CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ ① $p_{1a} = 0,8538$.

② $p_{1b} = (0,8538)^5 = 0,4537$.

❷ ① $p_{2a} = (0,8538)^{30} = 8,723 \cdot 10^{-3}$.

② $p_{2b} = 30 \times (0,8538)^{29} \times (0,1226 + 0,0236) = 4,481 \cdot 10^{-2}$.

③ $p_{2c} = 1 - (p_{2a} + p_{2b}) = 0,9465$.

❸ ① $\pi = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0,2 - 0,25 \times p}{1 - p}$.

② $\pi \le 0,1 \Leftrightarrow p \ge \dfrac{2}{3}$ donc p=0,6667.

③ La probabilité cherchée est la somme des probabilités d'avoir décontaminé 20, 21, 22, 23, 24 ou 25 parcelles, soit :

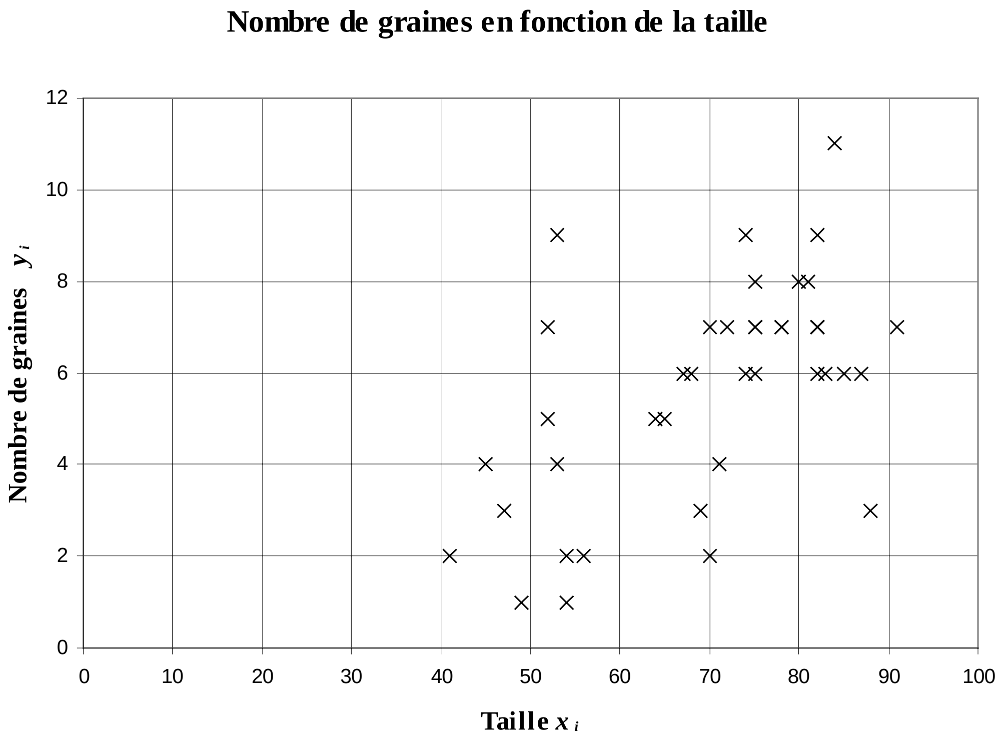
$$\begin{aligned} p_{3c} &= \mathbf{C}_{25}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} + \mathbf{C}_{25}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{21}\left(\frac{2}{3}\right)^{4} + \mathbf{C}_{25}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{22}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \mathbf{C}_{25}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{23}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \mathbf{C}_{25}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{24}\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{25} \\ &= 2,269.10^{-6} \end{aligned}$$

EXERCICE n° 2

❶

	Taille	Nombre de graines
Minimum	41	1
Maximum	91	11
Moyenne	69,58	5,65
Mode	82	7
Médiane	73	6
Ecart type	13,53	2,40

❷



❸ On remarque que le nombre de graines semble proportionnel à la taille des gousses, mais ce lien n'est pas déterministe, comme en témoigne la dispersion des points du graphique.

