Avril 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

$\mathbb{N}_n$ désigne $\{1, \cdots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I

1. $|| \ \ ||_\infty$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car

$$\frac{||Ax||}{||x||} = \left|\left|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right|$$

montre que les ensembles $\left\{\dfrac{||Ax||}{||x||}, x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right\}$ et $\{||Ay||, y \in S^{n-1}\}$ où $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{C}^n / ||y|| = 1\}$ est la sphère unité, sont égaux. Comme S^{n-1} est un compact de $\mathbb{C}^n$ et comme l'application $y \longmapsto ||Ay||$ est continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en un point z de S^{n-1}, autrement dit, il existe $z \in S^{n-1}$ tel que

$$||Az|| = \max_{y \in S^{n-1}} ||Ay|| = \max_{x \neq 0} \left(\frac{||Ax||}{||x||}\right).$$

On constate que si $x \neq 0$,

$$||Ax|| = \frac{||Ax||}{||x||}||x|| \leq ||A||_\infty ||x||.$$

L'inégalité étant triviale pour $x = 0$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad ||Ax|| \leq ||A||_\infty ||x||.$$

On vérifie ensuite que $|| \ \ ||_\infty$ satisfait les trois axiomes d'une norme :

a) $||A||_\infty = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad ||Ax|| = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad Ax = 0 \Longrightarrow A = 0.$

b) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{||Ax + Bx||}{||x||} \leq \frac{||Ax||}{||x||} + \frac{||Bx||}{||x||} \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$$

et en passant à la borne supérieure dans cette inégalité pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $||A+B||_\infty \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$.

c) pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$,

$$\frac{||\lambda Ax||}{||x||} = |\lambda|\frac{||Ax||}{||x||}$$

et en passant supérieure dans cette inégalité pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on obtient $||\lambda A||_\infty = |\lambda| ||A||_\infty$.

2. $||A||_\infty = \max\limits_{||x||=1} ||Ax|| = \max\limits_{||x||=1} \left(\max\limits_i \left| \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \right)$. Pour tout $x \in S^{n-1}$ et tout $i \in \mathbb{N}_n$

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{donc} \quad ||A||_\infty \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

D'autre part, si $i_0 \in \mathbb{N}_n$ désigne l'indice tel que

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = \left(\sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| \right),$$

posons $x = \left(\frac{\overline{a_{i_01}}}{|a_{i_01|}}, \cdots, \frac{\overline{a_{i_0n}}}{|a_{i_0n|}} \right) \in S^{n-1}$ en prenant comme convention de remplacer $\frac{\overline{a_{i_0j}}}{|a_{i_0j|}}$ par 0 si $a_{i_0j} = 0$. Alors

$$||A||_\infty \geq ||Ax|| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0j}x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right),$$

et l'on peut conclure à l'égalité demandée.

3. On utilise deux fois la propriété

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad ||Ax|| \leq ||A||_\infty$$

qui provient directement, on l'a vu, de la définition de la norme $|| \ \ ||_\infty$. On trouve

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad ||ABx|| \leq ||A||_\infty ||Bx|| \leq ||A||_\infty ||B||_\infty ||x||,$$

on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \frac{||ABx||}{||x||} \leq ||A||_\infty ||B||_\infty,$$

et en passant au *sup* dans cette inégalité, $||AB||_\infty \leq ||A||_\infty ||B||_\infty$.

Partie II

1. $|A+B| \leq |A|+|B|$, est triviale par l'inégalité triangulaire appliquée à chacun des coefficients. Posons $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), AB=(c_{ij})$ et $|A|.|B| = (d_{ij})$. On a

$$|c_{ij}| = \left|\sum_{k=}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sum_{k=}^{n} |a_{ik}b_{kj}| = |d_{ij}|$$

de sorte que $|AB| \leq |A|.|B|$ et en appliquant l'inégalité avec $B=x$ on obteint $|Ax| \leq |A||x|$.

2. Si A est une matrice strictement positive et x est un vecteur positif non nul alors les coefficients de Ax sont $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_{k_0} > 0$. Comme $a_{ik} > 0$ et $x_k \geq 0$ pour tout k, on en déduit $y_i > 0$ d'où $Ax > 0$.

3. Montrons la contraposée : si $A \neq 0$, il existe i, j tels que $a_{ij} \neq 0$. Si $Ax = y$,

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \geq a_{ij}x_j > 0.$$

ce qui entraine $Ax \neq 0$.

