CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ La fonction f n'est pas, à priori, définie en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} - 1)}{x} = 1$$

La fonction φ est donc continue en posant $\varphi(0) = 1$

❷ La dérivée de φ est, $\phi'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$

On étudie alors le signe de $y = e^x(x-1)+1$. sa dérivée est : $y' = e^x(x-1) + e^x = xe^x$

La fonction y est donc croissante sur R^+, décroissante sur R^- et nulle en 0. On en déduit que φ' est toujours positive et donc que φ est strictement croisante de R sur R^+.

❸ Représentation graphique de la fonction φ . On remarque que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$ et elle a donc une branche parabolique dans la direction oy. D'autre part, l'axe des abscisses est une asymptote.

❹ g est définie sur R pour $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ et $x \neq 0$ et d'après ce qui précède elle est définie sur R^*.

$$\lim_{x\to 0} \frac{xg(x)}{\varphi(x) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{Ln(1 + \frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$$

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie aisément que E est un espace vectoriel réel.

❷ Soit $f \in E_p \cap E_i$ alors pour tout réel x, on a :

$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-x)] = 0$, donc $E_p \cap E_i = \{0\}$

❸ Soit une combinaison linéaire nulle des 3 applications f_1, f_2, f_3, à savoir :

$$a\cos t + b\cos 2t + c\cos 3t = 0$$

Pour $t = 0$, on obtient $a + b + c = 0$.

On calcule alors la dérivée seconde et la dérivée quatrième, puis on remplace t par 0, on trouve : $a + 4b + 9c = 0$ et $a + 16b + 81c = 0$.

La résolution du système de ces 3 équations donne $a = b = c = 0$

❹ L'espace G engendré par les fonctions $\{f_1, f_2, f_3\}$ est de dimension 3, de même l'espace H engendré par g_1, g_2 et g_3. L'espace F est donc au maximum de dimension 6.

On a : $G \subset E_p$ et $H \subset E_i$, d'où $\{0\} \subset G \cap H \subset E_p \cap E_i = \{0\}$, donc F est de dimension 6 et $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$ en constitue une base.

❺ D est linéaire car la dérivation est linéaire et toute image par D d'une application de F est encore une combinaison linéaire des vecteurs $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$. D est donc un endomorphisme de F.

Si $f \in Ker\, D$, sa dérivée est nulle et est une combinaison linéaire des vecteurs linéairement indépendants $\{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}$, donc $Ker\, D = \{0\}$ et D est un isomorphisme de F. Comme $Dim \operatorname{Im} D + Dim\, Ker\, D = 6$, on a : $\operatorname{Im} D = F$.

EXERCICE n° 3

❶ La résolution du système $\sum_{k=-1}^{1} a_k = 1,\ \sum_{k=-1}^{1} k a_k = 0$ donne $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1 - 2a_1$.

❷ On vérifie aisément que M_3 est une application linéaire.

❸

$$M_3 f_t = M_3(at+b) = \sum_{k=-1}^{1} a_k (a(t+k)+b) = (at+b)(\sum_{k=-1}^{1} a_k) + a(\sum_{k=-1}^{1} k a_k) = at+b = f_t$$

Comme $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1-2a_1$, on obtient : $M_3 g_t = \cos\omega t\,(1 - 2a_1 + 2a_1 \cos\omega)$ et cette expression est égale à $\cos\omega t$ si et seulement si $2a_1(\cos\omega - 1) = 0$, soit $\omega = 2k\pi$ et $g_t = 1$

et $M_3(f_t + g_t) = f_t + g_t$

❹ Dans l'expression précédente de $M_3 g_t$, en remplaçant les coefficients par $\frac{1}{3}$, on obtient : $1 + 2\cos\omega = 0$, d'où $\omega = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$
Une moyenne arithmétique d'ordre 3 élimine les fonctions périodiques de période 3.

❺ Comme $a_{-1} = a_1$ et $a_0 = 1-2a_1$, on a : $f(a_1) = \sum_{k=-1}^{1} a_k^2 = 6a_1^2 - 4a_1 + 1$
Il s'agit de l'expression d'une parabole strictement convexe et le minimum est donc atteint pour la valeur de a_1 qui annule la dérivée, à savoir :

$$f'(a_1) = 12a_1 - 4 = 0$$

d'où $a_1 = \frac{1}{3}$ et les 2 autres coefficients sont également égaux à $\frac{1}{3}$.

