**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)**
**DEPARTEMENT DE STATISTIQUE**
**BP 5084**
**DAKAR -SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIES A et B***

**ORDRE GENERAL**

**DUREE : 3 HEURES**

***Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.***

**SUJET N° 1**

Pourquoi suffit-il d'un tableau noir et d'un morceau de craie pour établir des vérités mathémathiques, alors que le physicien a besoin d'observer et d'expérimenter ?

**SUJET N° 2**

Expliquer et apprécier cette assertion que "la liberté d'indifférence est le plus bas niveau de la Liberté".

Descartes "Méditations"

**SUJET N° 3**

Un philosophe a défini l'intelligence "la fonction qui adapte des moyens à des fins". Cette formule vous paraît-elle présenter les conditions d'une bonne définition ?

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)**
**DEPARTEMENT DE STATISTIQUE**
**BP 5084**
**DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIE A***

**PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 HEURES**

## EXERCICE n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = xLnx - 2x + e$$

où $Lnx$ désigne le logarithme népérien de $x$ et $e$ le nombre de Néper.

❶ Etudier les variations de $f$ et tracer son graphe.

❷ Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation suivante, où $a$ est un paramètre réel :

$$xLnx - (2 + a)x = 0$$

❸ Calculer l'aire limitée par les deux axes et la courbe représentative de la fonction $f$ .

**EXERCICE n° 2**

Pour deux nombres réels $a,b$ qui vérifient $a<b$, on pose :

$$\varphi_{a,b}(x)=\cos\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+1-\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

❶ Pour $x\in[-\pi,\pi]$, montrer que :

- Si $a<x<b$, alors $\varphi_{a,b}(x)>1$
- Si $x\leq a$ ou $x\geq b$, alors $-1\leq\varphi_{a,b}(x)\leq 1$

❷ Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[-\pi,\pi]$.
Montrer qu'il existe un couple $(a,b)$ de nombres réels et un entier naturel $n$ tels que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\neq 0$$

❸ On suppose maintenant que $f$ vérifie, pour tout entier naturel $n$, la relation : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx=0$. Montrer que $f$ est alors la fonction identiquement nulle.

**EXERCICE n° 3**

❶ Calculer $\sum_{k=1}^{n} k$ et montrer que : $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❷ Pour toute suite finie de valeurs réelles $X_t$ $(t=1,2,\ldots n)$, trouver le nombre réel $a$ qui minimise l'expression $\sum_{t=1}^{n}(X_t-a)^2$

❸ Trouver les nombres réels $a$ et $b$ qui minimisent l'expression $\sum_{t=1}^{n}(X_t-(at+b))^2$

## EXERCICE n° 4

On considère une suite réelle $(u_n)$ dont les suites extraites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ sont convergentes. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

## PROBLEME

Pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, on définit les fonctions $f_n$ sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f_n(x) = x^n - Ln(1+x)$

❶ Donner le tableau de variation de $f_n$.

❷ Montrer que l'équation $x^n = Ln(1+x)$ admet une unique solution sur l'ensemble des réels strictement positifs, notée $\alpha_n$. Montrer que $\alpha_n \in ]0,1[$

❸ En étudiant le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$, montrer que la suite $(\alpha_n)$ est croissante. Montrer que cette suite est convergente et que sa limite est égale à 1.

❹ On pose $\alpha_n = 1 - u_n$. Montrer que $u_n$ est équivalent à $\frac{-Ln(Ln2)}{n}$

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)**
**DEPARTEMENT DE STATISTIQUE**
**BP 5084**
**DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE**
**ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIES A***

***Et***

***B OPTION MATHEMATIQUES***

**EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

✶✶✶

Ce texte est tiré du livre "LA SCIENCE à l'usage des non-scientifiques", par Albert Jacquard, paru aux éditions Calmann-Lévy, en septembre 2001. Il peut être résumé en 240 mots plus ou moins 10%.

