ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

❶ Soit $y = x^3 - 3x - 1$, la dérivée est égale à $3x^2 - 3$ et elle est nulle pour $x = \pm 1$. Le tableau de variation montre que y est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $]-1, 1]$ et de nouveau strictement croissante sur $[1, +\infty[$. D'autre part dans chacun de ces intervalles y prend des valeurs négatives et positives. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation admet 3 solutions.

❷ On a :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3.$$

Puis par identification des polynômes, on obtient :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \text{ et } x_1x_2x_3 = 1.$$

Les relations demandées s'en déduisent.

❸ Soit $x = 2\cos\alpha$. Sachant que $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$, l'équation devient : $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, d'où les valeurs des 3 racines, à savoir $2\cos(\frac{\pi}{9})$, $2\cos(\frac{7\pi}{9})$ et $2\cos(\frac{13\pi}{9})$

EXERCICE n° 2

❶ Dans l'expression de I_{n+1}, on effectue un changement de variable, à savoir $x = t + \pi$, et on obtient $I_{n+1} = -e^{-\pi} I_n$. On a donc une suite géométrique de raison $q = -e^{-\pi}$

❷ et ❸ Avec une double intégration par parties, on obtient : $I_0 = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$ et alors $I_n = (q)^n I_0$. Comme la raison est, en module, strictement comprise entre 0 et 1, la suite est convergente vers 0.

❹ On a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k = I_0(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})$. On obtient : $S_n = \frac{1+(-1)^{n+2} e^{-(n+1)\pi}}{2}$ et la suite S_n est convergente vers $\frac{1}{2}$.

❺ $R_n = \prod_{k=0}^{n} I_k = \left(\frac{1+e^{-\pi}}{2}\right)^{n+1} \left(-e^{-\pi}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

PROBLEME

1. La dérivée de y est égale à $\cos x - \sin x$.
Tableau de variation :

x	$-3\pi/4$		$-\pi/4$		$\pi/4$
y'	0	+		+	0
y	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$

D'où $J = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

2. f^{-1} est continue et dérivable comme fonction réciproque d'une fonction continue et dérivable.

3. On obtient $f^{-1}(-\sqrt{2}) = -\dfrac{3\pi}{4}$, $f^{-1}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$, $f^{-1}(1) = 0$ et $(f^{-1}(1))' = 1$

4. f^{-1} n'est pas dérivable aux valeurs $\pm\sqrt{2}$.
On trouve : $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\cos f^{-1}(x) - \sin f^{-1}(x)}$

Par ailleurs $f(f^{-1}(x)) = \cos f^{-1}(x) + \sin f^{-1}(x) = x$ et en élevant au carré, on obtient : $\cos f^{-1}(x) \sin f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}$. Les deux expressions $\cos f^{-1}(x)$ et $\sin f^{-1}(x)$ sont donc solutions de l'équation $t^2 - xt + \dfrac{x^2-1}{2} = 0$' d'où $\cos f^{-1}(x) - \sin f^{-1}(x) = \sqrt{2 - x^2}$.
En conclusion :

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$$

5.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} dx = f^{-1}(\sqrt{2}) - f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} dx = f^{-1}(1) - f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$$

6. Soit $y = \cos x + \sin x$ et en élevant au carré, on obtient : $y^2 = 1 + 2\cos x \sin x$. La résolution de ces deux équations (second degré en $\sin x$ et en $\cos x$) donne le résultats demandés (cf. question 4), à savoir : $\sin f^{-1}(x) = \dfrac{x - \sqrt{2 - x^2}}{2}$ et $\cos f^{-1}(x) = \dfrac{x + \sqrt{2 - x^2}}{2}$

7. Comme les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, s'il y a une solution à l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$, on a aussi $f(x) = x$. En étudiant la fonction $f(x) - x$, on vérifie que $f(x) > x$ sur tout l'intervalle considéré, donc l'équation n'a pas de solution.

