AVRIL 2011
CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

1. On a

$$D_n = \begin{vmatrix} u+v & uv & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & u+v & uv & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & uv & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & u+v & uv \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & u+v \end{vmatrix}.$$

   On développe par rapport à la première colonne, pour obtenir

$$D_n = (u+v)D_{n-1} - uvD_{n-2}.$$

2. On vérifie que $D_n = \sum_{k=0}^{n} u^k v^{n-k}$.

Problème

Partie 0

1. Le logarithme népérien est deux fois dérivable, de dérivée seconde négative ($x \mapsto -1/x^2$), donc il est concave.

2. On en déduit que

$$\log(m_g) = \frac{1}{n}(\log x_1 + \ldots + \log x_n) \leq \log\left(\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)\right) = \log(m_a),$$

   d'où le résultat par croissance de la fonction exponentielle.

3. Pour tout $x > -1$, $\log(1+x) \leq x$. Donc pour tout entier naturel n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \leq \exp(n/n) = e,$$

toujours par croissance de la fonction exponentielle.

Partie I

1. Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique de la question 0.2. appliquée à
$$x_k = \alpha_k \beta_k.$$

2. On intervertit l'ordre de sommation
$$\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{k} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \leq \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \alpha_j \beta_j.$$

3. Avec ce choix particulier de β_n on a

   (a) $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$. Donc la série de terme général γ_n/n, $n \in \mathbb{N}^*$, est bien convergente.

   (b) Son reste vaut $\Gamma_k = \frac{1}{k}$, où on a utilisé le fait que $\frac{\gamma_n}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et un résultat de sommes téléscopiques.

4. On a donc

   (a) $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \alpha_j \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\beta_j}{j} = \sum_{j=1}^{n} (1+1/j)^j \alpha_j \leq e \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$. Puisque la série $\sum \alpha_j$ est convergente, il en est de même de la série $\sum U_k$.

   (b) On déduit directement une majoration de sa somme par
$$e \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j.$$

Partie II

Propriété

$$L_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ L_n \geq 1, \ L_n^2 \leq L_{n+1} L_{n-1}. \tag{1}$$

1. La propriété (1) s'obtient pour la suite ($L_n = n!$) en partant de l'inégalité triviale $n \leq n+1$.
   La suite identiquement égale à 1 vérifie trivialement la propriété (1).

2. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

   $$\frac{L_{n+1}}{L_n} \geq \frac{L_n}{L_{n-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_1}{L_0} = L_1 \geq 1,$$

   ce qui montre que cette suite est nécessairement croissante.

3. En multipliant les termes de gauche et les termes de droite de la suite d'inégalités suivantes

   $$\frac{L_n}{L_{n-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k}} \geq \ldots \geq \frac{L_k}{L_{k-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_1}{L_0},$$

   on obtient bien

   $$\frac{L_n}{L_{n-k}} \geq L_k.$$

4. Par simplifications successives, on a

   $$v_1 v_2 \ldots v_n = \frac{L_0}{L_1}\frac{L_1}{L_2} \ldots \frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{1}{L_n} = u_n^n.$$

5. On a

   (a) $v_{n+1}/v_n \leq 1$ d'après (1), donc (v_n) est décroissante,

   (b) et

   $$\begin{aligned} u_{n+1}/u_n &= (v_1 v_2 \ldots v_n v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} / (v_1 v_2 \ldots v_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= (v_1 v_2 \ldots v_n)^{\frac{-1}{n(n+1)}} (v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \leq (v_{n+1})^{\frac{-1}{n+1}} (v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = 1, \end{aligned}$$

   par décroissance de (v_n). Donc (u_n) est décroissante.

6. On applique directement la décroissance de (v_n).

7. Immédiat d'après la question 4.

8. L'implication $\Longleftarrow$ se déduit directement de la question précédente.
On démontre la réciproque par application de la Partie I: avec $\alpha_n = v_n$ (qui définit bien une série convergente par hypothèse) la suite $U_n = u_n$ (d'après la question 4 de la partie présente) est bien convergente.

Partie III

1. Pour $n = 0$, on a $c_0 = f(y)$. Ensuite, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'égalité se déduit par n dérivations successives, en remarquant que f est supposée de classe C^∞.