La résolution de ces 3 conditions : $\sum_{k=-1}^{2} a_k = 1,\ \sum_{k=-1}^{2} k a_k = 0,\ \sum_{k=-1}^{2} k^2 a_k = 0$ donne

$a_{-1} = \frac{1}{3}(1-a_0),\ a_1 = 1 - a_0,\ a_2 = \frac{1}{3}(1-a_0)$. Il reste à minimiser la somme des carrés et le raisonnement est le même que dans le cas précédent. La dérivée de cette somme est égale à : $\frac{1}{9}(20a_0 - 11)$. On obtient pour les coefficients :

$$a_0 = \frac{11}{20},\ a_{-1} = \frac{3}{20},\ a_1 = \frac{9}{20},\ a_2 = -\frac{3}{20},$$

On vérifie que appelle $M_4 h_t = h_t$

EXERCICE n° 4

❶ Pour tout couple $(x,y) \in R^2$, $H(x,y) = \sqrt{2}(x,y)$ et $G(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y,x+y)$.

❷ Soit f la composée de H et de G, on a :

$$f(x,y) = HoG(x,y) = (x-y,x+y).$$

❸ On a : $Ker\ f = \{(0,0)\}$ et f est bijective.

PROBLEME

❶ Comme Ln est défini sur R^{+*}, il est de même pour f.

❷ $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}\left[1+x^2+(1-3x^2)Ln\,x\right]$

On vérifie aisément que pour $x^2 = \frac{1}{3}$, la dérivée ne s'annule pas. On en déduit que la dérivée est nulle sur R^{+*} si et seulement si $x \in R^{+*} - \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ ou $Ln\,x = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$

La fonction g cherchée est donc définie par :

$$\forall x \in R^{+} - \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ g(x) = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$$

Le tracé de la courbe (Γ_1) est classique. Pour tracer (Γ_2), courbe représentative de g, étudions rapidement cette fonction.

$g'(x) = \frac{-8x}{(3x^2-1)^2}$ et $g'(x) < 0$ sur son domaine de définition. La fonction est donc décroissante.

On a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^{+}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^{-}} g(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est une asymptote verticale.

Soit h la fonction définie sur $R^{+*} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ par $h(x) = Ln\, x + \frac{1+x^2}{1-3x^2}$

On a, $h'(x) = \frac{8x^2 + (1-3x^2)^2}{x(1-3x^2)^2}$. On en déduit que la fonction h est strictement croissante (et continue), donc bijective de $\left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ sur R et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_1 \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ pour lequel $f'(x_1) = 0$. De même, h est bijective sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ et il existe un unique $x_2 \in \left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ pour lequel $f'(x_2) = 0$.

De plus on remarque que

$$0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < x_2 < 2$$

Puis on calcule $Ln\, x - g(x)$ pour les valeurs suivantes
0.1; 0.2; 0.3; 0.4 et 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9. On obtient

x	0.2	0.3	1.6	1.7
$Ln\, x - g(x)$	-0.427	0.289	-0.063	0.024

On en déduit : $0.2 < x_1 < 0.3$ et $1.6 < x_2 < 1.7$

❸ On vérifie aisément que x_1 et x_2 sont des racines simples de f'

D'autre part, on a $f'(1) = \frac{1}{4}$; On a donc

$0 < x < x_1 \Rightarrow f'(x) < 0$
$x_1 < x < x_2 \Rightarrow f'(x) > 0$
$x_2 < x \Rightarrow f'(x) < 0$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{xLn\, x}{(x^2+1)^2} \approx \frac{Ln\, x}{x^3}$. Il en résulte $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Pour $x > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} Ln\, x \times \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{(x^2+1)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Tableau de variation :

x	0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	$\|$		$f(x_1)$		0		$f(x_2)$		0

On a $f(1)=0,\ f(2)=0.055,\ f(3)=0.033,\ f(4)=0.019$

❹

$$\int \frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right]+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

et

$$\int \frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}$$

On obtient

$$\int \frac{xLn\,x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\,x}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}Ln\,x-\frac{1}{4}Ln(x^2+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2Ln\,x}{x^2+1}\right)-\frac{1}{4}Ln(x^2+1)$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1) L'équation P(z) = 0 admet une solution réelle signifie que:

Soit : $$a^3 - 2a^2 - (4+4i)a - 16 + 16i = 0$$

Il s'ensuit:

Ce système admet une solution unique a= 4 (en vérifiant que a=4 satisfait la première équation.

$$a^3 - 2a^2 - 4a - 16 + i(-4a + 16) = 0$$

$$a^3 - 2a^2 - 4a - 16 = 0$$
$$-4a + 16 = 0$$

L'équation P (z) = 0 admet donc l'unique solution réelle: ***a*=4.**

L'équation P (z) = 0 admet une solution imaginaire pure b = ix (où x désigne un nombre réel) si et seulement si :

ce qui signifie que : $$(ix)^3 - 2(ix)^2 - (4+4i)(ix) - 16 + 16i = 0$$

ou encore : $$-ix^3 - 2x^2 - 4ix + 4x - 16 + 16i = 0$$

Par conséquent, x doit vérifier le système d'équations suivant:

$$2x^2 + 4x - 16 + i(-x^3 - 4x + 16) = 0$$

La première équation admet deux solutions: *x = -4 et x = 2* .