8. Soit la fonction $g(x) = \sin x + \cos x - 2x$, elle admet comme dérivée la fonction $\cos x - \sin x - 2$ qui est toujours négative. La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle considéré de 1 à $\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{2}$ et cette dernière valeur est négative. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule solution à l'équation.
On vérifie que $g(0.7) > 0$ et que $g(0.8) < 0$.

On a : $h(x) = \dfrac{g(x)}{3}$, donc $h(\alpha) = 0$. On vérifie que $\left|h'(x)\right| \leq 0.69$, par conséquent :
D'après le théorème des accroissements finis sur $]0.7, 0.8[$, on a :
$h(x) - h(\alpha) = (x - \alpha)h'(c)$, où $c \in]0.7, 0.8[$. Donc $f(x) = 3h(x) + 2x = 3(x - \alpha)h'(c) + 2x$
ou encore $\left|f(x)\right| \leq 3x(0.69) + 2x + 3\alpha(0.69) = 4.07x + 2.07\alpha$

On a $h(\alpha) = 0$, donc $\sin\alpha + \cos\alpha = 2\alpha$. En élevant au carré, on obtient :
$\cos\alpha \sin\alpha = \dfrac{4\alpha^2 - 1}{2}$, puis $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 4\alpha^2 - 1$ et $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{4\alpha}{4\alpha^2 - 1}$.

D'autre part, $(\cos\alpha + \sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + \sin^3\alpha + 3(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha \sin\alpha)$, d'où
$\cos^3\alpha + \sin^3\alpha = 8\alpha^3 - 3\alpha(4\alpha^2 - 1)$;
$\cos\alpha = \alpha + \sqrt{\dfrac{1 - 2\alpha^2}{2}}$ et $\sin\alpha = \alpha - \sqrt{\dfrac{1 - 2\alpha^2}{2}}$.

9. La fonction F est continue d'après la question 5 et $F'(x) = (f^{-1}(x))'$, donc les deux fonctions sont égales à une constante additive près, mais les valeurs aux bornes sont les mêmes, les deux fonction F et f^{-1} sont donc égales.

10. La courbe représentative de la fonction f est en dessous de la tangente sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et au dessus de la tangente sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$. Il suffit de regarder la convexité de la courbe.

$$\int_0^{\pi/4} f(x)dx = \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/4} = 1 \times 4cm^2 = 4cm^2$$

11. $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n I_0 \to 0$

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

1) Comme $\Omega = A \cup \overline{A}$, on a :

$$P(B) = P[(A \cup \overline{A}) \cap B]$$
$$= P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B]$$
$$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) - P(A \cap \overline{A} \cap B) .$$

Le dernier terme est nul car $A \cap \overline{A} \cap B = \varnothing$. Par hypothèse $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, donc

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B)[1 - P(A)] = P(B)\,P(\overline{A}) \text{ car } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

D'où $\overline{A}$ et B sont indépendants. Même démonstration pour A et $\overline{B}$, puis pour $\overline{A}$ et B.

2) Si A, B, C et D sont indépendants entre eux, d'après 1) $\overline{A}$, B, C et D sont indépendants 2 à 2 et on a comme ci-dessus :

$$P(B\cap C)=P[(A\cup \overline{A})\cap B\cap C]$$
$$= P[(A\cap B\cap C) \cup (\overline{A} \cap B\cap C]$$
$$= P(A\cap B\cap C) + P(\overline{A} \cap B\cap C)- P(A\cap \overline{A}\cap B\cap C)$$

et le dernier terme est nul car $A\cap \overline{A}\cap B\cap C =\varnothing$. Comme A, B, C et D sont indépendants entre eux, on a :

$$P(B\cap C)= P(B)\, P(C) \text{ et}$$
$$P(A\cap B\cap C)= P(A)\, P(B)\, P(C),$$

d'où

$$P(\overline{A} \cap B\cap C)= P(B\cap C)[1- P(A)]$$

3) Prenons $\Omega=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$, $C=\{b,d\}$ avec

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) =P(\{c\}) = P(\{d\})=1/4$$

On a :

$P(A\cap B)= P(\{b\}) =1/4 = P(A)\, P(B)$;

$P(B\cap C)= P(\{b\})=1/4 = P(B)P(C)$ et

$P(A\cap C)= P(\{b\})=1/4=P(A)P(C)$.