Depuis que Jacques Monod en a fait le titre d'un livre retentissant, l'association du "hasard" et de la "nécessité" est présente dans tous les esprits. Ces deux mots forment un couple indissociable et antagoniste aussi définitivement lié, par la vertu d'un titre sur une couverture, que "le Rouge et le Noir", "l'Etre et le Néant" ou "Dr Jekyll et Mr. Hyde". Cette accointance nous incite à définir chacun des membres du couple par référence à l'autre, au risque d'un cheminement circulaire semblable à celui des dictionnaires lorsqu'ils définissent, par exemple, la vie comme "le propre des êtres qui sont nés et ne sont pas encore morts" et la mort comme "la cessation de la vie". Le *hasard* serait-il seulement ce qui reste lorsqu'on a épuisé la liste des facteurs participant à la *nécessité*, et la *nécessité* ce qui reste lorsque le *hasard* n'intervient plus ? Une définition moins tautologique est évidemment nécessaire ; elle va mettre en évidence l'intervention d'un troisième terme, la *finalité*.

Ces concepts s'introduisent à propos des attitudes possibles lorsque nous cherchons à expliquer les événements dont nous sommes les témoins. Nous pouvons admettre qu'ils sont la conséquence *nécessaire* de l'état du monde à l'instant où ils se produisent, état qui résulte de son histoire antérieure ; le présent est alors le produit du passé. Nous pouvons aussi renoncer à chercher un rapport entre ces événements et les conditions de leur survenue ; le présent n'est alors que le produit sans cause de lui-même, l'oeuvre du *hasard*. Nous pouvons enfin admettre qu'ils ont eu lieu pour rendre possible un événement futur, qu'ils sont au service d'une *fin*, le présent est alors le produit de l'avenir.

Ces trois termes : nécessité, hasard, finalité, sont donc la traduction de notre opinion sur le sens dans lequel agit la flèche du temps.

*De la pensée magique à Démocrite*

La réponse la plus simple, lorsque nous essayons de comprendre ce qui se passe autour de nous, est d'admettre que tout événement est le résultat des décisions d'un être puissant et inconnu. Nous ne sommes plus intrigués par la tempête si nous l'attribuons à une colère de Poséïdon, par la foudre si elle est une manifestation de la puissance de Zeus. Tout ce qui survient dépend des volontés ou des caprices des dieux. Ceux-ci sont décrits comme des personnages semblables aux humains ; ils sont animés par des intentions, par le désir de parvenir à un résultat. La pensée magique est donc fondamentalement finaliste : elle admet que le présent est au service d'un futur choisi par une divinité.

L'avantage de cette vision est de fournir une explication de tout ; il suffit, lorsque les divinités déjà en place dans le panthéon collectif ne sont pas suffisantes, d'ajouter de nouveaux personnages. Le prix à payer est d'accepter une attitude de soumission, car si tout dépend des dieux, chacun de nous en est le jouet.

C'est le refus de cette soumission qu'exprime la phrase de Démocrite qui a inspiré son titre à Jacques Monod : "Tout ce qui existe dans l'univers est le fruit du hasard et de la nécessité". Que pouvaient signifier ces mots pour un philosophe grec quatre siècles avant Jésus-Christ ?

Le sens de cette affirmation doit être cherché moins dans les deux termes énoncés que dans l'absence du troisième. En fait, en omettant de citer la finalité, Démocrite recuse l'influence des dieux.

Il propose de rendre compte de la succession des événements en admettant certaines régularités, les "lois de la nature", qui à chaque instant transforment l'état du monde, et qui participent à la *nécessité ;* mais il reconnaît que ces lois n'expliquent pas tout ; force est de constater qu'une part des faits échappe à leur rigueur ; cette part est attribuée au *hasard*.

De l'action des dieux, de la finalité qu'ils introduisent, il n'est plus question. Ce faisant, Démocrite fonde l'attitude scientifique.