2. Montrons que $R(f)$ est ouvert. Soit $y \in R(f)$: pour tout n, $f^{(n)}(y) = 0$, soit $c_n = 0$. Par définition d'une fonction analytique, il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de y sur lequel f s'écrit

$$\forall x \in \mathcal{V} \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n = 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{V} \subset R(f)$, donc $R(f)$ est ouvert.
Pour montrer que $R(f)$ est fermé, nous allons prouver que son complémentaire est ouvert. Soit $y \in \mathbb{R} \backslash R(f)$. Il existe au moins une dérivée qui ne s'annule pas en y. Soit n_0 le plus petit ordre. Alors il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de y sur lequel f s'écrit

$$\forall x \in \mathcal{V} \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n = f^{(n_0)}(y)(x-y)^{n_0} + o\left((x-y)^{n_0}\right),$$

avec $f^{(n_0)}(y) \neq 0$. Donc il existe un voisinage de y dans $\mathcal{V}$ sur lequel f ne s'annule pas, donc qui est inclus dans $\mathbb{R} \backslash R(f)$. Ce qu'on souhaitait montrer.

3. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et ϕ. Donc $R(f)$ est soit $\mathbb{R}$, soit ϕ. Si $R(f) \neq \phi$, on déduit que $R(f) = \mathbb{R}$, ie la fonction f est identiquement nulle.

Partie IV

1. Cf question 1. Partie I.

2. Soient α et β comme dans la définition de $E(L)$. On utilise la formule de Taylor suivante: pour tout y, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de y tel que pour tout x de $\mathcal{V}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + o(x-y)^n.$$

Si on choisit x dans $\mathcal{V}$ qui vérifie la condition supplémentaire $\rho_x = \beta\,|x-y| < 1$, alors la série dont la somme partielle est la somme ci-dessus est une série convergente car

$$\left|\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k\right| \leq \alpha\beta^k\,|x-y|^k = \alpha\rho_x^k.$$

Sur ce voisinage de y, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k,$$

ce qui achève la preuve que f est analytique.

3. Ce résultat s'obtient par application directe de la Partie III.

4. Les fonctions f et g sont de classe C^∞ dans $E(L)$, donc il existe $\alpha, \beta, \lambda, \mu > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N} : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \alpha\beta^n L_n,\ \left|g^{(n)}(x)\right| \leq \lambda\gamma^n L_n.$$

   (a) Stabilité par addition

$$\left|(f+g)^{(n)}(x)\right| \leq \left|f^{(n)}(x)\right| + \left|g^{(n)}(x)\right| \leq (\alpha\beta^n + \lambda\gamma^n)\, L_n \leq AB^n L_n,$$

   avec $A = \alpha + \lambda$ et $B = \beta + \mu$.

   (b) Stabilité par multiplication

$$\begin{aligned} \left|(fg)^{(n)}(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \alpha\beta^k L_k \lambda\gamma^{n-k} L_{n-k} \leq \alpha\lambda L_n \sum_{k=0}^{n} \beta^k\gamma^{n-k}, \end{aligned}$$

où on a utililisé un résultat de la Partie II. Avec $A = \alpha\lambda$ et $B = \beta + \gamma$, on obtient bien $\left|(fg)^{(n)}(x)\right| \leq AB^n L_n$.

(c) Stabilité par translatation et homothétie

$$\left|h^{(n)}(x)\right| \quad = \sigma^n \quad \left|f^{(n)}(\mu + \sigma x)\right| \leq \alpha(\beta\sigma)^n L_n.$$

5. Si f est à support compact, alors il existe un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f s'annule, donc sur lequel toutes les dérivées de f s'annulent. Donc $R(f) \neq \phi$. Par hypothèse, f est donc identiquement nulle.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Pour tout entier *n* strictement positif, la suite (α_n) est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} - \alpha_n),\ \alpha_1 = 1, \text{ et } \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Exprimer α_n en fonction de *n* et calculer sa limite.

L'équation associée à la relation de récurrence s'écrit :

$2x^2 - x + 1 = 0$ et les solutions sont : $x = -1$ ou $x = 1/2$.