Mais $P(A\cap B\cap C)= P(\{b\})=1/4$ est différente de $P(A)\, P(B)\, P(C)=1/8$.

4.1) D'après 2), $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ sont indépendants entre eux donc

$b = P(\overline{A} \cap \overline{B}\cap \overline{C}) = P(\overline{A})\, P(\overline{B})\, P(\overline{C}) =(1-a)(1-x)(1-y)$

De même $\overline{A}$, $\overline{B}$, C sont indépendants entre eux donc

$p = P(\overline{A} \cap \overline{B}\cap C) = P(\overline{A})\, P(\overline{B})\, P(C) =(1-a)(1-x)y$

Par ailleurs, $\overline{A} \cup \overline{B}\cup \overline{C}$ est le complémentaire de $A\cap B\cap C$ donc

$c = P(\overline{A} \cup \overline{B}\cup \overline{C}) =1- P(A\cap B\cap C)= 1-P(A)\, P(B)\, P(C)=1-axy$

4.2) et 4.3) Pour trouver une relation entre a, b, c et p indépendante de x et y. on calcule d'abord x et y en fonction de a, b, c et p (question suivante 4.3). On a :

$$b/p = (1-y)/y$$

et on en déduit $y = p/(b+p)$. Par ailleurs,

$$x = (1-c)/ay$$

soit, en remplaçant y par $p/(b+p)$:

$$x=(1-c)(b+p)/ap.$$

On obtient ensuite la relation entre a, b, c et p indépendante de x et y en remplaçant x et y ci-dessus dans l'expression de $p = (1- a)(1-x)y = (1-a)(ap-b-p+cb+cp)p/[ap(b+p)]$.

EXERCICE N° 2

1) On développe $(a+b+c)^n$ à l'aide de la formule du binôme

$(a+b+c)^n = \sum C_n^k (a+b)^k c^{n-k}$ la sommation portant sur k variant de 0 à n.

Puis on développe $(a+b)^k$ dans cette somme, ce qui donne :

$(a+b+c)^n = \sum C_n^k c^{n-k} \sum C_k^p a^p b^{k-p}$, la deuxième sommation portant sur p variant de 0 à k.

Comme il s'agit de sommes avec un nombre fini de termes on peut écrire :

$$(a+b+c)^n = \sum \sum C_n^k C_k^p c^{n-k} a^p b^{k-p} = \sum C_n^k C_k^p a^p b^{k-p} c^{n-k},$$

Le coefficient du terme $a^p b^{k-p} c^{n-k}$ est $C_n^k C_k^p = [n! / k!(n-k)!] [k! /p!(k-p)!] = n!/(n-k)! (k-p)! p!$

On en déduit que le coefficient de $x^6y^5z^4$ dans le développement de $(2x-5y+z)^{15}$ est égal à

$$(2^6 \text{ x } (-5)^5 \text{ x } 15!) / (6!\ 5!\ 4!) = -(2^6 \text{ x } 5^5 \text{ x } 15!) / (6!\ 5!\ 4!)$$

2) Le nombre de permutations differentiables de n lettres avec α lettres a, β lettres b et γ lettres c est égal au nombre de combinaisons de ces trois lettres pour former un mot de n lettres avec α lettres a, β lettres b et γ lettres c, qui n'est autre que le coefficient de $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ dans le développement de $(a+b+c)^n$ qui n'est autre que $n!/ \alpha!\ \beta!\ \gamma!$.

