ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

Comparez la Passion et la Volonté.

SUJET N° 2

Peut-on qualifier d'inhumaines certaines actions de l'homme et pourquoi ?

SUJET N° 3

L'inégalité des hommes rend-elle impossible l'égalité des citoyens ?

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $(R^{+*} \times R^{+*})$ par $f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, où R^{+*} désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et α, β appartiennent à R^{+*}.

❶ Pour y fixé dans R^{+*}, on pose $g(x) = f(x,y)$. Etudier les variations de g selon les valeurs de α et donner l'allure de son graphe.

❷ On suppose que pour tout couple (x,y) de $(R^{+*} \times R^{+*})$, on a : $ax + by \leq R$, où a, b, R sont des réels strictement positifs.
Déterminer $\underset{x}{\mathrm{Max}}\, f(x,y)$ ($\underset{x}{\mathrm{Max}}$ désigne le maximum de f en x).

❸ Etudier les variations de la fonction h définie par :
$h(t) = \left(\dfrac{R - bt}{a}\right)^{\alpha} t^{\beta}$, où $\alpha, \beta, R, a, b > 0$ et $\alpha + \beta = 1$

EXERCICE n° 2

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{Ln}(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

❶ Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

❷ Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

EXERCICE n° 3

Au jeu de la roulette américaine, il y a 38 numéros ; de 1 à 36, plus le zéro et le double zéro. Chaque joueur a la possibilité de miser sur un numéro, deux numéros ensemble, trois, quatre, six, douze ou dix huit. Les 38 numéros sont équiprobables et rapportent le même gain pour la même mise. A chaque jeu, un seul numéro est gagnant.

Il revient au même de miser un jeton sur un seul numéro x et un autre jeton sur un autre numéro y que de miser deux jetons sur l'ensemble des deux numéros x et y. Il en est de même pour les autres combinaisons. Les stratégies de jeu sont donc équivalentes au niveau des gains.

Le gain pour un seul numéro joué est de 35 fois la mise et on récupère sa mise (par exemple, pour une mise de 100 sur un seul numéro gagnant, on obtient 3600, soit un gain net de 3500).

❶ Quel est le gain obtenu lorsque l'on mise sur 2 numéros, sur 3 numéros, sur 6 numéros ?

❷ Quelle est la probabilité que le numéro x sorte deux fois de suite ? Quelle est la probabilité pour que le couple (x,y) soit gagnant sur deux jeux consécutifs.

❸ A votre avis existe-il une stratégie gagnante ? Expliquer.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + Ln(x)$$

où Ln désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

❶ Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$.

❷ Donner l'allure du graphe de $f_{\frac{1}{2}}$ $(a = \frac{1}{2})$.

❸ Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{\frac{1}{2}}$, l'axe des abscisses, les droites x=1 et x=2.

❹ Montrer que pour tout $\alpha \in \left]0,1\right[$, et tout $x, t > 0$, on a :
$f(\alpha x + (1-\alpha)t) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(t)$

❺ Etudier, selon les valeurs de a, la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = a u_n$.

Etudier la suite (v_n) définie par : $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n - Ln(v_n)$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice n° 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, où $n \geq 3$. On suppose que le tirage de chacune des boules est équiprobable.

On tire une boule, on note son numéro et on le remet dans l'urne. Puis on tire une seconde boule, on en note le numéro.

On appelle X la variable aléatoire définie de la façon suivante :

1) si les deux numéros sont égaux, X prend leur valeur commune
2) si les deux numéros sont différents, X prend la valeur du plus grand des deux

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_2 : X = 2

E_3 : X = 3

E_p : X = p, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

2) Calculer l'espérance de X. On utilisera les expressions de :

$$\sum_{p=1}^{n} p \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} p^2$$

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n ≥1, on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

1) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n ≥1, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n ≥1, on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!} + I_n$$

4) Montrer qu'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A$$

On pourra déterminer *A* en majorant sur l'intervalle [0, 1] la fonction :

$t \to (1 - t)^n e^{t/2}$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}$$

PROBLEME

On considère le plan affine euclidien **P** muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; **C** est l'ensemble des nombres complexes et *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. On définit pour tout *z* de **C** les deux applications *f* et *g* de **C** dans **C** par :

$$f(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i$$

$$g(z) = z^3 + 2 - 2i$$

I)

1) Déterminer le module et l'argument de chacun des nombres complexes *z* qui vérifient $g(z)=0$. Représenter dans le plan les points ayant pour affixes les nombres trouvés. Quelle est la nature du triangle formé par ces points.