Celle-ci consiste à tenir compte d'une évidence : l'avenir n'a pas d'existence, il est donc exclu de tenir compte de lui pour expliquer le présent. Les efforts de compréhension produits par les scientifiques seraient rendus stériles au départ s'ils admettaient qu'un fait se produisant aujourd'hui puisse être expliqué par la réalité de demain.

Il ne s'agit pas là d'une croyance à imposer, mais d'une règle du jeu à respecter. Il est parfaitement possible d'admettre que tout fait résulte de la volonté d'un Dieu (ou de dieux) veillant à la réalisation du programme qu'Il a (ou qu'ils ont) adopté, et intervenant, en permanence ou par impulsions, pour atteindre la fin, qu'il a (qu'ils ont) décidée. Rien ne peut prouver que cette hypothèse "finaliste", est fausse. Mais l'accepter est rendre vaine toute tentative d'explication rationnelle des faits observés. Entrer dans le cheminement scientifique, c'est prendre pour règle de ne pas y recourir.

Cette attitude consiste à regarder le monde réel avec la volonté de le déchiffrer, à se sentir simultanément immergé en lui et face à lui, à lui poser des questions en sachant que les réponses seront souvent provisoires et toujours partielles. Choisir cette voie manifeste une orgueilleuse volonté d'autonomie. Certes, il faut en payer le prix de doutes, de tâtonnements, de frustrations, mais elle procure aussi (à vrai dire depuis peu) de magnifiques récompenses. Comprendre l'enchaînement des causes et des effets permet parfois de modifier leur succession et d'engager la suite des événements dans une direction que la nature n'aurait pas spontanément suivie. L'exemple le plus clair est celui des maladies ; comprendre leur cause permet de plus en plus souvent de les guérir, alors que nous en étions autrefois réduits aux incantations et aux remèdes empiriques. Nous savons, grâce à la science, sauver des vies : si le roi est à l'agonie, une piqûre d'antibiotiques (attitude se référant à la nécessité) peut être plus efficace que l'attitude finaliste des chants implorant " God save the King ".

On comprend l'émotion ressentie par Jacques Monod en découvrant Démocrite : c'est le programme de la science que celui-ci a tracé il y a vingt-quatre siècles.

*Les déguisements de la finalité*

Certains raisonnements scientifiques donnent, à vrai dire, l'impression de suivre une démarche finaliste. Tel est le cas lorsque le processus étudié est présenté comme tendant vers un certain objectif, notamment vers l'optimisation de tel ou tel paramètre. Ainsi, selon la mécanique classique, le cheminement d'un système matériel pour passer d'un état initial à un état final est expliqué par le *principe de moindre action* : la trajectoire suivie par les différents éléments de ce système est celle qui rend minimale la somme des actions nécessaires. (ce concept d'action est défini à partir de celui d'impulsion, c'est à dire du produit de la masse par la vitesse : un objet de masse *m* et de vitesse *v* a une impulsion p = mv ; lorsque cet objet parcourt la longueur *l*, son action A est définie A = pl = mvl.)

Tout se passe comme si, face aux multiples possibilités de changement qui s'offrent à elle, la structure concrète choisissait la trajectoire correspondant à l'action globale la plus faible. L'introduction d'un choix dans le raisonnement est équivalente à l'acceptation d'un objectif, donc au recours à la finalité.

L'exemple classique est celui de la réfraction d'un rayon lumineux lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre ; son parcours rectiligne est alors brisé. Ce changement d'orientation est expliqué en recourant au concept d'indice de réfraction : les angles d'incidence et de réfraction ( c'est à dire les angles *i* et *r* du rayon lumineux avec la perpendiculaire à la surface de séparation) sont tels que

sini/sinr = nr/ni

ou *ni* et *nr* sont les indices de réfraction des deux milieux. mais une telle présentation est plus une définition des indices de réfraction qu'une explication des causes du phénomène.

Ces causes peuvent être recherchées dans le fait que la lumière n'a pas la même vitesses dans les deux milieux et que le parcours choisi est celui qui rend minimal le temps total du parcours.