4. En élevant au carré on obtient

$$\begin{aligned}
|z+z'| = |z|+|z'| \iff 2\Re\left(z\overline{z'}\right) = 2|zz'| &\iff z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+ \\
&\iff z'\overline{z} = r \in \mathbb{R}_+ \\
&\iff z' = \frac{r}{|z|^2} z \\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z' = \alpha z.
\end{aligned}$$

5. Pour n complexes z_k, les inégalités triangulaires

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1 + z_k| + |z_2| + \cdots + |z_n| \leq |z_1| + |z_k| + |z_2| \cdots + |z_n|,$$

entraînent, si les extrémités sont identiques

$$|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$$

et d'après ce que l'on vient de voir,$z_k = \alpha_k z_1$ avec $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$. Cela implique $z_k = |z_k| e^{i\theta}$ où $\theta = \arg(z_1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

6. Soit A une matrice strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrons que

$$|Ax| = |A||x| \Longrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad x = e^{i\theta}|x|.$$

On a

$$|Ax| = A|x| \Longleftrightarrow \forall l \in \mathbb{N}_n \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_{lk} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_{lk} x_k|$$

$z_k = a_{lk} x_k$, on trouve $|\sum_{k=1}^{n} z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et la question précédente montre l'existence d'un réel θ_l tel que pour tout k, $z_k = |z_k| e^{i\theta_l}$. En faite θ_k est indépendante de l puisque c'est l'argument de $z_k = a_{lk} x_k$ et $a_{lk} > 0$. Donc $a_{ik} x_k = |a_{ik} x_k| e^{i\theta}$ et a_{ik} étant strictement positif,

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \qquad x_k = |x_k| e^{i\theta}$$

ce qui traduit $x = |x| e^{i\theta}$.

Partie III

1. Un calcul élémentaire donne que les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 \neq c^2$, sont $\dfrac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ et $\dfrac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$.

Clairement le rayon spectral est $\dfrac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$, puisque $a^2 \neq c^2$.

2. Notons $Spec(A)$ le spectre de l'opérateur A. C'est par définition l'ensemble des valeurs propres de A. Si $\lambda \in Spec(A)$, il existe un vecteur

propre non nul $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Notons $[c_1, \cdots, c_n]$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ de $\mathbb{C}^n$. Si $X = [x, x, \cdots, x]$,

$$AX = A[x, x, \cdots, x] = [\lambda x, \lambda x, \cdots, \lambda x] = \lambda X.$$

3. Si $\lambda \in Spec(A)$ avec les précédente notations,

$$||AX|| = |\lambda|||X|| \leq ||A||||X|| \Longrightarrow |\lambda| \leq ||A||.$$

Comme $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|$, on déduit $\rho(A) \leq ||A||$.
4. Les polynômes caratéristique de A et $S^{-1}AS$ sont les mêmes puisque

$$\det(XI - A) = \det(S^{-1}(XI - A)S) = \det(XI - S^{-1}AS),$$

de sorte que $Spec(A) = Spec(S^{-1}AS)$ et $\rho(A) = \rho(S^{-1}AS)$. .
5. Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$. En effet A est trigonalisable car le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, il existe, donc, une matrice inversible S tel que $T = S^{-1}AS$ est triangulaire supérieure

$$T = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} t_1 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & t_n \end{pmatrix}$$

On a

$$T^k = S^{-1}A^kS = \begin{pmatrix} t_1^k & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & t_n^k \end{pmatrix}$$

de sorte que $\rho(T) = \rho(A)$ et $\rho(T^k) = \rho(A^k)$. Les valeurs propres des matrices triangulaires T et T^k sont situées dans la diagonale principale, donc

$$Spec(T) = \{t_1, \cdots, t_n\} \quad \text{et} \quad Spec\left(T^k\right) = \left\{t_1^k, \cdots, t_n^k\right\}$$

et

$$\rho(T^k) = \max_{i \in \mathbb{N}_n} |t_i^k| = \left(\max_{i \in \mathbb{N}_n} |t_i|\right)^k = \rho(T)^k.$$

On obtient bien $\rho(A^k) = \rho(A)^k$. Il résulte que $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq ||A^k||$, donc $\rho(A) \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$.