2) Montrer qu'il existe un réel unique *r*, que l'on déterminera, qui vérifie $f(r)=0$. Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir :

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbf{C}$$

3) Résoudre dans **C** l'équation $f(z) = 0$. Démontrer que les points dont les affixes sont solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan **P**.

4) Soient *A, B, C* les points de **P** dont les affixes respectives sont : $-1+3i$, $1+i$ et -4. Déterminer l'affixe du barycentre *G* des points *A, B, C* affectés respectivement des coefficients 4, 3 et 5.

5) On désigne par *h* l'application du plan **P** vers l'ensemble des réels **R** qui à tout point *M* de **P** associe le réel :

$$h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}.$$

où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs.

Calculer *h(A) et h(C).* Exprimer *h(M)* en fonction de $\|\overrightarrow{MG}\|^2$ et *h(G).* Déterminer et dessiner l'ensemble des points *M* de **P** qui vérifient $h(M) = 18$. Justifier le choix du nombre 18.

II) A tout point M de **P** d'affixe z on associe le point M' d'affixe $f(z) - g(z)$

1) Déterminer les coordonnées (x', y') de M' dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en fonction des coordonnées (x, y) de M dans le même repère.

2) A, B, C étant les points définis en I-4), donner une équation de l'ensemble H_1 des points M de **P** tels que O, B *et* M' soient alignés (où O est l'origine du repère).

   Montrer que H_1 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3) Donner une équation de l'ensemble H_2 des points M de **P** tels que O, I, M' soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B, C.

   Montrer que H_2 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes. Donner une équation de H_2 sous la forme $y = \varphi(x)$.

4) Démontrer qu'un point M est commun à H_1 et H_2 si, et seulement si, M' est confondu avec l'origine O du plan.

5) Résoudre dans **C** l'équation $f(z) = g(z)$. En déduire les points communs à H_1 et H_2.

   Construire les courbes H_1 et H_2 dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A

et

B OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Ce texte est tiré du livre intitulé "Université de tous les savoirs", tome 1 "Qu'est-ce que la vie ?", (auteurs collectifs), l'auteur en est Michel Jouvet et le titre : "L'évolutions des états du sommeil". Ce livre est paru aux éditions Odile Jacob en Juillet 2000. Il peut être résumé en 250 mots, plus ou moins 10%.

✶✶✶

(...) Pourquoi l'homme dort-il la nuit ?

On pourrait penser que la raison en est que cela revient moins cher, car on a pas à s'éclairer ni à se chauffer la nuit, si l'on dort. Pendant très longtemps, cette explication a été acceptée mais elle est fausse. Le fait que l'homme dorme la nuit n'est pas dû au cycle soleil/obscurité.

Comment savoir si l'homme s'endort la nuit en fonction de l'alternance lumière/obscurité ? des expériences ont été réalisées pour le savoir. On place quelqu'un dans un bunker complètement fermé, sans aucun contact avec le soleil, sans montre, en lui permettant d'allumer et d'éteindre la lumière électrique quand il veut, ou bien, tout simplement dans une grotte (expérience de Michel Siffre, le spéléonaute). On observe les moments où il est endormi et les moments où il est éveillé. Dans ces conditions de *free-running,* ou de totale désynchronisation, ou encore hors du temps, le soleil ne peut plus jouer son rôle de " donneur du temps " ou de *Zeitgeber* (*Zeitgeber* signifiant en Allemand " qui donne le temps "). Donc, en dehors de tout *Zeitgeber,* le sujet se couche chaque jour un peu plus tard, si bien qu'après une dizaine de jours, il a manqué un jour. Pour les gens qui sont en dehors de la grotte, il est resté 20 jours dans celle-ci ; pour lui, il n'y est demeuré que 19 jours. Comment expliquer cela ?

Première explication le cycle soleil/obscurité ne joue aucun rôle dans l'entretien de ce rythme. Deuxième élément d'explication : le rythme n'est pas tout à fait de 24 heures, il est d'un peu plus de 24 heures. Il varie selon les sujets, mais on admet actuellement que la période endogène d'un sujet que l'on met dans une grotte ou dans un bunker est de 24,3 heures, ce qui n'est pas exactement un jour. En latin, on dit " à peu près un jour " : *circa diem*. Le qualificatif de " circadien " est en fait apparu dans la littérature récemment, dans les années 1960, sous la plume de Halberg. Comment expliquer ce rythme " circadien " ?