Le terme général de la suite (α_n) est de la forme : $\alpha_n = \lambda(-1)^n + \mu(1/2)^n$ avec $\alpha_1 = 1 = -\lambda + \mu(1/2)$ et $\alpha_2 = -1/2 = \lambda + \mu(1/4)$. La résolution du système donne : $\lambda = -2/3$ et $\mu = (2/3)$. On obtient :

$$\alpha_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

Et la limite de $(-1)^n$ n'existe pas, donc la suite (α_n) n'a pas de limite.

2. Pour tout entier *n*, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

On vérifie aisément que cette suite (x_n) est bien définie, car toujours strictement positive.

On peut calculer quelques premiers termes, par exemple : $x_2 = 2^{-1/2}$ $x_3 = 2^{3/4}$, $x_4 = 2^{-7/8}$.

On montre alors par récurrence que $x_n = 2^{\alpha_n}$ (on peut aussi passer au logarithme en base 2, puisque la suite est strictement positive. En effet : $x_{n+2} = \sqrt{\dfrac{2^{\alpha_n}}{2^{\alpha_{n+1}}}} = (2^{\alpha\alpha_n - \alpha_{(n+1)}})^{1/2}$ et x_{n+2} est de la forme $2^{\alpha_{n+2}}$ si et seulement si on a la relation : $\alpha_{n+2} = \dfrac{1}{2}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ avec $\alpha_1 = 1$, et $\alpha_2 = -\dfrac{1}{2}$. On se trouve dans la situation de la question précédente, donc :

$$x_n = 2^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

3. Déterminer la limite de x_n quand $n \to +\infty$.

Cette limite n'existe pas à cause du terme $(-1)^n$.

Exercice n° 2

1. Montrer l'existence d'une fonction φ définie implicitement par la relation $Arctg\,(x-y)+1 = e^{x+y}$ au voisinage de $(0,0)$.

Soit $f(x,y) = Arctg\,(x-y)+1-e^{x+y}$. On a : $f(0,0)=0$, f est de classe C^2 au voisinage de l'origine et $f_y'(0,0) = -2 \neq 0$. Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont donc vérifiées. Il existe I un voisinage de 0, J un voisinage de 0 et une fonction φ de I dans J telle que :

- φ est da classe C^2 au voisinage de l'origine,
- $\varphi(0) = 0$ et
- $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = y,\ \forall x \in I, \forall y \in J$

De plus $\varphi'(0) = -\dfrac{f_x'(0,0)}{f_y'(0,0)}$

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 pour $y = \phi(x)$ au voisinage de 0.

D'après la formule de Taylor, on a : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \dfrac{x^2}{2}\varphi''(0) + o(x^2)$

On obtient : $f_x' = \dfrac{-1}{1+(x-y)^2} - e^{x+y}$ et $f_x'(0,0) = 0$, donc $\varphi'(0) = 0$.

Dans la relation explicite de $f(x,y)$ en remplace y par $\phi(x)$, puis on calcule la différentielle seconde à l'origine, on obtient : $d^2 f(0,0) = f_{xx}''(0,0) + f_y'(0,0) \times \varphi''(0) = 0$ avec $f_{xx}''(0,0) = -1$ et $f_y'(0,0) = -2$, d'où $\varphi''(0) = -1/2$.

En conclusion :

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exercice n° 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

On décompose la fraction rationnelle : $\frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3/4}{2x-1}$ pour obtenir :

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}Ln|2x-1|\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{8}Ln3$$

2. $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$. On pose $t = e^x$.

$$I_2 = \int_{1}^{e} \frac{t-1}{(t+1)t}dt = \int_{1}^{e} \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right)dt = [2Ln(t+1) - Lnt]_1^e = 2Ln(\frac{e+1}{2}) - 1$$

3. $I_3 = \int_{2}^{3} \frac{2x}{(x^2-1)^2} Ln(x)\,dx$ (on donnera le résultat sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, où p et q sont des nombres rationnels). On effectue une intégration par parties. On pose : $u'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$ et $v(x) = Lnx$, pour obtenir

$$I_3 = \left[-\frac{Lnx}{x^2-1}\right]_2^3 + \int_{2}^{3} \frac{1}{x(x^2-1)} dx = -\frac{1}{8}Ln3 + \frac{1}{3}Ln2 + \int_{2}^{3} \frac{1}{x(x^2-1)} dx.$$