Pour comprendre le comportement du rayon lumineux, le physicien Richard Feynman imagine un homme assis sur une plage et qui voit soudain dans la mer un enfant en difficulté ; il faut vite lui porter secours, sinon il risque de se noyer. Pour être efficace, cet acteur ne doit pas se précipiter en ligne droite vers l'enfant, ce qui est le trajet le plus court, mais faire un détour de façon à allonger son trajet sur le sable, où il peut courir vite, et raccourcir celui dans l'eau , où sa nage est lente. De même, un rayon lumineux allant d'un point A dans l'air à un point B dans l'eau ne suit pas la ligne droite AB, mais fait un détour par le point C, car sa vitesse $c_i$ dans l'air est plus grande que sa vitesse $c_r$ dans l'eau.

Un calcul simple (...), permet de caractériser la position du point C minimisant la durée totale du parcours par la relation

$\sin i/\sin r = c_i/c_r$

On constate ainsi que les indices de réfraction, introduits empiriquement pour expliquer le phénomène observé, sont en fait reliés à une réalité physique : la vitesse de la lumière qui varie selon les milieux.

Mais l'important pour notre propos est que le raisonnement tenu est parfaitement finaliste, et la métaphore imaginée par Feynman le montre à l'évidence : l'homme à la plage a un objectif, arriver le plus vite possible. Faut-il admettre que la lumière a une attitude semblable et que les photons, avant de quitter le point A, font les calculs définissant le point C vers lequel ils doivent se diriger, pour ensuite obliquer vers B ? Telle n'est évidemment pas l'intention du physicien ; il constate que tout se passe comme si la nature avait un objectif, mais cette apparence n'est que le résultat de la multiplicité des causes en action.

De même, Newton se gardait d'affirmer que "les masses s'attirent", il se contentait de constater que tout se passe comme si elles s'attiraient. Avec la théorie de la relativité d'Einstein, cette apparence trouve une explication qui ne fait plus appel à une quelconque "attirance", mais à une courbure de l'espace.

Chaque fois qu'un processus est expliqué par la recherche d'un optimum, le "péché de finalisme" est effectivement commis, car le raisonnement revient à admettre que la nature fait un choix entre plusieurs attitudes possibles et qu'elle dispose d'un critère faisant référence à l'état futur de la réalité. Pour rester fidèle à la règle du jeu de la science, il est essentiel de ne pas oublier le "tout se passe comme si", qui est un aveu d'ignorance, donc une incitation à poursuivre la recherche.

*De Démocrite à Laplace*

Malgré la tentation permanente d'une attitude finaliste, la recherche de processus ne faisant appel qu'au déterminisme a obtenu de remarquables succès. Ils ont incité non seulement à récuser la finalité, mais aussi à réduire autant que possible le rôle du hasard. Celui-ci n'est vu que comme une conséquence de notre ignorance, une *terra incognita* provisoire dans notre description des enchaînements de cause à effet. Nous sommes enclins à n'attribuer d'importance qu'au seul acteur véritablement sérieux, le déterminisme qui fait, sans état d'âme, se succéder les événements dans une séquence rigoureuse. Le hasard n'est qu'un trublion dont la disparition est souhaitée. La nécessité fait penser à l'excellent Dr Jekyll, le hasard à l'abominable Mr. Hyde.

Un tel regard sur la réalité a été poussé à son paroxysme par le physicien et mathématicien Simon de Laplace au début du XIX$^{e}$ siècle.

Dans un texte célèbre, il imagine un personnage (un démon, comme on disait alors) informé de toutes les lois de la nature et connaissant l'état, à un instant donné, de toutes les particules qui constituent l'Univers. Utilisant les formules mathématiques qui traduisent ces lois, ce démon serait en mesure de décrire ce que sera l'Univers à l'instant suivant, et, de proche en proche, tous ses états futurs, ; puis par des calculs semblables, de reconstituer tous ses états passés.