6. On vérifie sans peine que l'application $N : A \mapsto ||S^{-1}AS||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est sous-multiplicative car $||\ \ ||$ l'est. En effet

$$N(AB) = \left\|S^{-1}ABS\right\| = \left\|S^{-1}ASS^{-1}BS\right\| \leq \left\|S^{-1}AS\right\|\left\|S^{-1}BS\right\| = N(A)N(B).$$

7. Un Calcul élémentaire permet d'écrire que $(\triangle^{-1}T\triangle)_{ij} = t_{ij}d^{j-i}$.
Soit S une matrice inversible telle que $T = S^{-1}AS$. Supposons que T soit triangulaire supérieure. Alors $t_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. Par la question précédente $N(X) = \left\|(S\Delta)^{-1}XS\Delta\right\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et

$$N(A) = \left\|(\Delta)^{-1}T\Delta\right\|_\infty = \max_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}d^{j-i}|\right).$$

En prenant $d \in]0,1[$ et en posant $t = \max_{i,j\in\mathbb{N}_n}(|t_{ij}|$, on trouve

$$N(A) = \max_{i\in\mathbb{N}_n}\left(\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}d^{j-i}|\right)$$

avec

$$\sum_{j=i}^{n}|t_{ij}|d^{j-i} = |t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n}|t_{ij}|d^{j-i} \leq \rho(A) + \tau\sum_{j=i}^{n}d^{j-i} = \rho(A) + \tau\frac{d}{d-1}.$$

Comme $\lim_{d\longrightarrow 0}\tau\dfrac{d}{d-1} = 0$, si $\varepsilon > 0$ est donné à l'avance, on peut choisir $d \in]0,1[$ tel que $\tau\frac{d}{d-1} < \varepsilon$ et l'on obtient bien

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

8. La question précédente combinée avec la sous-multiplicative de N permettent d'écrire

$$N(A^k) \leq N(A)^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k.$$

Comme $\rho(A) < 1$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$, de sorte que $\lim_{k\longrightarrow+\infty}(\rho(A) + \varepsilon)^k = 0$ et donc $\lim_{k\longrightarrow+\infty}N(A^k) = 0$. La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme N or tout les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie il résulte que $\lim_{k\longrightarrow+\infty} A^k = 0$.

9. Considérons la matrice $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Il vient

$$\rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$$

et par ce qui précéde $\lim_{k\longrightarrow+\infty} A_\varepsilon^k = 0$. On en déduit qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k > k_0$ on ait

$$\left||A_\varepsilon^k\right|| \leq 1 \Longrightarrow \left|\left|A^k\right|\right| \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k$$

On en déduit

$$k \geq k_0 \Longrightarrow \rho(A) \leq \left|\left|A^k\right|\right|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A)+\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, i.e. $\lim_{k\longrightarrow+\infty} \left|\left|A^k\right|\right|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie IV

1. L'ensemble Λ est évidement majoré (par exemple par la somme des éléments de A) et par définition de λ_0, il existe (X_m) de $\mathcal{S}$ et (α_m) de Λ telle que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \alpha_m = \lambda_0 \quad \text{et} \quad \forall m, AX_m \geq \alpha_m X_m.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ donc compact de sorte que l'on peut extraire de la suite (X_m) une sous-suite convergente (X_{m_l}). Notons $X \in \mathcal{S}$ sa limite. Comme $AX_{m_l} \geq \alpha_{m_l} X_{m_l}$, par passage à la limite on obtient $AX \geq \lambda_0 X$. Si $AX \neq \lambda_0 X$, on a $AX > \lambda_0 X$. En composant par A à gauche, on obtient, du fait que $A > [0]$, l'inégalité $AY > \lambda_0 Y$, où $Y = AX$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ suffisament petit tel que $AY \geq (\lambda_0+\varepsilon)Y$, ce qui contredit la définition de λ_0 car quitte à multiplier Y par une constante positive non nulle, on peut supposer $Y \in \mathcal{S}$.
Ainsi $AX = \lambda_0 X$ avec $X \in \mathcal{S}$ or $A > [0]$ entraîne $AX > 0$ donc $\lambda_0 X > 0$ on en déduit $X > 0$.

