comme ultime. Le rôle de ceux qui assistent le mourant est de lui permettre de vivre son mourir en respectant un équilibre difficile entre la conscience, la lutte contre la douleur et la durée. Une mort plus sereine peut parfois être obtenue au prix d'une vie moins longue.

Entre une conception imprécise et une mort mal définie, il y a toute une vie qui consiste à multiplier les liens, à sortir de soi-même, ce qui est l'objectif dans l'éducation.

Il nous faut maintenant poursuivre cette construction de l'humanité et adopter un projet digne de ce que nous pouvons réaliser.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice n°1

Soit a un nombre réel. On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = a$ et $a_{n+1} = \cos a_n$.

1) Montrer que $0 < a_n < 1$ pour tout $n \geq 3$.
2) Montrer que :

   a. si $a_n < a_{n+1}$ alors $a_n < a_{n+2} < a_{n+1}$

   b. si $a_n > a_{n+1}$ alors $a_n > a_{n+2} > a_{n+1}$
3) Montrer que les sous-suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite.
4) En déduire que la suite (a_n) est convergente et que sa limite ne dépend pas de a.

Exercice n°2

1) Soit φ un réel de [-π, π] et z le nombre complexe défini par :

$$z = \frac{1}{2}\left[\sin \varphi + i(1 - \cos \varphi)\right]$$

Déterminer, en fonction de φ, le module et un argument de z.

2) Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle]0, π[. Déterminer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes suivants : $z - i$ et $\dfrac{z}{z-i}$ où z est le nombre complexe défini au 1).

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\dfrac{z}{z-i}$.

Déterminer la nature géométrique des ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle]0, π[.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur [0, + ∞ [par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0, $+\infty$ [par :

$$g(x) = x + 2 - e^{x}$$

1. Étudier le sens de variation de g sur [0, $+\infty$ [et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule dans [0, $+\infty$ [. On note a cette solution.

   b) Sachant que $e^{1,14} \approx 3,127$ et $e^{1,15} \approx 3,158$, donner un encadrement de a à 10^{-2} près.

3. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

1. a) Calculer la dérivée *f '(x)* de *f(x)* en fonction de *g(x)* pour tout x appartenant à [0, $+\infty$ [.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur [0, $+\infty$ [.

2. a) Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a) Établir que $f(a) = \dfrac{1}{a + 1}$

   b) En utilisant l'encadrement de a établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de *f(*a*)* d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la demie tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0.

5. a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0, $+\infty$ [

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^{x} + 1} \text{ avec } u(x) = e^{x} - xe^{x} - 1.$$

   b) Étudier le sens de variation de la fonction *u* sur l'intervalle [0, $+\infty$ [. En déduire le signe de *u(x)*.

   c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe C par rapport à la droite (T).

6. Tracer C et (T).

Partie C

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0, +\infty[$ en utilisant l'expression de *f(x)* établie dans la question **B.2.**

2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n \geq 2$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n)

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice

1. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions de l'équation :

$$z^2 = 1 + i. \tag{0.1}$$

2. Représenter graphiquement les nombres complexes z solutions de (0.1).
3. Ecrire les complexes z solutions de l'équation (0.1) sous forme exponentielle et sous forme algébrique pour en déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
4. A partir de la forme exponentielle de $1+i$, calculer $(1+i)^8$; calculer ensuite $(1+i)^8$ à l'aide de la formule du binôme et en déduire les valeurs respectives de $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$ et de $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$.
5. Linéariser $\cos^4(a)$ et $\sin^3(a)$ pour tout $a \in I\!R$.
6. Exprimer $\cos(6x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de puissances de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ pour tout $x \in I\!R$.

Problème

Une entreprise P est constituée de deux établissements P_1 et P_2. Le tableau suivant donne la répartition des salaires (x_{1i} pour l'entreprise P_1 et x_{2i} pour l'entreprise P_2, tous les salaires sont exprimés en Euros) en fonction des effectifs salariés (n_{1i} pour l'entreprise P_1 et n_{2i} pour l'entreprise P_2); les salaires sont regroupés par classe et on notera une classe $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[$, où a_i est la borne inférieure des salaires appartenant à $\mathcal{C}_i$ et b_i est la borne supérieure des salaires appartenant à $\mathcal{C}_i$:

	x_{1i}	n_{1i}	x_{2i}	n_{2i}
Ouvriers	$\mathcal{C}_2 = [1200, 1500[$	60	$\mathcal{C}_1 = [900, 1200[$	5
Employés	$\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$	95	$\mathcal{C}_3 = [1500, 1800[$	15
Cadres	$\mathcal{C}_6 = [2700, 3300[$	5	$\mathcal{C}_5 = [2100, 2700[$	30

1. Donner le nombre total des salariés de l'entreprise P. On notera ce nombre n.

2. Regrouper les résultats des deux établissements dans un unique tableau avec dans la première colonne les classes $\mathcal{C}_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, des salaires ordonnés par ordre croissant et dans la deuxième colonne les effectifs n_i des salariés correspondants.