Dans la pensée de Laplace, l'Univers est réellement semblable à l'horloge dont Voltaire cherchait l'horloger ; chaque rouage en est dépendant de tous les autres, que se soit dans l'espace ou dans la durée. Connaître un lieu ou connaître un instant du cosmos, c'est être capable de connaître la totalité de son déploiement dans l'espace et la totalité de son histoire passée et à venir. La réalité d'aujourd'hui contient celle d'aujourd'hui et celle de demain ; l'Univers est comme enfermé dans une trajectoire préétablie dont il ne peut s'échapper ; le passage du temps ne fait que révéler ce qui était jusqu'alors caché sans rien apporter de fondamentalement nouveau.

Cette vision correspond assez bien à celle que nous retirons d'un premier regard sur ce qui nous entoure. À quelques détails près, l'univers semble immuable. "Il n'y a jamais rien de nouveau sous le soleil ? Tout est vanité et poursuite du vent", dit l'Ecclésiaste.

Que l'Univers soit stable, figé dans un état définitif, paraît en un premier temps, plutôt rassurant, tout au moins dans la mesure où nous nous regardons nous-mêmes comme simplement de passage, d'une autre nature que le monde réel. Mais, dès que nous admettons que nous en sommes un élément, il nous faut assumer le même statut et, par conséquent, perdre tout espoir de liberté.

Cette vision d'un monde sur lequel le temps n'a aucune prise, dont l'avenir est contenu dans le présent, est homogène à celle de la "prédestination" développée dans le domaine spirituel par Jean Calvin. Pour ce théologien, tout, y compris le salut éternel de chacun, a été décidé dès le jour de la Création. Pour le physicien qu'est Laplace, ce n'est pas du salut des âmes qu'il est question, mais son raisonnement aboutit au même constat pour le devenir du monde concret, dont chaque individu fait partie. Faut-il alors, au nom de la lucidité scientifique, accepter que la liberté tant célébrée ne soit qu'une chimère de poète ?

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)**
**DEPARTEMENT DE STATISTIQUE**
**BP 5084**
**DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIE A***

**DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 3 HEURES**

## Exercice 1

Le code antivol d'une autoradio est un nombre de 4 chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1,…,9.

1) Quel est le nombre de codes possibles ?

2) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux.

3) Après une panne de batterie, le propriétaire doit réintroduire son code pour pouvoir utiliser son autoradio. Il sait que les quatre chiffres de son code sont 2, 5 , 5, 8, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.

    a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces quatre chiffres ? On pourra déterminer ces codes en construisant un arbre.

    b. Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 1 minute avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 2 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, le délai est de 4 minutes, entre le quatrième et le cinquième essai, il est de 8 minutes … et ainsi de suite, le délai d'attente double entre deux essais successifs.

Calculer en fonction de *n* la durée d'attente $u_n$ (exprimée en minutes) entre le *(n-1)*-ième et le *n*-ième essai pour $n \geq 2$. En déduire en fonction de *n* le temps nécessaire (exprimée en minutes) pour tenter un *n-ième* essais.

**c. Applications** : On utilisera les approximations suivantes dans les calculs (*ln* désigne le logarithme népérien): $ln(1441) = 7.27$ ; $ln(2) = 0.69$ ; $2^{19} = 524288$.

1 - Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

2 - L'autoradio a été volé. Le voleur, ne connaissant pas les 4 chiffres du code, décide d'introduire successivement des codes formés de 4 chiffres distincts choisis au hasard. Combien temps le voleur passera-t-il pour introduire 20 codes de 4 chiffres, sachant qu'il doit respecter le délai entre deux essais successifs décrit dans la question 3.b).

## Exercice 2

On désigne par **C** l'ensemble des nombres complexes.

