ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Que pensez-vous de cette phrase de Victor Hugo, écrivain français du 19ème siècle : « *Une moitié de l'espèce humaine est hors de l'égalité, il faut l'y faire rentrer : donner pour contre-poids au droit de l'homme le droit de la femme ».* Est-elle toujours d'actualité ? Expliquez votre point de vue.

Sujet n° 2

Quelles sont, selon vous, les conditions indispensables pour qu'un accès à l'éducation pour tous soit possible ?

Sujet n° 3

Nelson Mandela, ancien Président de la République d'Afrique du Sud, a déclaré en novembre 2006 : « *Ce sont les hommes qui créent la pauvreté et la tolèrent, et ce sont les hommes qui la vaincront.* » Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour n, p entiers ≥ 1, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$ est notée ${}^tM$.

Si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire usuel par $< X, Y >= {}^tXY$, la norme associée est notée $||X||_2 = \sqrt{< X, X >}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe $\Phi_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \longmapsto AX$, on pose :

$$||\Phi_A|| = \sup_{||X||_2 \leq 1} ||AX||_2 = ||A||$$

On définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
$$||AB|| \leq ||A|| \; ||B|| \quad \text{et} \quad ||AX||_2 \leq ||A|| \; ||X||_2$$

$\mathrm{Sp}(A)$ désigne le spectre (l'ensemble des valeurs propres) de A.

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si la forme quadratique $q_A : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tXAX \in \mathbb{R}$ est définie positive.

Partie I

On note H_n la matrice de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $H_n = (a_{i,j})$ où :

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad i,j \in \{1, \cdots, n+1\}$$

sa forme quadratique associée est notée q_n. On a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$:

$$q_n(X) = {}^tXH_nX$$

1. Montrer que $q_n(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 dt$ si ${}^tX = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

2. a) Montrer que si P est un polynôme à coefficients complexes, on a :

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx + i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0$$

b) En déduire que :

$$q_n(X) < \int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \cdots + x_n e^{in\theta}|^2 dt$$

c) En utilisant b), établir que : $q_n(X) < \pi ||X||_2^2$.

3. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont des éléments de $\mathbb{R}_+^*$.

4. En déduire que $Sp(H_n)$ est une partie de $]0, \pi[$.

5. a) Déterminer $Sp(H_1)$.

b) Écrire l'expression de $q_1(X)$ dans une base orthonormale de vecteurs propres.

c) En déduire la nature de l'ensemble Γ défini ainsi :

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\}$$

d) Représenter Γ dans un repére orthonormé en prenant 2 cm pour unité.

6. Montrer que l'application $N : X \longmapsto \sqrt{{}^tXH_1X}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Que représente Γ pour N sur $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

Partie II

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$B = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \min(Sp(A)), \quad \alpha_2 = \min(Sp(B)), \quad \beta_1 = \max(Sp(A)) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \max(Sp(B))$$

1. Montrer que si B est une matrice symétrique définie positive, alors A est une matrice symétrique définie positive et a est strictement positif.

2. En exprimant $q_A(X)$ dans une base convenable, montrer que : $\alpha_1 = \min_{||X||_2=1} (q_A(X))$ et $\beta_1 = \max_{||X||_2=1} (q_A(X))$.

3. En déduire que $\alpha_2 \leq \alpha_1$ et $\beta_1 \leq \beta_2$.

4. Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $q_B(Y) = q_A(X) + 2u^tXC + au^2$.

b) Montrer que $q_B(Y) \leq \begin{pmatrix} ||X||_2 & |u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & ||C||_2 \\ ||C||_2 & |u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||X||_2 \\ |u| \end{pmatrix}$.

c) En déduire que $\beta_2 \leq \frac{1}{2}\left\{\beta_1 + a + \sqrt{4||C||_2^2 + (\beta_1 - a)^2}\right\}$.

5. On considère $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$ et on pose $\alpha_n = \min(Sp(H_n))$, $\beta_n = \max(Sp(H_n))$. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante avec :

$$\beta_{n+1} \leq \beta_n + \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Partie III

On définit sur $\mathbb{R}_n[t]$ (ensemble des polynômes de degré n) l'application bilinéaire suivante :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[t], \qquad < P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

et on pose :

$$\delta_n = \inf_{(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(x_0 + x_1t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1} + t^n\right) dt$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. En déduire qu'il existe un unique vecteur $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\delta_n = \int_0^1 \left(a_0 + a_1t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n\right) dt$$

$$\text{et } \forall k \in \{0, \cdots, n-1\}, \quad \int_0^1 \left(a_0 + a_1t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n\right) t^k dt = 0$$

3. Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(X) = \frac{a_0}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{X+n-1} + \frac{1}{X+n+1}$$

a) Montrer que $F(0) = F(1) = \cdots = F(n-1) = 0$.

b) En déduire que $F(X)$ s'exprime sous la forme :

$$F(X) = \frac{A(X)}{(X+1)(X+2)\cdots(X+n+1)}$$

On déterminera explicitement $A(X)$.

c) En déduire que $\delta_n = F(n) = \dfrac{(n!)^4}{2n!(2n+1)!}$.