❹

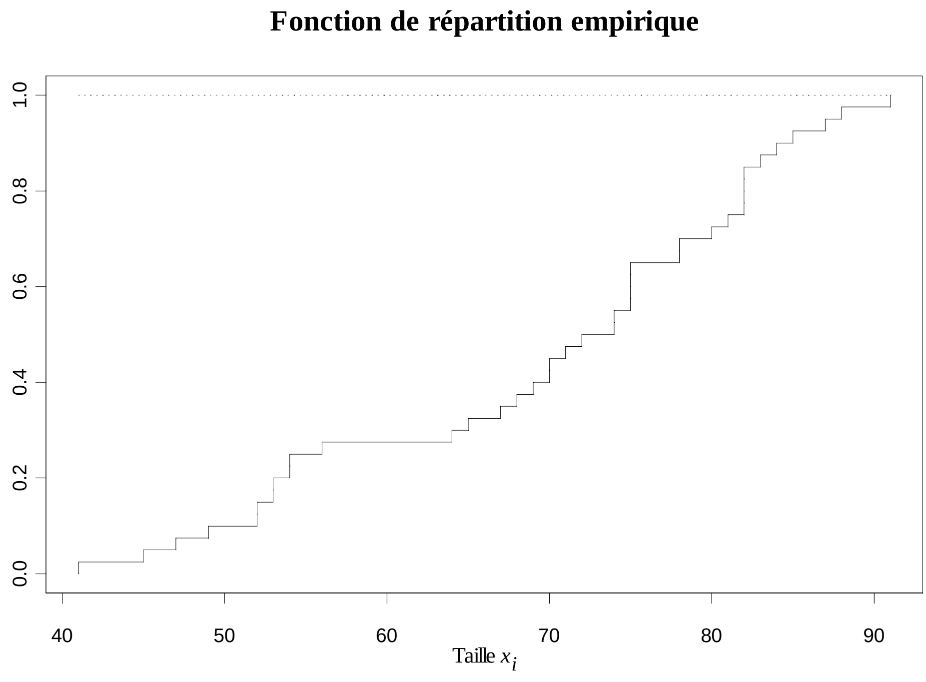
Taille des gousses

Classes	Fréquence	% cumulé
45	2	5,0%
50	2	10,0%
55	6	25,0%
60	1	27,5%
65	2	32,5%
70	5	45,0%
75	8	65,0%
80	3	72,5%
85	8	92,5%
90	2	97,5%
95	1	100%

Nombre de graines

Classes	Fréquence	% cumulé
3	9	22,5%
6	14	57,5%
9	16	97,5%
12	1	100%

❺



EXERCICE n° 3

Le système est symétrique en *x* et *y* : si (*x*,*y*) est solution alors (*y*,*x*) est solution.

On pose $P = xy$ et $S = x + y$.

On est ramené au système :

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 208 \\ P = 96 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} S = 20 \\ P = 96 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} S = -20 \\ P = 96 \end{cases}.$$

On doit donc résoudre deux équations du second degré :

$$X^2 - 20X + 96 = 0 \text{ et } X^2 + 20X + 96 = 0.$$

La première admet comme racines 8 et 12, la seconde -8 et -12.

Le système a donc comme ensemble de solutions :

$$\{(8,12);(12,8);(-8,-12);(-12,-8)\}.$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ La dérivée de τ est $\tau'(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$. La fonction τ est donc décroissante de -1 à $+\infty$. La dérivée de ϕ est $\phi'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et la fonction ϕ est croissante de -1 à 0.

❷ La fonction ϕ étant croissante, on a $I_{k+1} \subset I_k$ et comme τ est décroissante, $J_{k+1} \subset J_k$.

❸ La résolution de l'inéquation $x^2 + 2kx + 1 > 0$, montre que le domaine de définition de f_k est $I_k \cup J_k$. On en déduit que le domaine de définition de f est $I_n \cup J_n$

❹ $\underset{x \to +\infty}{Lim}(f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}) = k$ et $\underset{x \to +\infty}{Lim} f(x) = \frac{n(n+1)}{2}$

EXERCICE n° 2

❶ Le domaine de définition de f est l'intervalle $[2, +\infty[$

❷ On trouve $f^2(x) = 2\left((x-1) + |x-3|\right)$ et $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad 2 \le x \le 3 \\ 2\sqrt{x} - 2 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$

❸ Les coulpes d'entiers naturels qui vérifient $y = f(x)$ sont (2,2) et (3,2)

❹ Comme la fonction f est strictement croissante sur $[3,+\infty[$, elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque g^{-1} est dérivable et sa dérivée est égale à : $(g^{-1})' = \frac{1}{f'}$. Le graphe de g^{-1} est le symétrique du graphe de g par rapport à la première bissectrice. On obtient $g^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 2$

PROBLEME

❶ Les tableaux de variation des fonctions $x - \sin x$ et $\sin x - \frac{2x}{\pi}$ permettent de vérifier la première inégalité. Il en est de même pour la deuxième.