1) Montrer que pour tout nombre complexe *z* différent de 1, on a l'égalité :

$$\frac{z^4 - 1}{z - 1} = z^3 + z^2 + z + 1$$

*2)* Résoudre dans C l'équation **:** $z^4 = 1$

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation dans **C** :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0 .$$

4) On pose $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

   a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan complexe tels que *Z* soit réel.
   b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que *Z* soit imaginaire pur.
   c) Déterminer l'ensemble (G) des points M tel que $|Z| = 1$.

Représenter graphiquement ces ensembles.

**Problème**

On considère la fonction $f$ définie sur R par :

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

et on note (C) sa courbe représentative.

**Partie A**

1) Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$. Soit B le point de (C) d'abscisse 1. Préciser l'ordonnée de B et l'équation de la tangente à (C) en B.

2) On note A le point où la courbe (C) coupe l'axe des ordonnées. Déterminer l'équation de la tangente à (C) en A. Montrer que cette tangente est parallèle à la droite ($\Delta$) d'équation $y = x$. Préciser les coordonnées du point où cette tangente coupe l'axe des abscisses.

3) Montrer que la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote quand x tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de la fonction f quand x tend vers $-\infty$.

4) Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

5) Calculer à l'aide de deux intégrations par partie successives l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x} dx$$

**Partie B**

Dans cette partie, on cherche à déterminer une valeur approchée de $x_0$, abscisse du point d'intersection $M_0$ de la courbe (C) et de la droite ($\Delta$) d'équation $y = x$ (voir la 2ème question de la partie A). On admet l'encadrement $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.

1) Donner une approximation décimale, à $10^{-2}$ près, de $f(1)$ et de $f(\frac{3}{2})$ en utilisant les valeurs approchées suivantes : $e^{-1} = 0.368$ et $e^{-3/2} = 0.223$.

2) On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0$$

En utilisant la décroissance de $f$ sur $[1, +\infty[$, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

3) Montrer que pour tout réel x appartenant à $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, on a $| f'(x) | \leq \frac{1}{2}$.

4) Justifier l'égalité $f(x_0) = x_0$. Montrer alors que, pour tout entier naturel n :

$$| u_{n+1} - x_0 | \leq \frac{1}{2} | u_n - x_0 |$$

puis que :

$$| u_n - x_0 | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)$

5) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n - x_0$ et $u_{n+1} - x_0$ sont de signes contraires. A partir de ces résultats, montrer comment on peut calculer une approximation de $x_0$, par exemple à $10^{-3}$ près. On ne demande pas d'effectuer les calculs.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE–CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

**AVRIL 2002**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**VOIE A**

**CALCUL NUMERIQUE**

**DUREE : 2 HEURES**

**Problème :** Dans un magasin de vente de cuisines équipées, on veut étudier la liaison entre le nombre $x$ d'appels téléphoniques de personnes intéréssées par les cuisines ($x$ est donné en centaines d'appels) et le chiffre d'affaires réalisé $y$ ($y$ est donné en 2000 Euros). Les résultats simplifiés sont présentés dans le tableau ci-dessous, où les $n_{ij}$ représentent le nombre de semaines où le magasin a reçu $x_i$ appels téléphoniques et a fait $y_j$ de chiffre d'affaires.

| | $y_1 = 1$ | $y_2 = 3$ | $y_3 = 4$ | $y_4 = 5$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1 = 2$ | 4 | 3 | 2 | 0 |
| $x_2 = 3$ | 2 | 3 | 4 | 1 |
| $x_3 = 6$ | 0 | 4 | 5 | 3 |
| $x_4 = 7$ | 0 | 5 | 7 | 7 |

# 1 Tableau.

On définit les quantités :

$$\begin{aligned} n_{.j} &= \sum_{i=1}^{4} n_{ij}, \quad \forall j = 1, \ldots, 4, \\ n_{i.} &= \sum_{j=1}^{4} n_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots, 4, \end{aligned}$$

$$\text{et}$$
$$n = \sum_{i=1}^{4} n_{i.}, \quad n \text{ est l'effectif total.}$$