4. α_n ayant été défini à la question II. 5., montrer que :

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{12.15^n}$$

Partie IV

Pour toute matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle conditionnement de A le réel défini par :

$$C(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$$

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'unique solution de $AX = B$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), B \neq 0$. Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que : $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$. Montrer que :

$$\frac{||\Delta X||_2}{||X||_2} \leq C(A)\frac{||\Delta B||_2}{||B||_2}$$

2. Montrer que pour toute matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$C(A) = \sqrt{\frac{\max\left(Sp({}^tAA)\right)}{\min\left(Sp({}^tAA)\right)}}$$

3. En déduire une expression de $C(A)$ lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

4. Montrer que si $C(A) = 1$ alors il existe $\mu > 0$ tel que la matrice μA soit orthogonale.

5. Comparer $C(A)$ et $C(QA)$ si Q est une matrice orthogonale.

6. Donner une minoration de $C(H_n)$ grâce au calcul de β_1, $n \geq 1$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) , notée x_n, et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour n assez grand, on a :
$$\frac{Ln\, n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\, n}{n}$$
(On peut poser $f_n(u) = n\, Ln(1-u) - Ln\, u$, où Ln désigne le logarithme népérien).

3. Montrer que $Ln(u_n)$ est équivalent à $-Ln\, n$ et en déduire que $x_n = 1 - \frac{Ln\, n}{n} + o\left(\frac{Ln\, n}{n}\right)$

Exercice ° 2

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$

Exercice n° 3

Déterminer toutes les fonctions numériques f, continues sur R, qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)\, f(t)\, dt$$

Exercice n° 4

Pour n un entier naturel non nul et $x \in R$, on pose $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

2. Soit g une fonction continue sur R et nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_R g(x) f_n(x)\, dx$

Exercice n° 5

On considère la suite d'intégrales $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\, dx$,

où $tg(x)$ désigne la tangente de x

1. Trouver une relation de récurrence concernant cette suite.
2. Montrer que la suite I_n est convergente.
3. Trouver un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 6

Buffon (plus connu comme naturaliste) avait posé le problème suivant : « Si on lance une aiguille de longueur l sur un parquet dont les lames sont de largeur a, quelle est la probabilité *p* pour que l'aiguille tombe à cheval sur deux lames ? ».

1. On suppose que $l \le a$. On note *d* la distance du milieu de l'aiguille à la lame la plus proche et θ ($-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$) la mesure de l'angle que fait l'aiguille avec la direction orthogonale à cette lame.

- A quelle condition a-t-on un chevauchement ?
- Calculer *p* (on pourra utiliser la courbe représentative de la fonction $\theta \to \frac{l}{2}\cos\theta$).

2. On suppose $l > a$. Calculer *p* .

Exercice n° 7

Pour $\alpha \in \left]-1,1\right[$, on donne l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$\forall x \in R, \quad f(x) = (1-x) f(\alpha x)$ où f est une fonction continue.

1. Montrer que si f et g sont deux solutions de (E) qui vérifient $f(0) = g(0)$, alors elles sont égales.

2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous contracterez au 1/5ème (en 200 mots) le texte suivant « Trente ans de bouleversements dans le monde » de Pierre Dockès.

N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

Trente ans de bouleversements dans le monde

La vague de mondialisation des XX- XXI siècles s'est développée en deux temps assez différents, séparés par la période de transition des années 1973-1989 : 1973, le retournement du rythme de croissance et 1989, la victoire du capitalisme à l'échelle mondiale.

Le capitalisme a changé. Il a accouché d'un nouvel ordre productif dans les années 1970-1980, à l'œuvre dès les années 1990, mais non abouti, donc dangereusement instable. On sait ses caractéristiques, sa base technique renouvelée, qui donne une importance essentielle à la connaissance, l'importance centrale des marchés financiers globalisés avec la place devenue fondamentale des échanges de capitaux dans la formation des profits, les transformations du rapport salarial, des rapports de force entre le travail et le capital, celles parallèles des modes d'organisation et de gouvernance des entreprises (avec le changement des rapports entre les *managers* et les capitalistes), la suprématie de la régulation par le marché par nature mondialisable sur les régulations volontaires restées essentiellement dans le cadre des Etats-nations.