On décompose la fraction rationnelle du deuxième terme :

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

Enfin $I_3 = -\frac{1}{8}Ln3 + \frac{1}{3}Ln2 + \left[-Lnx + \frac{1}{2}Ln(x-1) + \frac{1}{2}Ln(x+1)\right]_2^3 = \frac{17}{6}Ln2 - \frac{13}{8}Ln3$

Exercice n° 4

Une entreprise produit des biens A, B et C. La production de ces biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés pour chaque unité produite sont donnés dans le tableau suivant :

	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Profit
A	1	3	1	2	5
B	6	1	3	3	5
C	3	3	2	4	5

Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de 84, 42, 21 et 42.

Déterminer la quantité de biens à produire pour maximiser le profit.

Notons x le nombre de biens A, y le nombre de biens B et z le nombre de biens C pour obtenir un profit maximal. Le problème de maximisation s'écrit sous la forme :

$$Max\left\{5x+5y+5z\,/\,x+6y+3z\leq 84,\ 3x+y+3z\leq 42,\ x+3y+2z\leq 21,\ 2x+3y+4z\leq 42\right\}.$$

La résolution « classique » de ce problème peut s'avérer un peu longue, mais il est parfois préférable de réfléchir un peu avant de se lancer dans des calculs.

Sachant que le profit est le même pour chaque produit, fabriquons au maximum le produit le plus rapide à obtenir, soit le produit A (7) (contre 13 pour B et 12 pour C), en respectant les contraintes d'utilisation des machines. Le maximum de A est donc x=14 (inéquation 2 saturée). Dans ce cas : y=z=0. Le profit est donc de 70.

Exercice n° 5

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A.

On a : $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$, donc $\lambda=2$ est une valeur propre simple et $\lambda=1$ est une valeur propre double.

Le vecteur $e_1 = (1,0,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Le sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, engendré par $e_2 = (1,1,0)$. Complétons la base par la recherche d'un vecteur e_3 vérifiant $Ae_3 = e_2 + e_3$. On trouve $e_1 = (1,1,1)$.

La matrice A est donc semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta + J$, et comme $J^2 = 0$, on obtient :

$T^n = (\Delta + J)^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}J$.

Puis $A^n = PT^n P^{-1}$, avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En conclusion :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^n + n + 1 & n \\ -n & n+1 & n \\ 2^n - 1 & -2^n + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 6

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$.

Calculer $P(-1)$, $P(1)$ et $P(2)$, puis montrer que $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$ (ensemble des polynômes de la variable X à coefficients entiers).

On vérifie aisément que : $P(-1) = P(1) = P(2) = -1$, donc $P(X)+1$ est divisible par $X+1, X-1, X-2$ et on obtient :
$P(X) = (X+1)(X-1)(X-2)+1$

Supposons que $P(X)$ ne soit pas irréductible dans $Z[X]$, alors $P(X) = A(X)B(X)$, avec $A(X), B(X) \in Z[X]$. Comme $d^0 B \geq 1$, $d^0 A < 3$, de même $d^0 B < 3$ et $d^0(A+B) < 3$.

On a : $P(-1) = A(-1)B(-1) = -1$ et les entiers relatifs $A(-1), B(-1)$ sont opposés et égaux à +1 ou -1, d'où $A(-1)+B(-1) = 0$, de même $A(1)+B(1) = 0$ et $A(2)+B(2) = 0$.

Le polynôme $A(X)+B(X)$ de degré strictement inférieur à 3 admet 3 racines, il est donc nul et $A(X) = -B(X)$, donc $P(X) = -A(X)^2 < 0$.

Par ailleurs, $P(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$, ce qui est contradictoire.

En conclusion $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$.

Exercice n° 7

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On pose $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$, où α est un nombre réel compris entre 0 et 1.

1. On suppose que *X* (respectivement *Y*) suit une loi normale de moyenne m_1 (resp. m_2) et d'écart type σ_1 (resp. σ_2) et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. Déterminer la loi de *Z*.

Notons m la moyenne de Z et σ son écart type. On a : $m = \alpha m_1 + (1-\alpha) m_2$ et $\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2}$. La somme de deux lois normales étant une loi normale, Z suit donc une loi normale de paramètres m et σ.