1. Que représentent les quantités $n_{2.}$ et $n_{.3}$ ?
2. Calculer $\tilde{n} = \sum_{j=1}^{4} n_{.j}$. En déduire une relation entre $\tilde{n}$ et $n$.
3. Dresser un tableau en complétant celui qui est dans l'énoncé comme suit :

   **a.** dans la sixième colonne, on calculera les quantités $n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la septième colonne, on calculera les produits $x_i n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la huitième colonne, on calculera les produits $x_i^2 n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la neuvième colonne, on calculera les quantités $x_i \sum_{j=1}^{4} n_{ij} y_j$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$.

   **b.** sur la sixième ligne, on calculera les quantités $n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la septième ligne, on calculera les produits $y_j n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la huitième ligne, on calculera les produits $y_j^2 n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la neuvième ligne, on calculera les quantités $y_j \sum_{i=1}^{4} n_{ij} x_i$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$.

# 2 Moyenne, Variance, Covariance.

On définit les moyennes marginales $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{\bar{y}}$ par :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_{i.}\, x_i,$$
$$\text{et}$$
$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, y_j.$$

On définit les variances marginales $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{V}(y)$ par :

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_{i.}\, x_i^2 - \bar{\bar{x}}^2,$$
$$\text{et}$$
$$\mathrm{V}(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, y_j^2 - \bar{\bar{y}}^2.$$

On définit les écart-types marginaux de $x$ et de $y$ comme étant les racines carrés de $\mathrm{V}(x)$ et de $\mathrm{V}(y)$ respectivement.

On définit la covariance $\mathrm{Cov}(x, y)$ entre $x$ et $y$ par :

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} n_{ij}\, x_i\, y_j - \bar{\bar{x}}\, \bar{\bar{y}}.$$

A partir du tableau établi à la question **1.**3.,

1. Calculer $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{\bar{y}}$. Quelle est la signification de ces deux quantités ?

2. Calculer les variances marginales $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{V}(y)$. En déduire les écart-types marginaux de $x$ et de $y$, exprimés avec leurs unités naturelles.

3. Calculer la covariance entre $x$ et $y$.

4. Déduire de la question précédente le coefficient de corrélation linéaire $r$ entre $x$ et $y$ défini par
$$r = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}}.$$

# 3 Droites d'ajustement.

On appelle droite d'ajustement de $y$ en $x$, la droite D1 d'équation :

$$y = ax + b,$$

avec $a = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{V}(x)}$ et $b = \bar{\bar{y}} - a\,\bar{\bar{x}}$.

On appelle droite d'ajustement de $x$ en $y$, la droite D2 d'équation :

$$x = a'y + b',$$

avec $a' = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{V}(y)}$ et $b' = \bar{\bar{x}} - a'\,\bar{\bar{y}}$.

1. Etablir les équations des droites d'ajustement D1 et D2.

2. Sur un même graphique et dans un même repère rectangulaire avec les $x$ en abscisses et les $y$ en ordonnées, tracer les droites D1 et D2. Représenter sur le graphique, le point $\mathrm{G} = (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$.

**Exercice 1.** **:** Un dé est truqué de façon à ce que les probabilités de chaque face soient proportionnelles à leur numéro, avec le même coefficient de proportionnalité pour toutes les faces.

1. On jette le dé une fois et on note $X$ le numéro obtenu. Dresser un tableau dans lequel figureront sur la première ligne les valeurs possibles de $X$, et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

2. Calculer l'espérance et la variance de $X$.

3. On jette le dé deux fois, et on note $Y$ la somme des numéros obtenus. Dresser un tableau dans lequel figureront sur la première ligne les valeurs possibles de $Y$, et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

**Exercice 2. :** Soit $f$ la fonction définie sur $I\!R$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \mathrm{E}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{si} \quad x \in ]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[, \end{cases}$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de $x$.

1. Tracer le graphe de la fonction $f$.
2. Etudier la continuité de la fonction $f$ en $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.