❷ Le domaine de définition de g est l'ensemble des nombres réels non entiers. La dérivée de g est $g'(x) = 2(1 + \frac{1}{\sin^2 \pi x})$. La fonction g est strictement monotone sur chaque intervalle de la forme $]n, n+1[$. Il existe donc une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur chacun de ces intervalles.

Soit $\beta_n = \alpha_n - n$, on a : $g(\beta_{n+1}) = -2(n+1) < g(\beta_n)$ et comme g est strictement croissante, $\beta_{n+1} < \beta_n$. On vérifie aisément que $0 < \beta_n < \frac{1}{2}$. La suite (β_n) est décroissante minorée, donc elle converge vers une limite l.

Supposons que la limite l. On a $g(n + \beta_n) \geq 2(n+1) + 2\beta_n - \frac{1}{2\beta_n}$ et cette dernière expression est négative (car $g(\alpha_n) < 0$). On en déduit une impossibilité par passage à la limite, donc $l = 0$.

❸ La dérivée de f est égale à $f'(x) = \frac{\pi \sin x}{4} g(x)$. Si n est pair, la fonction f est décroissante sur $[n, \alpha_n]$ et croissante sur $[\alpha_n, n+1]$. Pour n impair, la variation est en sens contraire.

En étudiant les variations de la fonction $\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{2}x$, on vérifie l'inégalité proposée.

Le graphe de la fonction f est compris entre les droites $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$v_n = \int_{n+1/4}^{n+1/2} h(x)\,dx = \frac{\pi}{4}\int_{n+1/4}^{n+1/2}(2x+1)\sin\pi x\,dx - \frac{1}{2}\int_{n+1/4}^{n+1/2}\cos\pi x\;dx$$

On calcule alors chacune des deux intégrales précédentes

La première se calcule par intégration par parties et on obtient : $\frac{1}{4}(2n+\frac{3}{2})(-1)^n\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

La deuxième se calcule de la même façon pour obtenir : $\frac{(-1)^n}{2\pi}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

On obtient alors le résultat demandé.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

Exercice 1

Notons x y et z les trois chiffres qui composent un nombre entier < 10^p

Ce nombre s'écrit $N = 10^2x + 10y+z < 10^p$ et x, y et z vérifient x+y+z=3. Pour que cette dernière égalité soit vérifiée, il faut que $x \leq 3$, $y \leq 3$ et $z \leq 3$. Discutons suivant la valeur de p l'ensemble des solutions S des entiers N.

a) si p=0, $10^p=1$ et il n'existe d'entier inférieur à 1 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3, donc $S_0=\varnothing$.

b) Si p=1, 3=003 est le seul entier inférieur à 10 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3 :

$S_1=\{3\}$.

c) Si p=2, pour que N<100, il faut que x=0 et donc y+z=3. D'où

$S_2=\{30,21,12,03\}$.

d) Enfin si $p\geq 2$, x, y et z vérifient :

$100x+10y+z<10^p$ et x+y+z=3.

En faisant varier x, puis y puis z de 0 à 3, on trouve :

$S_p=\{310, 300, 120, 111, 102, 30, 21, 12, 3\}$.

Exercice 2

Le nombre N de nombres de 4 chiffres distincts qu'on peut former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 est égal au nombre d'arrangements de 4 chiffres pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} : il y a 6 façons de choisir le premier. Une fois celui-ci choisi, il y a 5 façons de choisir le second, etc. Donc $N = 6x5x4x3 = A_6^4 = 6! / (6-4)!=360$

Pour calculer leur somme S, notons x, y, z, t les quatre chiffres pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} formant le nombre, x désignant le millier, y la centaine, z la dizaine et t l'unité. On peut donc écrire :

$$m = 1000x+100y+10z+t$$

Donc leur somme s'écrit :

$$S = \sum 1000x+100y+10z+t$$

Dans cette sommation, chaque chiffre x, y, z et t varient de 1 à 6 et il faut compter le nombre de fois où chaque chiffre figure dans les nombres en question. Or pour x donné (par exemple 6 pour fixer les idées), il y a $A_5^3 = 5! / (5-3)!=60$ façon d'arranger les trois chiffres y, z et t pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5}. On peut donc écrire S sous la forme :

$$S = 60(1000 \sum_1^6 x + 100 \sum_1^6 y +10 \sum_1^6 z + \sum_1^6 t)$$

$$= 60(1000+100+10+1)(1+2+3+4+5+6)$$

$$= 60*1111*21=1\ 399\ 860$$

La décomposition de S en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$S =60 \text{ x } 21 \text{ x } 1111 = 5 \text{ x } 2^2 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 7 \text{ x } 11 \text{ x } 101 = 5 \text{ x } 7 \text{ x } 11 \text{ x } 101 \text{ x } 2^2 \text{ x } 3^2$$

PROBLEME

1)

1.1) On a :

$$z\,\overline{z'} = (x + iy)(x' - iy') = xx' + yy' + i(x'y - xy')$$

$$\overline{z}\,z' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$$

et on vérifie que $z\,\overline{z'} + \overline{z}\,z' = 2(xx' + yy')$ et $z\,\overline{z'} - \overline{z}\,z' = 2\,i(x'y - xy')$. D'où les résultats.