PROBLEME

1.1) Le discriminant associé à l'équation du 2nd degré est $\Delta=\cos^2\alpha-1 = -\sin^2\alpha$. Les racines sont donc :

$$z = \cos\alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i\alpha}.$$

1.2) On pose $Z = z^n$ et on se ramène à la résolution de l'équation du 2ème degré de la question précédente. Les solutions de (E_n) sont donc

$$z^n = e^{\pm i\alpha}, \text{ soit } z_k = e^{\pm i(\alpha+2k\pi)/n}, k=0,\dots,n-1.$$

2.1) Connaissant les racines de $P_\alpha(z)$ données en 1.2) on peut le mettre en produits de facteurs :

$$P_\alpha(z) = \Pi_0^{n-1}(z- z_k)(z- \overline{z_k})$$
$$= \Pi_0^{n-1}[z^2-2z\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)+1]$$

2.2) On a :

$$P_\alpha(1) = 2(1-\cos\alpha) \text{ et d'après 1.2) :}$$
$$= \Pi_0^{n-1}[1-2\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)+1]$$
$$= 2^n\Pi_0^{n-1}[1-\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)]$$

et comme $1-\cos x = 2 \sin^2(x/2)$, on a :

$$P_\alpha(1) = 4 \sin^2(\alpha/2) = 4^n\Pi_0^{n-1}[\sin^2(\alpha/2n + k\pi/n)]$$

d'où le résultat.

2.3) On a :

$$H_n(\alpha) = \Pi_1^{n-1}[\sin(\alpha/2n + k\pi/n)]$$

Et comme le produit $H_n(\alpha)$ ci-dessus commence avec k=1, on peut écrire

$$H_n(\alpha) = \Pi_0^{n-1}[\sin(\alpha/2n + k\pi/n)] / \sin(\alpha/2n)$$
$$= \{\Pi_1^{n-1}[\sin^2(\alpha/2n + k\pi/n)] / \sin^2(\alpha/2n) \}^{1/2}$$
$$= \sin(\alpha/2)/[2^{n-1} \sin(\alpha/2n)]$$

en utilisant l'égalité dans 2.2). D'où le résultat.

2.4) Lorsque α tend vers 0, $\sin(\alpha/2)/\sin(\alpha/2n) \approx (\alpha/2)/(\alpha/2n) = n$, donc

$$\lim H_n(\alpha) = n / 2^{n-1}$$

2.5) d'après 2.3) on a par continuité de la fonction en $\alpha=0$:

$$H_n(0) = \Pi_1^{n-1}\sin(k\pi/n)$$

$$= \lim \sin(\alpha/2)/[2^{n-1}\sin(\alpha/2n)]$$

$$= n / 2^{n-1} .$$

3)

3.1) En développant le produit $(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})$ dans l'expression de $P(z)$, on voit que le coefficient de z^n est nul, donc le degré du polynôme $P(z)$ est au plus égal à $n-2$.

3.2) On peut écrire :

$$P(z) = (z^n-1) / (z-1) - (z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})$$

Et donc pour $k=1,\ldots,n-1$:

$$P(\omega^k) = [(\omega^k)^n-1] / (\omega^k -1)$$

Or $(\omega^k)^n = (e^{i2k\pi)/n})^n = e^{i2k\pi} = 1$ et donc

$P(\omega^k) = 0$ pour $k=1,\ldots,n-1$ et $\omega, \omega^2,.., \omega^{n-1}$

sont n-1 racines distinctes de $P(z)$. D'après 3.1), $P(z)$, polynôme de degré $\leq n-2$, a n-1 racines distinctes C'est donc le polynôme nul, i.e. $P(z)=0 \ \forall z\in C$.

En particulier pour $z=1$ on a :

$$0 = P(1) = 1+1+\ldots+1- (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1}) = 0.$$

D'où $n = (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})$.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE

❶ $N = \sum_{i=1}^{i=10} n_i = 1000.$

❷ La moyenne empirique vaut : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} n_i . x_i = 4540$ F.

❸ La variance vaut : $\mathrm{V}x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} n_i . (x_i - \overline{x})^2 = 2022400.$

❹ Coordonnées des points :

i	N'_i	Y'_i
1	0.01	0.0011
2	0.035	0.0093
3	0.141	0.0677
4	0.296	0.1872
5	0.659	0.5470
6	0.883	0.8184
7	0.958	0.9258
8	0.98	0.9621
9	0.998	0.9958
10	1	1

❺ Figure.