Le monde a changé. La fin du communisme et la transition de la Russie, de l'Europe orientale, de la Chine vers le capitalisme ont produit un rebond de mondialisation – une mondialisation sans adversaires systémiques, mais avec un potentiel d'affrontements internationaux considérables. Et la Chine, l'Inde, la Russie, le Brésil sont en voie de rattrapage rapide. La Chine a un taux de croissance moyen de 10% depuis quinze ans, or il s'agit de plus d'un cinquième de la population mondiale. Certes, la croissance chinoise est instable, car elle est fondée sur la croissance des exportations, les investissements directs étrangers, les dépenses d'infrastructures et de nombreuses entreprises sont en surproduction, très endettées. Ce rattrapage est cependant irréversible. Depuis le début des années 1990, les pays émergents ont gagné six points de parts du marché mondial en volume.

Cet élargissement du monde constitue un changement quantitatif majeur : plus de 700 millions de travailleurs (non agricoles) entrent dans la compétition mondiale. On assiste a une redistribution des « poids » économiques des nations, le poids relatif de l'Europe et du Japon se réduisant davantage que celui des Etats-Unis, qui conservent leur position dominante.

L'intégration mondiale atteint un degré inégalé puisqu'on a retrouvé, puis dépassé l'ouverture des économies nationales atteinte en 1870, aussi bien en ce qui concerne les flux de marchandises que les flux de capitaux. Depuis quinze ans, les exportations mondiales sont passées de 19% à 24%, les flux de capitaux privés de 10% à 25% du PIB mondial. Cette mondialisation des marchés s'est développée sans que se mette en place un mode de régulation intentionnelle à la même échelle (même s'il existe des esquisses). Est-ce pour cela que la libération des échanges de biens et services a probablement atteint ses limites - l'échec redoublé de Doha est révélateur -, que de tous côtés, on appréhende mieux le risque d'instabilité des flux de capitaux ?

L'Europe et la France ont perdu. Le choc concurrentiel sur la France*,* plus généralement sur les pays du Nord, est considérable et croissant, et pas seulement sur l'industrie intensive en travail peu qualifié.

Cependant, depuis 1990, les pays du Nord sont dans des situations très différentes les unes des autres. Le Japon est resté durablement en déflation. Les Etats-Unis ont bénéficié de taux de croissance presque deux fois plus élevés que l'Europe (un point et demi de taux de croissance en plus) et ils récupèrent le terrain perdu dans les années 1950 et 1960. Ils ont retrouvé un dynamisme économique spectaculaire, ils ont été la matrice du nouvel ordre productif et de la troisième révolution industrielle. Leur croissance a été soutenue par la consommation, appuyée sur l'endettement, relayée par l'investissement. Une situation très fragile, en particulier parce que le financement de la croissance s'appuyant toujours davantage sur l'épargne étrangère (notamment chinoise), la balance commerciale s'enfonce nécessairement dans le déficit.

Quant à l'Europe, depuis quinze ans, son PIB par tête se détériore relativement aux autres pays de l'OCDE avec le déclin relatif de la productivité. L'Europe continentale, et plus spécialement la zone euro, n'a que des taux de croissance entre 1% et 2%. Depuis 1989, la globalisation a eu des effets négatifs sur le taux de croissance européen, mais modestes. Les effets du côté de la demande (prix plus bas, plus grande variété des produits) ont été modérément positifs ; en revanche, du côté de l'offre ils sont tous négatifs (accroissement du taux de pénétration des importations, déplacement de la demande mondiale vers des biens non européens, accroissement des sorties d'investissements directs à l'étranger dû à l'*offshoring,* tendance renforcée par l'*outsourcing*[1]).

Cependant, la perte due à la mondialisation est restée modeste : 0,1% du taux de croissance par tête entre 1991 et 2003. Il ne faut pas négliger le fait que les pays émergents constituent un marché potentiellement élevé (si le marché chinois est essentiellement orienté vers les moyens de production, l'énergie, les matières premières, la consommation ne devrait pas manquer de suivre). La balance commerciale de l'Europe s'améliore avec le reste du monde, malgré le déficit croissant avec la Chine. Et il y a une forte complémentarité des biens pour lesquels l'Europe est bien placée (moyenne et haute technologie, biens d'équipements) et ceux produits par la Chine (basse technologie, biens travaillistiques, produits en relation avec les nouvelles technologies).