1.2) De même, comme $\alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z = 2(ax + by)$ on a :

$$M(x,y) \in D \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z + 2c = 0.$$

1.3) $M(x,y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$

qui est l'équation du cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon $a^2 + b^2 - c$ (qui est > 0 par hypothèse). Donc :

$$M(z) \in C \Leftrightarrow |z-\alpha|^2 = |\alpha|^2 - c \Leftrightarrow |z|^2 - (\alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z) + c = 0 \text{ (en développant } |z-\alpha|^2\text{)}.$$

2)

2.1) $M(z)$ est invariant par $f \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow 1/\overline{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = 1$ et d'après 1.3) on reconnaît le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Comme $f(z') = f(1/\overline{z}) = z$, l'image de $M'(z')$ est $M(z)$, c'est à dire $f \circ f$ est la fonction identité.

2.2) D'après 1.1),

$$\text{dét}(OM, OM') = (z\,\overline{z'} - \overline{z}\,z')/2i = z / z - \overline{z} / \overline{z} = 0,$$

donc OM et OM' sont colinéaires et comme leur produit scalaire est égal à

$$z\,\overline{z'} + \overline{z}\,z' = z / z + \overline{z} / \overline{z} = 2 > 0,$$

ils sont de même sens. De plus,

$$OM.OM' = |z|/|\overline{z}| = 1 \text{ car } |z| = |\overline{z}|.$$

2.3.a) Γ étant le cercle de centre A(-1), d'après 1.3) :

$$M(z) \in \Gamma^* \Leftrightarrow |z+1|^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} = 0.$$

D'après 2.2) :

$$OM' = 1/OM = 1/|\bar{z}| \text{ et } AM'^2 = |1+1/\bar{z}|^2 = |1+\bar{z}|^2/|z|^2 \text{ car } |z| = |\bar{z}|.$$

On en déduit que :

$$AM'^2 - OM'^2 = (|1+\bar{z}|^2 - 1) /|z|^2 = (1+z+\bar{z}+|z|^2 - 1)/ |z|^2 = (z+\bar{z}+|z|^2)/ |z|^2 = 0$$

car $M(z) \in \Gamma^*$ donc $|z|^2 + z + \bar{z} = 0$.

2.3.b) D'après la question précédente, l'image M' est par f est le point d'intersection du segment OM et de la médiatrice du segment OA.

2.3.c) Comme f o f = Id, f est bijective. D'après 2.3.b) l'image du cercle Γ^* est la médiatrice du segment [OA]. Donc si $M \in [I\,J]$, $\exists\, M' \in \Gamma^*$ tel que f(M') = M et donc f(M) = f o f(M')=M'. Donc l'image du segment [I J] par f est le grand arc IJ du cercle Γ^*. L'image par f du petit arc IJ est donc le complémentaire du segment [I J].

2.4) Soit Δ une droite passant par O et $M \in \Delta^* = \Delta - \{O\}$ et M' son image par f. D 'après la question 2.2), les vecteurs OM et OM' sont colinéaires et de même sens, donc $M' \in \Delta^*$ et Δ^* est invariant par f, c'est à dire $f(\Delta^*) = \Delta^*$.

2.5) On vérifie par un calcul fastidieux que le point M'image de M par f appartient au cercle qui passe par les points A, B et N. L'origine de ce cercle est sur Oy.

Pour construire l'image M' de M par f, on construit le point N symétrique de M(z) par rapport à Ox qui a pour affixe $\bar{z}$, puis on trace le cercle passant par A(-1) B(1) et N($\bar{z}$), l'image M' de M est le point d'intersection de ce cercle avec le segment OM.

2.6) Par construction, les points O, M et M’ sont sur une même droite. Pour montrer que $M'=f(M)$, il suffit de montrer que $OM.OM'= 1$.