❻ Pour tout j on a : $0 \leq N'_j \leq 1$, $0 \leq Y'_j \leq 1$ donc la ligne de concentration est au dessus du segment OA et à gauche du segment AB. Pour montrer que la ligne est convexe, on compare la pente p_j du segment $C_{j-1}C_j$ et celle de C_jC_{j+1} notée p_{j+1}. On a :

$$p_j = \frac{Y'_j - Y'_{j-1}}{N'_j - N'_{j-1}} = \frac{\dfrac{n_j x_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}}.$$

Or $x_j < x_{j+1}$ donc $\dfrac{n_j x_j}{n_j} < \dfrac{n_{j+1} x_{j+1}}{n_{j+1}}$ d'où $\dfrac{\dfrac{n_j x_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_j}} < \dfrac{\dfrac{n_{j+1} x_{j+1}}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_{j+1}}{\sum_{i=1}^{10} n_j}}$ c'est à dire $p_j < p_{j+1}$ donc la ligne est convexe. On en déduit qu'elle se trouve sous le segment OB. La ligne de concentration est donc à l'intérieur du triangle OAB.

❼ L'aire de OAB vaut 0,5.

❽ Figure.

❾ Le quadrilatère est un trapèze car $C_{j-1}D_{j-1}$ et C_jD_j sont parallèles, leurs points ayant les mêmes abscisses deux à deux. L'aire a_j vaut donc :

$$a_j = \frac{N'_{j-1}+N'_j-Y'_{j-1}-Y'_j}{2}(N'_j-N'_{j-1}).$$

❿ L'aire demandée est la somme des aires a_j calculées précédemment, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
aire &= \sum_{j=1}^{10} a_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(N'_{j-1}+N'_j)(N'_j-N'_{j-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)(N'_j-N'_{j-1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(N'^2_j-N'^2_{j-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)\frac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i} \\
&= \frac{1}{2}(N'^2_{10}-N'^2_0) - \frac{1}{2\sum_{i=1}^{10} n_i}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)n_j \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)\frac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}\right).
\end{aligned}$$

❶❶ Donc $I = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}$. Application numérique :I = 0,168.

❶❷ Si tous les salaires étaient égaux, alors ils seraient tous dans une classe j fixée. On aurait alors C_0 = ... = C_{j-1} = O et C_j = ...C_{10} = B donc la ligne de concentration serait la droite OB et l'indice serait nul I = 0.

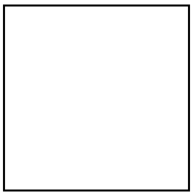
❶❸ On aurait alors C_0 = O C_1 = ... = C_9 de coordonnées $(\frac{N-1}{N},0)$ et C_{10}=B. On a alors $I = 1 - \frac{1}{N}$.

❶❹ Figure

❶❺ $I_\alpha = 1 - 2\int_0^1 f_\alpha(x)dx = 1 - 2.[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$.

❶❻ On a $I_\alpha = 0{,}168$ si $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 0{,}168$ c'est à dire α = 1,404.

Figure :



EXERCICE

❶ Les différentes racines n'ont de sens que si : $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ 0 < x \leq a^2 \end{cases}$ ou si a = 0 et x = 0.

Dans ces conditions, on a l'équation équivalente en élevant tout au carré : $2a + 2\sqrt{a^2 - x} = \sqrt{bx}$.

En relevant au carré on a encore l'équation équivalente : $4a^2 + 8a\sqrt{a^2 - x} + 4(a^2 - x) = bx$ soit encore : $8a\sqrt{a^2 - x} = (b+4)x - 8a^2$. Cette équation équivaut à :

$$\begin{cases} 64a^2(a^2 - x) = ((b+4)x - 8a^2)^2 \\ (b+4)x - 8a^2 \geq 0 \end{cases} \text{ soit,}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{16a^2b}{(b+4)^2} \\ x \geq \dfrac{8a^2}{b+4} \end{cases}$$

Les conditions deviennent alors :

$$\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ \dfrac{8a^2}{b+4} \leq \dfrac{16a^2b}{(b+4)^2} \leq a^2 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $a > 0$ et $b \geq 4$., auquel cas la solution est $x = \dfrac{16a^2b}{(b+4)^2}$.

❷ Application : $x = 2{,}277$.