La raison en est la suivante : nous avons une horloge dans la tête. Cette idée d'avoir une horloge dans la tête est née au XVIII^{e} siècle, dans l'esprit de l'astronome François Ortous de Mairan. Cet amoureux des plantes possédait chez lui un *Mimosa pudica.* Les feuilles de mimosa ont ceci de particulier qu'elles se redressent le jour et se replient la nuit, d'une façon tout à fait remarquable. L'astronome eut un jour l'idée d'enfermer son mimosa dans un placard obscur : lorsqu'il l'ouvrit à midi, il constata que le mimosa *savait* qu'il y avait du soleil à cette heure-là, puisque ses feuilles étaient ouvertes ; il l'ouvrit à nouveau à minuit, et remarqua que les feuilles étaient fermées. Il décrivit cette expérience dans une note d'une page parue dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* , en 1729, dans laquelle il concluait : " il y a une horloge à l'intérieur du mimosa ". Personne ne l'a cru. Il a fallu attendre 100 ans, en 1820, pour que l'un des meilleurs botanistes, de Candolle, enregistre les mouvements des feuilles de mimosa la nuit et le jour, puis dans l'obscurité totale, et constate les mêmes mouvements des feuilles. La seule explication, conclut-il également, c'est qu'il se trouve une sorte d'horloge dans la plante. Cette horloge, qui nous permet d'aller nous coucher le soir, même sans connaître l'heure, jour un rôle fondamental.

Où se trouve cette horloge dans notre cerveau ? Et pourquoi a t-on une horloge ? Cette horloge est présente en effet dans tous les êtres vivants, de l'unicellulaire à l'homme ; c'est sans doute une des plus grandes inventions de l'évolution, car elle est responsable de ce qu'on appelle " l'homéostasie prédictive ". Où se trouve l'horloge ? On s'est aperçu, en travaillant sur les plantes ou les animaux, que lorsqu'ils avaient un rythme de 23 ou 24,3 heures, il suffisait de leur projeter un bref éclair de lumière pour que leur horloge vienne se remettre à 24 heures. Autrement dit, le rôle du *Zeitgeber* solaire, de la lumière, est très important pour que pour que l'horloge que nous avons dans la tête vienne se remettre à un rythme de 24 heures. L'horloge est donc en rapport avec la lumière, et surtout avec la lumière bleue chez l'homme. L'horloge se trouve dans les yeux de la mouche. Chez les oiseaux, l'horloge est situé dans la " glande pinéale " ou l'*épiphyse,* qui est juste sous l'os du crâne, lequel laisse passer suffisamment de photons pour que le soleil vienne agir sur l'horloge. Le chat, pour sa part, a une horloge qui fonctionne très mal, il n'a pas de rythme *circadien*, et il dort autant le jour que la nuit.

L'horloge, chez l'homme, n'a été découverte que dans les années 1970. En regardant certaines projections de la rétine, on s'est aperçu qu'il y avait deux systèmes dans le cerveau : un *système visuel*, qui passe par la rétine, qui va dans le cerveau, et se termine au niveau du cortex occipital : c'est le système dit *visuel*, qui fait que je vois que vous êtes là. Mais depuis on a découvert le *système photique :* certaines cellules ganglionnaires de la rétine se projettent au niveau du noyau supra-chiasmatique (qui est l'horloge chez l'homme et les mammifères). A partir de ce noyau, tout un système va prévenir le cerveau qu'il fait jour. Ce n'est pas parce que nous sommes conscients qu'il fait jour, grâce à notre système visuel, que notre cerveau, lui le sait. Il y a même un rat complètement aveugle, mais à qui il reste quelques petites cellules sous la peau, qui forment un système suffisant pour venir activer son noyau suprachiasmatique. On peut donc être totalement aveugle, et avoir notre cerveau capable de savoir qu'il fait jour. Certains se demandent même si certaines maladies psychiatriques ne pourraient pas être dues à l'inverse : on peut très bien voir, mais avoir notre système photique défectueux, de telle sorte que l'horloge se recale mal le matin. Ainsi, à certains moments, tandis qu'il sera 3 heures de l'après-midi, elle peut dire à l'organisme qu'il est trois heures du matin. C'est pourquoi, pour traiter certaines maladies dépressives, on fait regarder aux patients, le matin, des tubes fluorescents pour exciter leur système photique. En dehors du système photique, la glande pinéale, (ou épiphyse), est reliée aux noyaux supra-chiasmatiques. A l'obscurité, elle secrète une hormone, la mélatonine, qui favorise l'endormissement. En conclusion, il faut retenir que l'horloge circadienne organise notre sommeil dans le temps, mais elle n'est pas responsable du sommeil.