Dockès, Pierre, 2006, octobre 2006, « Trente ans de bouleversements dans le monde », pp. 208 à 212, le Cercle des économistes, *Politique économique de* DROITE*, Politique économique de* GAUCHE*.*

---

[1] *Offshoring*, création d'établissements à l'étranger par l'investissement direct ; *outsourcing*, recours à des sous-traitants étrangers ou en encourageant la délocalisation de ses sous-traitants domestiques.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1.

On rappelle le résultat suivant : on dit que le nombre réel $p \neq 0$ est une période de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si pour tout x réel, $f(x+p) = f(x)$. On dit alors que f est périodique. Si de plus f est continue non constante, elle admet une plus petite période strictement positive appelée **la** période de f.

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels et on considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est périodique.
2. Soit a une période de f, montrer que a est rationnel.
3. Soit a un rationnel quelconque, considérons x réel, quelle est la nature de x et $x+a$: rationnel, irrationnel ?
4. Montrer que le groupe des périodes de f n'a pas de plus petit élément.

Exercice 2.

Soit f_n le terme général d'une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément et préciser sa limite.
2. Les fonctions f_n sont-elles dérivables ? La limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle dérivable ?
3. Soit $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des dérivées premières de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Quelle est la nature de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Conclure.

Problème

Soit Y une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité notée f, strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. On suppose dans tout le problème que cette variable admet une espérance notée μ et une variance notée $\sigma^2 > 0$. On note p un réel appartenant à $]0;1[$, F_Y la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et $\mathbb{E}(g(Y))$ l'espérance de $g(Y)$ lorsque cette espérance existe. On définit F_Y par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(y)dy.$$

- **Préliminaires.**

  1. Soit t un réel quelconque. Montrer que :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \geq t^2 \int_{t}^{+\infty} f(x)dx.$$
  Ecrire cette inégalité en utilisant la fonction F_Y et l'espérance de Y^2.
  2. La fonction de répartition F_Y est-elle strictement monotone ?
  3. Exprimer $P(Y - \mu > t)$ à l'aide de la fonction de répartition de Y.
  4. On note Z la variable définie par :
  $$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}.$$
  Soit t un réel quelconque. Exprimer $F_Y(t)$ à l'aide de la fonction de répartition de Z.
  5. Soit t un réel quelconque. Exprimer $\mathbb{E}[(t - Y)^2]$ en fonction de t, μ, σ^2. Que vaut cette expression pour $t = \mu$?
  6. On considère ici $\mu = 0$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$:
  $$t \leq \sqrt{\mathbb{E}((t - Y)^2)}\sqrt{\mathbb{P}(Y < t)}. \tag{1}$$

- **Question 1.**

  1. On supposera dans cette question que Y est d'espérance nulle : $\mu = 0$. Soit $p \in]0;1[$, montrer que, pour tout élément $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :
  $$t \leq \sigma\sqrt{\frac{1}{1-p}}.$$
  2. L'espérance μ est maintenant quelconque. Soit $p \in]0;1[$. Déduire des questions précédentes que, pour tout élément $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :
  $$t \leq \sigma\sqrt{\frac{1}{1-p}} + \mu.$$
  3. Montrer que le neuvième décile de la loi de Y peut être majoré par :
  $$\sigma\sqrt{10} + \mu.$$

- **Question 2.** Le but de cette question est d'affiner l'inégalité obtenue précédemment.

    1. On suppose ici que $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Déduire des questions préliminaires que, pour tout réel $t > 0$:
    $$\mathbb{P}(Y > t) \leq \frac{1}{t^2 + 1}.$$
    2. Soit $p \in]0; 1[$. La variable aléatoire Y est toujours telle que $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. En déduire que, pour tout réel $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :
    $$t \leq \sqrt{\frac{p}{1-p}}.$$
    3. L'espérance μ et la variance $\sigma^2 > 0$ de Y sont maintenant quelconques. Soit $p \in]0; 1[$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a :
    $$t \leq \sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}} + \mu. \tag{2}$$
    4. Montrer que le neuvième décile de la loi de Y peut être majoré par :
    $$3\sigma + \mu.$$

- **Question 3.**

    1. Quelle est l'utilité d'un tel résultat ?
    2. Diriez-vous que le résultat (2) est généralisable à tout type de variable aléatoire ? Argumenter précisément la réponse donnée.