2. Supposons que $\lambda \neq \lambda_0$ est une autre valeur propre de A et notons $Z = (z_i)$ un vecteur propre associé. On a

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \lambda z_i$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |z_j| \geq |\lambda||z_i|$$

i.e. $A|Z| \geq |\lambda||Z|$. On en déduit que $|\lambda| \in \Lambda$ car quite à multiplier $|Z|$ par une constante on peut toujours supposer que $|Z| \in \mathcal{S}$. Donc $|\lambda| \leq \lambda_0$. Il reste montrer que le cas d'égalité n'a pas lieu. Supposons que $\lambda = \lambda_0$. Comme $A > [0]$ il existe $\delta > 0$ suffisament petit tel que $A_\delta = A - \delta I_n \geq [0]$. Comme λ_0 est la plus grande valeur propre réelle positive de A, $\lambda_0 - \delta$ est la plus grande valeur propre réelle positive de A_δ. En répétant l'argument précédent à la matrice A_δ et à la valeur propre $\lambda - \delta$, on obtient $|\lambda - \delta| \leq \lambda_0 - \delta$. Mais

$$\lambda_0 = |\lambda| = |\lambda - \delta + \delta| \leq |\lambda - \delta| + \delta \leq \lambda_0,$$

de sorte que $|\lambda| = |\lambda - \delta| + \delta$, ce qui n'est possible que si λ est un réel positif. Donc $\lambda = |\lambda| = \lambda_0$, ce qui contredit que $\lambda \neq \lambda_0$. Donc $|\lambda| < \lambda_0$.

3. On sait qu'il existe un vecteur propre $X \geq 0$ tel que $X \in E_{\lambda_0}$. Supposons que $\dim(E_{\lambda_0}) \geq 2$, de sorte qu'il existe $Y \in E_{\lambda_0}$ tel que (X, Y) est une famille libre. Il existe μ tel que $X - \mu Y \geq 0$ (on peut prendre $\mu = \inf \left\{ \dfrac{x_i}{|y_i|}, y_i \neq 0 \right\}$). Comme $A > [0]$ on a $AX - \mu AY > 0$, i.e. $\lambda_0 (X - \mu Y)) > 0$, ce qui contredit le choix de μ. D'où le résultat.

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit A la matrice d'une application linéaire de R^n dans R^n.

1. On a $\mathrm{Im}(A) \oplus (\mathrm{Im}(A))^{\perp} = R^n$. Soit $u \in KerA'$, alors $A'u = 0$ et pour tout $v \in R^n$, $v'A'u = u'Av = 0$, donc u est orthogonal à $\mathrm{Im}(A)$ et $Ker(A') \subset (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$. Réciproquement, si $u \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$ alors pour tout $v \in R^n$, $u'Av = v'A'u = 0$, d'où $u \in KerA'$. En conclusion : $Ker(A') = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$.

2. Soit $f(v) = \|Av - b\|^2$, f est. une forme quadratique, donc convexe et elle admet un minimum en v si et seulement si sa différentielle est nulle en v. On a $df(v) = 2A'Av - 2A'b = 0$. La solution doit donc vérifier $A'Av = A'b$.
   Comme $\mathrm{Im}(A) \oplus Ker(A') = R^n$, pour tout $b \in R^n$, $b = b_1 + b_2$, avec $b_1 \in \mathrm{Im}(A)$ et $b_2 \in Ker(A')$. On a $A'b_2 = 0$ et il existe $u_0 \in R^n$ tel que $Au_0 = b_1$, d'où $A'b = A'(b_1 + b_2) = A'b_1 = A'Au_0$, donc u_0 vérifie la condition d'optimalité.

3. Soit u_1 est une autre solution du problème précédent de minimisation, alors $A'b = A'Au_1$ et $A'b = A'Au_0$.
   Posons $s = Au_1$ et $r = b - Au_1$, alors $r \in Ker(A')$.
   Comme $\mathrm{Im}(A) \oplus Ker(A') = R^n$, la décomposition $b = b_1 + b_2$ est unique et $s = b_1$ et $b_1 = Au_1 = Au_0$.

4. Dans le cas où le rang de la matrice A est égal à *n*, la matrice est inversible et la condition d'optimalité $A'Av = A'b$ donne $Av = b$ et une seule solution $v = A^{-1}b$

Exercice n° 2

Comme f est non constante , il existe $x < y$ tels que $f(x)$ soit différent de $f(y)$. Soit la droite *D* passant par les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ qui a pour équation $Y = aX + b$, avec $a = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$ puisque f est croissante. Par convexité de f, la droite *D* est au dessus du graphe de f uniquement entre M et N. Donc si $z > y$, on a $f(z) > az + b$ comme $a > 0$; $f(z)$ tend vers $+\infty$ lorsque z tend vers $+\infty$.

Exercice n° 3

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la fonction numérique f définie sur R^2 par $f(x, y) = x^n + y^n - nxy$.