La preuve en est donnée par l'expérience suivante. Un rat est placé dans l'obscurité continue, son noyau *supra-chiasmatique* lui " dit " d'être éveillé ou de dormir toutes les 24 heures. Ensuite, si on détruit l'horloge des noyaux supra-chiasmatiques (par coagulation avec des électrodes), le rythme circadien est détruit, puisqu'on a plus d'horloge ; et le rat va dormir selon un rythme *plus rapide* que le rythme circadien, c'est à dire selon un rythme ultradien (à peu près toutes les trois heures). L'explication de ce rythme ultradien dans la physiologie du sommeil, n'a pas encore été apportée. Le sommeil est un mystère dans lequel il reste encore beaucoup à découvrir.

Maintenant que l'on sait où est l'horloge et que l'on sait que ce n'est pas le centre du sommeil, et qu'elle sert à installer des périodes de sommeil, posons-nous la question suivante : pourquoi a-t-on une horloge ? A quoi cela peut-il servir ? Permettez-moi la métaphore suivante : au commencement du monde, dans l'océan primitif, il n'y avait que des algues bleues. Elles se groupent dans le fond de l'océan et montent à la surface de la mer pour absorber des photons, c'est à dire à la lumière du soleil, déclenchant une chaîne de réactions chimiques produisant des sucres. Supposons que certaines d'entre elles, " pas très intelligentes ", mettent en jeu les synthèses protéiques lorsque le soleil est au zénith, pendant 5 ou 6 heures pour fabriquer des sucres à partir du soleil : lorsque tout sera prêt pour qu'elles fabriquent des sucres, le soleil sera malheureusement couché. Ce sera donc un échec lamentable. C'est après bien des essais et des erreurs de cette sorte, que les algues se sont enfin mises à fabriquer tous les mécanismes de synthèses *avant 6 heures du matin* (prenant ainsi en compte l'aspect très prédictif de la courbe de la Terre autour du soleil), afin que, le soleil étant à son zénith, toutes les choses soient prêtes, et que tout marche. Cette invention, on lui a donné le nom d'*homéostasie prédictive.* Sans ce système, la vie serait impossible. Tout système vivant entre en réaction avec les milieux extérieurs, et il se produit des réactions chimiques plus ou moins rapides, et si elles ne sont pas préparées par la synthèse des protéines qui doit avoir lieu avant, le système ne peut pas fonctionner, en particulier le système qui dépend du jour et de la nuit.

L'*homéostasie prédictive* a également lieu chez l'homme : le matin, il faut que notre système corticosurrénalien, nos muscles, soient en parfait état. Or, cela ne peut pas se faire instantanément le matin : ça doit être mis en jeu la nuit. Sous l'influence de notre horloge circadienne, vers 2 h du matin, l'hypothalamus, se met à libérer certains facteurs (CRF), qui vont agir sur l'ACTH, lequel va agir sur la corticosurrénale, laquelle va augmenter le tau de cortisone trop faible le matin. Ainsi, c'est au cours du sommeil le plus profond, vers 2-3 heures du matin, que se met en route le véritable mécanisme dont on a besoin lorsqu'on se réveille.

Quittons maintenant les algues bleues pour remonter l'arbre de l'Evolution jusqu'aux *Ectothermes*, c'est à dire les lézards, les batraciens, certains reptiles. Qu'est-ce que le sommeil pour ces animaux là ? A vrai dire, les physiologistes n'osent pas parler de " sommeil ", chez une grenouille, chez un lézard; ils parlent plutôt de " repos ", de " cycle activité/repos ". La température ambiante est le principal facteur qui va entretenir le repos et l'activité. La température, lorsqu'elle monte, rend l'animal actif, lorsqu'elle redescend, le rend inactif. On peut très bien aller chercher une vipère dans le bois de Saint-Cloud à minuit : elle ne mordra pas, parce qu'il fait froid.

Tout ceci résulte de l'application d'un principe : le principe du Q10. Admettons que la fréquence cardiaque de l'animal à 37° C soit de 100; à 27° C, elle sera de 50 ; et le Q10 sera le quotient de 37/27 : ce sera 2. Chez tous les animaux, tous les phénomènes biologiques quels qu'ils soient ont un Q10 compris entre 2 et 3. Une baisse de température de l'ordre de 5° est suffisante pour que ces animaux qui dépendent de la température extérieure, ne puissent pas être éveillés et restent dans leur abri. L'homéostasie prédictive joue toujours un jeu : l'horloge circadienne vers 5 heures de l'après-midi, " dit " au lézard : " mets-toi vite à l'ombre, autrement, plus tard, tu ne pourras pas rentrer car il fera trop froid ". Avec les oiseaux et les autres mammifères, nous sommes des animaux *homéothermes*. Nous possédons suffisamment de mitochondries pour que notre chaleur animale nous permette de nous promener lorsqu'il fait froid. Les variations de la température extérieure ne sont donc pas suffisantes pour expliquer le rythme éveil-sommeil.