- Comme H est le point de tangence au cercle C à partir de M, le triangle OHM est rectangle en H, et d’après Pythagore :

  $OM^2 = OH^2+HM^2$, soit $|z|^2 = 1+ HM^2$, car OH est rayon du cercle C donc $OH=1$

- Comme M’ est la projection de H sur OM, les triangles OM’H et HM’M sont rectangles en M’, et ’après Pythagore :

  $OH^2=OM'^2+HM'^2$, soit $1= OM'^2+HM'^2$ et

  $HM^2=MM'^2+HM'^2$

En utilisant ces 3 relations, on calcule OM'^2 :

$$\begin{aligned} OM'^2 &= 1- HM'^2 = 1- (HM^2-MM'^2) \\ &= 1 - (|z|^2 - 1-MM'^2) = 2- |z|^2 - (OM-OM')^2 \\ &= 2- |z|^2 - OM^2- OM'^2+ 2OM.OM' \end{aligned}$$

et comme $OM^2 =|z|^2$, on en déduit :

$$2- 2OM.OM' = 0 \text{ soit } OM.OM' = 1$$

donc $f(M)=M'$.

Pour construire $M' = f(M)$ lorsque M est hors de (C), on trace la tangente à (C) passant par M : l’image de M est la projection orthogonale sur OM du point de tangence H au cercle. M’ est alors à l’intérieur de (C).

Comme f o f = Id, f est bijective : si M est à l’intérieur de (C), M est l’image d’un point M’ à l’extérieur de C, donc on peut construire M par une démarche inverse : on construit la droite passant par M et orthogonal à OM . Si H est le point d’intersection de cette droite et du cercle C, on trace la tangente à C en H et le point M’ image de M est l’intersection de cette tangente et de la droite OM.

2.7.a) Le vecteur orthogonal à la droite (D) a pour composante (a, b). C'est aussi le vecteur directeur de la droite orthogonal à (D) et passant par O qui a pour équation : bx –ay=0. Le point d'intersection H(m,n) de ces 2 droites vérifie donc :

$am+bn+c=0$ et $bm-an=0$,

d'où :

$$m=-ac/(a^2+b^2) \text{ et } n=-bc/(a^2+b^2).$$

On en déduit

$$OH^2 = [a^2c^2+b^2c^2]/((a^2+b^2)^2, \text{ soit } OH=[c^2/(a^2+b^2)]^{1/2}.$$

D'après 2.2), si $H'=f(H)$ alors $OH.OH'=1$, d'où $OH'=1/OH=[(a^2+b^2)/c^2]^{1/2}$.

2.7.b) Soit $M\in D$ et $M'=f(M)$. Comme C' est de diamètre OH', on a :

$$M' \in C' \Leftrightarrow \text{les vecteurs } OM' \text{ et } M'H' \text{ sont orthogonaux.}$$

Or $H'=f(H)$ a pour affixe $1/(m-in) = (a^2+b^2)(m+in)/c^2 = (-a-ib)/c$ (en remplaçant m et n par leurs valeurs ci-dessus).

Posons $\alpha = a+ib$. H' a pour affixe $-\alpha/c$ et donc le vecteur M'H' a pour affixe $1/\bar{z} + \alpha/c$. Donc le produit scalaire des vecteurs OM' et M'H' est, d'après 1.1), égal à :

$$p = (1/\bar{z} + \alpha/c)/(1/z) + (1/z + \bar{\alpha}/c)(1/\bar{z})$$

$$= 2/|z|^2 + (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z)/(c|z|^2)$$

Or M et M' appartiennent à D donc $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + 2c = 0$. D'où

$$p = 2/|z|^2-2/|z|^2 = 0$$

et donc OM' et M'H' sont orthogonaux, c'est à dire $M'\in C'$.

On en déduit que l'image par f d'un cercle passant par O est la droite D orthogonale au diamètre OH' du cercle et qui passe par le point H tel que $OH.OH' = 1$.

2.8) C est un cercle qui ne passe pas par O $\Leftrightarrow$ C a pour équation $|z|^2 - (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z) + c = 0$ avec $c\neq 0$. Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)\in C$, on a $z' = 1/\bar{z}$ donc $z = 1/\bar{z'}$. En remplaçant z par $1/\bar{z'}$ dans l'équation du cercle, on obtient :

$$1/|z'|^2 - (\alpha/z + \bar{\alpha}/\bar{z}) + c = 0 \Leftrightarrow |z'|^2 - (\alpha\bar{z'} + \bar{\alpha}z') + 1/c = 0$$

qui est l'équation d'un cercle qui ne passe pas par O car $1/c \neq 0$