Pour x = -4, on a : $-4^3 - 4x4 + 16 = 96$.

$$2x^2 + 4x - 16 = 0$$
$$-x^3 - 4x + 16 = 0$$

Pour x = 2, on a : $-2^3 - 4x2 + 16 = 0$. Seul x=2 vérifie la deuxième équation.

L'équation P (z) = 0 admet donc ***2i*** pour solution imaginaire pur**.**

4 et 2 i étant racines du polynôme P, on peut donc écrire que, pour tout complexe z :

P $(z) = (z-4)(z-2i)(z-c)$, où c est un nombre complexe.

Or P $(z) = (z-4)(z-2i)(z-c)$ équivaut à :

$$P(z) = z^3 + (-c-2i-4)z^2 - (4c+2ic+8i)z - 8ic$$

pour tout complexe z. Par conséquent, c doit vérifier le système de trois équations :

$$\begin{cases} -c-2i-4=-2 \\ 2ic+4c+8i=-4-4i \\ -8ic=-16+16i \end{cases}$$

dont l'unique solution est $c = -2-2i$.

L'ensemble des solutions de l'équation P(z) = 0 est donc : {4; 2i; -2-2i}

3) A, B, C sont les points d'affixes respectives 4, 2i et -2-2i.

On a :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-2-4i}{4-2i} = \frac{-i(4-2i)}{4-2i} = -i$$

Une mesure de l'angle **(BA; BC)** est donc -π/2.

De plus, on peut écrire que le module de $\frac{c-b}{a-b}$ est égal à 1, c'est à dire que $|c-b| = |a-b|$

Donc BC=AB**.** Le triangle est donc isocèle rectangle en B.

EXERCICE n° 2

1) Il y a 3 réponses par question et une seule est bonne, donc la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte à la première question est 1/3.
2) Il y a 3 réponse par question et le candidat doit répondre à 10 questions, donc la probabilité que le candidat donne les réponses exactes aux 10 questions est égale à $\frac{1}{3^{10}}$
3) Nous sommes dans le cadre d'application de la loi binomiale B(n, p) avec n=10 et p=1/3 puisque l'on répète 10 fois la même épreuve et que les 10 questions sont indépendantes.

Si l'on note k le nombre de réponses exactes donnnées par le candidat, nous avons alors

4) Les valeur de P_k sont *:*

$$P_0 = 0.0173; P_1 = 0.0867; P_2 = 0.1951; P_3 = 0.2601; P_4 = 0.2276;$$

5) Le candidat a 0 point si le nombre de réponses exactes est inférieur ou égal à 4, c'est à dire 0, 1, 2, 3 ou réponses exactes. La probabilité d'avoir 0 est donc la somme de P_0 *à* P_4 , soit 0.7868.

PROBLEME

Partie I

1) La relation *M(a, b) = aJ + bI* montre que *E* est le sous-espace vectoriel des matrices carrées **M**(R) engendré par (*I, J*). Les éléments *I* et *J*, étant linéairement indépendants, constituent une base de ce sous-espace vectoriel.

2) Il est clair que $J^2 = I$. La stabilité pour la multiplication découle aussitôt de la bilinéarité de cette loi.

L 'ensemble *E*, étant un sous-espace vectoriel de **M**(R), est en particulier un groupe commutatif pour l'addition. Cet ensemble, contenant *I* et étant stable pour la multiplication matricielle, est un sous-anneau (unitaire) de l'anneau (unitaire) **M**(R). Les éléments *I* et *J* étant permutables, ce sous-anneau est commutatif.

3) Cherchons l'inverse de *M(a, b)* sous la forme *M(a', b')*. Puisque (*I, J*) est une base, nous sommes ramené à résoudre le système:

$$aa' + bb' = 1 \qquad ba' + ab' = 0.$$

Le déterminant est a^2-b^2 . Si a^2-b^2 est non nul, le système est cramérien, et

$M(a', b') = (aJ-bI)/(a^2-b^2)$. Sinon le système n'a pas de solution.