2. On ne suppose pas de lois a priori sur *X* et *Y*, ni qu'elles sont indépendantes, mais on suppose toutefois qu'elles admettent des moments d'ordre1 et 2.

Déterminer α de façon que la variance de Z soit minimale.

On note $V = \begin{pmatrix} Var\,X & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var\,Y \end{pmatrix}$ la matrice de variance-covariance de X et Y, où $Var\,X$ (resp. $Var\,Y$) désigne la variance de *X* (resp. *Y*) et $Cov(X,Y)$ la covariance de ces deux variables. On suppose que cette matrice *V* est inversible.

On cherche donc à résoudre le problème d'optimisation $\underset{\alpha}{Min}\, Var(Z)$. Il s'agit d'une forme quadratique définie positive, donc strictement convexe et le problème admet une unique solution.

On a

$$Var(Z) = \alpha^2 \, VarX + (1-\alpha)^2 \, VarY + 2\,\alpha\,(1-\alpha)\,Cov(X,Y)$$

Puis,

$$\frac{\partial Var(Z)}{\partial \alpha} = 2\alpha \; VarX - 2(1-\alpha)VarY + 2(1-2\alpha)\,Cov(X,Y)$$

Cette expression s'annule pour :

$$\alpha = \frac{VarY - Cov(X,Y)}{VarX + VarY - 2Cov(X,Y)},$$

car $Var\,(X - Y) = VarX + VarY - 2Cov(X,Y) > 0$.

.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

1. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2) = -(\lambda-1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i).$$

Le polynôme caractéristique étant scindé dans $\mathbb{C}$, la matrice est diagonalisable.

2. Le vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ vérifie $A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1$, c'est-à-dire $x_1 = -y_1$ et $z_1 = 0$. On peut prendre, par exemple, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De la même manière on obtient pour $\lambda_2 = 1+i$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$, que $x_2 = -(1+i)y_2$ et $y_2 = -(1-i)z_2$. Donc, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_3 = 1-i$ et $Av_3 = \lambda_3 v_3$, que $x_3 = -(1-i)y_3$ et $y_3 = -(1+i)z_3$. Donc, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1+i & -1-i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -i & -i & 1+i \\ i & i & 1-i \end{pmatrix}.$$

3. On utilise la diagonalisation de la matrice pour écrire $A^9 = P \cdot D^9 \cdot P^{-1}$. On obtient

$$A^9 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 16(1-i) \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & 32 & -2 \\ -1 & 0 & -30 \\ 16 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème I. *Polynômes d'interpolation de Lagrange*

1. On a $L_k(x_\ell) = \frac{\Pi_{j=0,j\neq k}^n (x_\ell - x_j)}{\Pi_{j=0,j\neq k}^n (x_k - x_j)}$. Si $\ell = k$ alors on a les mêmes termes au numérateur et au dénominateur et $L_k(x_k) = 1$, si $\ell \neq k$ il y a forcément un facteur au numérateur qui s'annule, donc $L_k(x_\ell) = 0$.

2. On a

$$L(x_\ell) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x_\ell) = f_\ell.$$

Pour chaque terme dans la somme, il y a n facteurs au numérateur, donc le degré du polynôme L est inférieur ou égal à n.

3. Supposons, par absurde, qu'il existe L et P deux polynômes de degré au plus n et tels que $L(x_\ell) = P(x_\ell) = f_\ell$ pour tout $\ell \in \{0, ..., n\}$. Alors, le polynôme $L - P$ est de degré au plus n et il a $n+1$ racines distinctes. Ça implique que $L(x) - P(x) = 0$ pour tout x, d'où l'unicité.

II. *Intégration numérique*

1. **a)** Le développement de Taylor à l'ordre n, de $f(x)$ en a, avec reste intégral s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soit P_n le polynôme de degré n et R_n le reste dans le développement de Taylor précédent.

Il est évident que $(x-t)^n I_{[a,x]}(t) = (x-t)_+^n I_{[a,b]}(t)$ et R_n s'écrit comme demandé.

b) On remarque que $E(f)$ est linéaire en f et on remplace f par son développement de la question précédente, donc $E(f) = E(P_n) + E(R_n)$.