Il faut maintenant essayer d'expliquer pourquoi on est inconscient pendant le sommeil.

Pourquoi le ronfleur ne sait-il pas qu'il ronfle ? Que se passe-t-il dans le sommeil des oiseaux et des mammifères que nous sommes, pour que nous perdions conscience au cours du sommeil ?

C'est facile à comprendre pour une grenouille : si elle est à basse température, son système nerveux ne marche pas très bien. Mais, chez les mammifères, chez l'homme, la température reste la même, donc il faut chercher une autre explication. Qu'est-ce que, chez les mammifères et les oiseaux ont acquis de plus par rapport aux reptiles et aux batraciens ? Ils ont acquis le manteau cortical - le cortex cérébral avec lequel on pense -, et un système qui est le thalamus, il y a une espèce de " machine automatique " qui nous rend inconscients lorsque nous dormons.

Que se passe-t-il quand nous sommes éveillés ? Ce cortex cérébral est excité par un réseau de neurones (comme le Web). Cette excitation provoque une activité électrique rapide qui est nécessaire à la conscience.. Comment s'endort-on ? Normalement : lorsque l'horloge - le noyau supra-chiasmatique - va envoyer le signal " il est 10 heures du soir ", on va bailler, avoir sommeil. Des mécanismes compliqués vont commencer à baisser notre température centrale. Elle descend avant que l'on dorme. Ordre est alors donné à un nouveau système situé dans l'hypothalamus - le système du sommeil - d'entrer en jeu. Ce système va venir bloquer les systèmes de l'éveil, avec un neurotransmetteur qui est le " GABA ". Etant donné que les systèmes de l'éveil bloquent cette machine automatique qui est situé au coeur du thalamus, le thalamus envoie alors cette activité vers le cortex où elle vient " brouiller " les processus de la conscience. On a donné à cette activité électrique le nom de " fuseaux ", ou, comme elle a été découverte par les Américains, de *spindle.*

Voilà les grandes acquisitions des homéothermes : ce n'est pas la baisse de la température centrale, qui est minime, qui fait qu'ils ne peuvent pas réagir au bruit, et qu'ils ne savent pas qu'ils ronflent. C'est le système de sommeil qui bloque les informations de l'éveil, libère le système thalamo-cortical responsable des " fuseaux ". L'apparition de ces " fuseaux " au niveau du cortex est l'indice du sommeil et de la perte de conscience. Les fuseaux sont ensuite suivis par l'apparition d'ondes lentes qui sont l'indice d'un sommeil très profond. (...)

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
CONCOURS 2001
ITS A – 2H

Exercice 1. : Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages sans remise. Soient X, Y et Z les variables aléatoires représentant respectivement le plus grand, le plus petit et la somme des deux numéros obtenus.

1. Faire les tableaux **T1**, **T2** et **T3** croisant les valeurs des variables X, Y et Z et leurs probabilités correspondantes.

2. Calculer les espérances mathématiques et les variances de X, Y et Z.

3. Déterminer la fonction de répartition de Z.

Exercice 2. :

1. Démontrer les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Indication : on pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

2. On rappelle que pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, établir une relation reliant la quantité C_{n+1}^{p+1} aux quantités C_n^p et C_n^{p+1}.

Exercice 3. : Etant donnée une suite x_k, $k = 1, \ldots, n$, de réels, on note μ_n sa moyenne et σ_n^2 sa variance définies par

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad\qquad \sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_n)^2.$$

1. Première expression de la variance.

On pose

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

.

Exprimer σ_n^2 en fonction de q_n et de μ_n.

2. Deuxième expression de la variance.

2.1.

a. Etablir les égalités :

$$(n+1)\ \sigma_{n+1}^2 = n\ \sigma_n^2 + n\ (\mu_{n+1} - \mu_n)^2 + (x_{n+1} - \mu_{n+1})^2,$$

$$(n+1)\ \mu_{n+1} = n\mu_n + x_{n+1}.$$

b. En déduire

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{n}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2.$$

2.2. On considère une suite de réels $x_k = 1 + \varepsilon\frac{2k-n-1}{n-1},\ k = 1, \ldots, n\ (n > 1)$ et $\varepsilon \in I\!R$. A partir des relations obtenues à la question **2.1.** et des formules établies à l'**Exercice 2.**, déterminer sa moyenne et sa variance.

Exercice 4. : En faisant une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante

$$\int_1^2 \ln(t)dt.$$