Partie II

1) Il vient aussitôt: $x' = ax \qquad y' = ax - ay + a + 3$.

2) Pour que f_a soit une bijection, il faut et il suffit que $M(a, 0)$ soit inversible, c'est à dire que a soit non nul.

Dans ces conditions, $x = \frac{1}{a}x'$ *et* $y = \frac{1}{a}(x' - y' + 3) + 1$.

3) L'ensemble D est déterminé par le système*:*

$$(1-a)\,x = 0 \text{ et } ax - (1+a)y + a + 3 = 0$$

Si a est différent de 1 et de -1, il y a un point fixe et un seul de coordonnées $x = 0$ *et* $y = (a+3)/(a+1)$.

Si a = 1, l'ensemble D est la droite affine d'équation de $y = x+4$. Si a = -1, la première équation impose x = 0; la seconde équation conduit à une impossibilité et l'ensemble D est vide.

4) L'application $f_a o$

Si a = 1, l'ensemble D est la droite affine d'équation de $y = x+4$. Si a = -1, la première équation impose x = 0; la seconde équation conduit à une impossibilité et l'ensemble D est vide.

2) L'application $f_a o f_a$ soit égale à l'identité, on doit supposer que a est non nul. Cette relation implique que $(M(a, b))^2 = I$, et donc que $a^2 = 1$, c'est à dire a=1 ou a=-1. L'application f_1 a un point fixe alors que f_{-1} n'en a pas.

Partie III

1) La dérivée de h est donnée par la relation :

$$h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 1)$$

Lorsque x tend vers 0, ln x tend vers -∞. D'où $\lim_{0+} h(x) = +\infty$.

La relation $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ implique $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

D'où le tableau :

X	0		1		$+\infty$
h'(x)		-		+	
h(x)	$+\infty$	->	3	->	$+\infty$

Le minimum étant 3, *h (x)* est toujours positif.

2) La dérivée de *g* est :

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{Lnx}{2} = \frac{h(x)}{2x^2}$$

D'après la question 1), g' est à valeurs strictement positives.

Il est immédiatement que $\lim_{0+} g(x) = -\infty$. La relation:

$$g(x) - \frac{x}{2} - 2 = \frac{Lnx}{x}$$

implique $Lim_{+\infty}\left[g(x) - \frac{x}{2} - 2\right] = 0$

En particulier, $\lim_{+\infty} g(x) = +\infty$.

La courbe *C* admet pour asymptote l'axe *Oy* et la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 2$.

En résumé, g(x) croit de $-\infty$ à $+\infty$ quand x croit de *0 à* $+\infty$.

3) a) Le point (x, y) appartenant à *C* a pour image le point de coordonnées *x'=x* ,

$$y' = x - (\frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}) + 4 = \frac{x}{2} + 2 - \frac{\ln x}{x}$$

b) Les raisonnement de la question 2) s'appliquent de la même manière.

4) Comme $\ln x$ est positif sur l'ensemble considéré, (C) est au-dessus de (C_1). L'aire est, en unité d'aire :

$$A(m) = \int_1^m [g(x) - g_1(x)]dx = 2\int_1^m \frac{\ln x}{x} dx = [\ln(m)]^2$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE n° 1

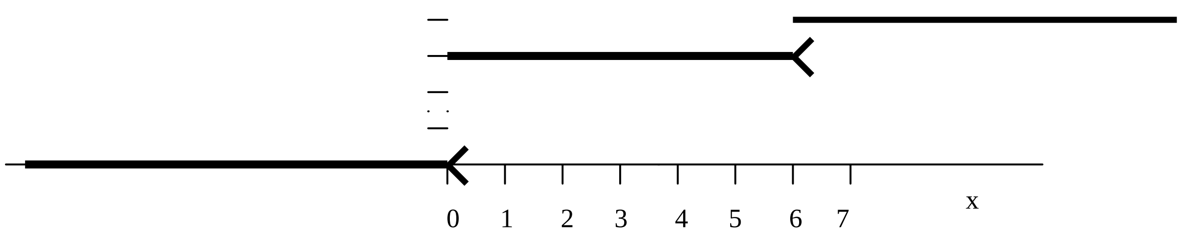
1.

a. Le tableau **T1** donne la loi de probabilité de X puisqu'il croise les valeurs possibles prises par X et les probabilités correspondantes.