Par hypothèse, le procédé est exact pour les polynômes de degré au plus n et P_n est de degré au plus n, donc $E(P_n) = 0$. Ensuite

$$\begin{aligned}
E(f) &= E(R_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k R_n(x_k) - \int_a^b R_n(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x_k) dt - \int_a^b \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x) dt dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k G_t(x_k) - \int_a^b G_t(x) dx \right) dt \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) K_n(t) dt.
\end{aligned}$$

c) On en déduit

$$\begin{aligned}
|E(f)| &\leq \frac{1}{n!} \int_a^b |f^{(n+1)}(t)||K_n(t)| dt \\
&\leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \int_a^b |K_n(t)| dt
\end{aligned}$$

d) La fonction $g(x) = x^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ et $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, donc $E(g) = (n+1) \int_a^b K_n(t) dt$. De plus, K_n est de signe constant, alors $\int_a^b |K_n(t)| dt = (n+1)^{-1} |E(g)|$. En conclusion,

$$|E(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)| |E(g)|.$$

2. **a)** D'après I, le polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x),$$

de degré au plus n. Le procédé d'intégration est exact si

$$\int_a^b L(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Puisque, $\int_a^b L(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k(x)dx$ on prend

$$\lambda_k = \int_a^b \frac{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x - x_j)}{\Pi_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)} dx.$$

Si $\tilde{f}$ est une fonction polynômiale de degré maximal n, telle que $\tilde{f}(x_k) = f(x_k)$, par l'unicité du polynôme d'interpolation (voir question I.3.) $\tilde{f}$ est nécessairement égale à L.

b) Pour $n = 1$, nous avons $x_0 = a$ et $x_1 = b$,

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{b-a}{2} \text{ et } \lambda_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}.$$

Le procédé d'intégration s'écrit $f \mapsto \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$.

Pour le noyau, $G_t(x) = (x - t)_+$ pour $x \in [a, b]$ et

$$\begin{aligned} K_1(t) &= E(G_t) = \frac{b-a}{2}(G_t(a) + G_t(b)) - \int_a^b (x-t)_+ dx \\ &= \frac{(b-a)(b-t)}{2} - \int_t^b (x-t)dx \\ &= \frac{(b-a)(b-t)}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}\Big|_t^b = \frac{(t-a)(b-t)}{2}, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Pour l'erreur d'approximation on utilise la question II.1, pour $n = 1$, donc si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$

$$E(f) = \int_a^b f^{(2)}(t) \frac{(t-a)(b-t)}{2} dt.$$

Comme K_1 est de signe constant sur $[a, b]$

$$|E(f)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| \cdot \int_a^b K_1(t)dt = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12}.$$

III. *Méthode de Gauss*

1. Il suffit de décomposer S sur la base $P_0, ..., P_n$ de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

$c_0, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b P_{n+1}(x) S(x) dx = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b P_{n+1}(x) P_k(x) dx = 0.$$

2. **a)** On a

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} Q(u_k) L_k(x), \text{ où } L_k(x) = \frac{\Pi_{j=0, j\neq k}^{n}(x - u_j)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^{n}(u_k - u_j)}.$$

b) Puisque $Q(u_k) = L(u_k)$, $Q - L$ est divisible par $(x - u_k)$ pour tout $k = 0, ..., n$, donc par P_{n+1}. On peut donc écrire $Q - L = S \cdot P_{n+1}$ pour un polynôme S de degré au plus $(2n+1) - (n+1) = n$. Ceci implique que

$$\int_a^b Q(u) du = \int_a^b L(u) du = \sum_{k=0}^{n} Q(u_k) \int_a^b L_k(u) du. \tag{1}$$

On peut donc poser $\lambda_k = \int_a^b L_k(u) du = (\Pi_{j\neq k}(u_k - u_j))^{-1} \int_a^b \Pi_{j\neq k}(u - u_j) du$, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.

c) Si on prend $Q = L_j^2$, polynôme de degré $2n$, dans (1) on trouve

$$0 < \int_a^b L_j^2(u) du = \sum_{k=0}^{n} L_j^2(u_k) \int_a^b L_k(u) du = \int_a^b L_j(u) du = \lambda_j,$$

pour tout $j \in \{0, ..., n\}$.