3. Ajouter une troisième colonne au tableau de la question 2. dans laquelle apparaîtront **les fréquences** $f_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$.
   La fréquence f_i *de la classe* $\mathcal{C}_i$ *est la proportion des individus ayant un salaire compris dans l'intervalle* $[a_i, b_i[= \mathcal{C}_i$.

4. **Fréquence cumulée et Médiane.**

   a. Ajouter une quatrième colonne au tableau de la question 2. dans laquelle apparaîtront pour chaque classe $\mathcal{C}_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, **la fréquence cumulée** F_i définie par la formule
   $$F_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i} f_j, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq 6 \\ f_1 & \text{si} \quad i = 1 \end{cases}$$

   b. Quelle est la proportion de salariés de l'entreprise P qui gagne moins de 1800 Euros?

   c. La représentation graphique de la fréquence cumulée est appelée **courbe cumulative**; elle consiste à représenter en abscisse les bornes inférieures et supérieures des classes $\mathcal{C}_i,\ i = \{1, \ldots, 6\}$, puis à représenter dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le point $(a_1, 0)$ où a_1 est la borne inférieure de la classe $\mathcal{C}_1$, et les points $(b_i, F_i),\ i = \{1, \ldots, 6\}$, où b_i est la borne supérieure de la classe $\mathcal{C}_i$ et enfin à relier ces points par des segments de droite.
   Tracer **la courbe cumulative**.

   d. Déterminer graphiquement **la médiane**, c'est–à–dire, sur le graphe de la courbe cumulative, repérer la valeur du salaire en abscisse qui a une ordonnée égale à 0.5, puis donner une valeur approchée de Me.
   La médiane *notée* Me *est la valeur d'un salaire qui partage les salariés de* P *en deux sous-populations de même taille : ceux qui ont un salaire supérieur à* Me *et ceux qui ont un salaire inférieur à* Me.

5. **Histogramme et Mode.**

   a. Ajouter une cinquième colonne au tableau de la question 2., dans laquelle apparaîtront **les amplitudes** $L_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, c'est–à–dire la longueur de chaque intervalle $[a_i, b_i[$.

b. Ajouter une sixième colonne au tableau de la question 2., dans laquelle apparaîtront ou bien **les densités de fréquence** $h_i,\ i \in \{1, \dots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, qui sont le rapport de f_i sur L_i, ou bien des quantités $H_i,\ i \in \{1, \dots, 6\}$ de chaque classe $\mathcal{C}_i$, proportionnelles à h_i (chacun étant libre de choisir son coefficient de proportion).

c. La représentation graphique de la densité de fréquence est appelée **histogramme**; elle consiste à représenter en abscisse les classes $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[,\ i \in \{1, \dots, 6\}$, et pour chaque classe $\mathcal{C}_i$, on dessine un rectangle de hauteur h_i repérée en ordonnée.
Tracer l'histogramme dans un repère différent de celui utilisé pour tracer la courbe cumulative.

d. A partir de l'histogramme, déterminer **la classe modale** qui est la classe de l'histogramme qui a la plus grande hauteur de rectangle.

6. **Moyenne et Variance.**

a. Par convention on admet que chaque classe $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[,\ i \in \{1, \dots, 6\}$, peut être représentée par **la valeur centrale** c_i, qui est le centre ou milieu de $[a_i, b_i[$.
Calculer **les valeurs centrales** $c_i\ i \in \{1, \dots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, que l'on fera figurer dans une septième colonne ajoutée au tableau de la question 2.

b. On définit **la moyenne** $\bar{x}$ par :

$$\bar{x} \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} n_i \ c_i,$$

et **la variance totale** Var par :

$$\text{Var} \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} n_i \ (c_i - \bar{x})^2,$$

Calculer la moyenne $\bar{x}$ et la variance totale Var.

c. On appelle **variance Inter** et on la note VarInter, la variance des moyennes de la population P_1 et de la population P_2 c'est–à–dire que

$$\text{VarInter} = \frac{1}{n}(\bar{n}_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + \bar{n}_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2),$$

où $\bar{x}_i,\ i = 1, 2$, est la moyenne calculée sur la population P_i et $\bar{n}_i$ est l'effectif de la population P_i.
Calculer la variance Inter.

d. On appelle **variance Intra** et on la note VarIntra, la moyenne des variances de la population P_1 et de la population P_2 c'est–à–dire que

$$\text{VarIntra} = \frac{1}{n}(\bar{n}_1 \text{Var}_1 + \bar{n}_2 \text{Var}_2),$$

où $\text{Var}_i,\ i = 1, 2$, est la variance calculée sur la population P_i et $\bar{n}_i$ est l'effectif de la population P_i.
Calculer la variance Intra.

e. Trouver la relation théorique qui relie la variance totale aux variances Intra et Inter.