Valeurs de X notées k	0	6
P(X=k)	¾	1/4

b. $E(X) = 0 * (3/4) + 6 * (1/4) = 3/2.$
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 36/4 - 9/4 = 25/4.$

c. Soit F, la fonction de répartition de X :
pour tout $x < 0$, $F(x) = 0$
$F(0)= 3/4$; pour tout x tel que $0 < x < 6$, $F(x) = 3/4$;
$F(6) = 1$ et pour tout $x > 6$ $F(x) = 1$.



2. On jette maintenant 5 fois de suite le dé.

$$P(\text{"au moins 1 fois } X = 0\text{"}) = 1 - P(\text{"aucune fois } X = 0\text{"})$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1023}{1024}$$

3. On suppose à présent que le nombre de lancers du dé est un entier n strictement positif. On cherche à déterminer n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à $n_{0,}$ on a

On en déduit que le nombre minimal cherché est égal à 9.

EXERCICE n° 2

1. **Premier encadrement.**

a.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{10+x}\,dx = \ln(10+x)\Big]_0^1 = \ln\left(\frac{11}{10}\right)$$

b. La suite x^n étant décroissante pour x dans [0,1], on obtient l'inégalité suivante

$$x^n \geq x^{n+1}$$

On en déduit que

$$I_n \geq I_{n+1}, \quad \forall\, n \in IN,$$

c'est à dire que la suite $(I_n)_{n \in IN}$ est décroissante.

c. Lorsque $x \in [0,1]$, $10 \leq 10 + x \leq 11, \quad et$

$$\frac{x^n}{11} \leq \frac{x^n}{10+x} \leq \frac{x^n}{10}.$$

En intégrant sur [0,1] les 3 quantités ci-dessus, on obtient le résultat demandé.

2. **Deuxième encadrement.**

a. Etant donnée la décroissance de la suite I_n, on a directement une minoration de $I_n - I_{n+1}$ par 0. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$10 \leq 10 + x \leq 11, \quad et$$

$$\frac{1}{11} \leq \frac{1}{10+x} \leq \frac{1}{10}.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10} \int_0^1 x^n\,(1-x)\,dx = \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)},$$

la dernière égalité s'obtient en faisant une intégration par parties en posant

$u' = x^n$ et $v = (1- x)$.

L'encadrement de $I_n - I_{n+1}$ est

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}.$$

b. La relation de récurrence s'obtient de la façon suivante

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{10+x}\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 \frac{10+x-10}{10+x}\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 (1-\frac{10}{10+x})\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 x^{n-1}\, dx - 10 \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{10+x}\, dx$$

$$= \frac{1}{n} - 10\, I_{n-1}.$$

c. Les questions 2.a et 2.b conduisent à

$$0 \le I_n - I_{n+1} \le \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)} \Leftrightarrow 0 \le I_n - \frac{1}{n+1} + 10\, I_n \le \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{11\,(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{11\,(n+1)} + \frac{1}{110\,(n+1)\,(n+2)}.$$

3.

a. Pour l'encadrement de la question 1., on obtient l'erreur absolue $\Delta_{n,1}$ égale à

$\Delta_{n,1}$=1/ (110 * (n+1)), l'erreur relative $\xi_{n,1}$ est égale à $\xi_{n,1}$ = 1/10.

Pour l'encadrement de la question 2., on obtient l'erreur absolue $\Delta_{n,2}$ égale à

$\Delta_{n,2}$=1/ (110 * (n+1) * (n+2)), l'erreur relative $\xi_{n,2}$ est égale à
$\xi_{n,2}$=1/(10*(n+2)).

b. On pose n=36. La valeur approchée de I_{36} est 1/(11*37).
L'erreur relative est :

- pour le premier encadrement : 0.1
- pour le deuxième encadrement : 1/(380) = 0.003.

EXERCICE n° 3

Remarquons que $a_n > 0$ et que $b_n > 0$ pour tout n ϵ IN.

Montrons que pour tout n positif ou nul, a_n est inférieur ou égal à b_n :
C est vrai à l'étape n=0 par hypothèse ; montrons le à l'étape n+1.

$$(a_n - b_n)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a_n + b_n)^2 \ge 4\, a_n\, b_n \Leftrightarrow \frac{a_n + b_n}{2} \ge \sqrt{a_n\, b_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \le b_{n+1}.$$

La suite (a_n) est une suite croissante et la suite (b_n) est décroissante :

$$a_n = \sqrt{a_n^{\ 2}} \le \sqrt{a_n\ b_n} = a_{n+1}.$$

Montrons que lim (a_n - b_n)=0 quand n tend vers l'infini :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} < 0.$$

$$0 \le b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} < \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad \to 0, \quad quand \quad n \to +\infty.$$

Les suites a_n et b_n sont donc adjacentes.