1. Les points critiques de f correspondent aux solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1} - ny = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ny^{n-1} - nx = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $x^{n^2-2n} = 1$, il n'y a que deux racines possibles, à savoir $x = \pm 1$.
Si n est pair, $n^2 - 2n$ aussi, donc 1 et –1 vérifient $x^{n^2-2n} = 1$. On vérifie réciproquement que les couples $(x, y) = (1,1)$ ou $(-1, -1)$ sont bien solutions du système.
Si n est impair, $n^2 - 2n$ aussi, et 1 est la seule racine à retenir. On vérifie que $(1,1)$ est solution du système.

2. La fonction f définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ est continue sur le compact $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$, elle admet sur D un minimum et un maximum.

3. Dans la première question, on a trouvé deux minimums locaux de f sur D et ces deux points appartiennent au domaine D. On calcule $f(1,1) = -2$ et $f(-1,-1) = -2$. Le minimum est donc atteint simultanément en ces deux points.

4. L'inégalité $f(x,y) \le 16 - 2x^2y^2 - 4xy$ est équivalente à $(x^2 + y^2)^2 \le 16$ et donc à $(x,y) \in D$. Pour tout couple $(x,y) \in D$, on obtient donc $f(x,y) \le 16$ si x et y sont de même signe. On remarque que $f(2,0) = 16$ et $f(x,y) = f(-x,-y)$. Si bien que l'on aura prouvé que 16 est le maximum de f sur D si l'on montre que $f(x,y) \le 16$ lorsque $(x,y) \in D$ vérifie $-2 \le x \le 0$ et $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$.
   Si $-2 \le x \le 0$ et $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$,
   $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \le x^4 + (4 - x^2)^2 - 4x\sqrt{4 - x^2}$
   De sorte que l'on puisse conclure à $f(x,y) \le 16$ si l'on prouve que, en posant $t = -x$,
   $\forall t \in [0,2]$ $g(t) = t^4 + (4 - t^2)^2 + 4t\sqrt{4 - t^2} \le 16$, ce qui revient à $4 \le t^2(4 - t^2)$. Il est maintenant facile de vérifier que $4 \le u(4 - u)$ pour tout $\forall u \in [0,4]$. En effet l'application $\varphi(u) = 4u - u^2$ est dérivable, sa dérivée $\varphi'(u) = 4 - 2u$ s'annule pour $u = 2$ et elle admet un minimum en ce point.
   Le maximum de f sur D est atteint en $(2,0)$, et en $(-2,0)$ et vaut 16.

Exercice n° 4

1. Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Cette fonction h est continue en 0, car $\underset{x \to 0}{Lim}\, h(x) = \underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0 = h(0)$

Cette fonction h est continue sur l'intervalle $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et vérifie $h(a) = 0 = h(0)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,a[$ tel que $h'(c) = 0$, à savoir $cf'(c) - f(c) = 0$. L'équation de la tangente au graphe de f au point $M(c, f(c))$ a pour équation $y - f(c) = f'(c)(x - c)$, en $(0,0)$ on obtient l'expression précédente $cf'(c) - f(c) = 0$. Donc il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M au graphe de f passe par l'origine.

2. Comme $g''(x) \le 0$ pour tout x de $[a,b]$, la fonction g est concave. Le graphe de g sur $[a,b]$ est donc en dessous de la corde qui joint les points $A(a, g(a))$ et $B(b, g(b))$, donc pour tout x de $[a,b]$, $g(x) \ge Min(g(a), g(b))$, d'où $g(x) \ge 0$. La relation $g(a) = g(b)$ n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat.

Exercice n° 5

1. On trouve pour $0<|x|<1$: $Ln(1-x)=-\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$

2. On a $a=S(1/2)$ et $\frac{1}{(n+1)(n-2)}=\frac{-1/3}{n+1}+\frac{1/3}{n-2}$.

   Pour $0<|x|<1$:

   $$S(x)=\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{(n+1)(n-2)}=-\frac{1}{3}\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{n+1}+\frac{1}{3}\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{n-2}=-\frac{1}{3x}\sum_{n\geq 3}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^2}{3}\sum_{n\geq 3}\frac{x^{n-2}}{n-2}$$

   $S(x)=-\frac{1}{3x}I(x)+\frac{x^2}{3}J(x)$, où $I(x)=-Ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ et $J(x)=-Ln(1-x)$.

   On a : $I(1/2)=Ln\,2-\frac{2}{3}$ et $J(1/2)=Ln\,2$, d'où $a=-\frac{7}{12}Ln\,2+\frac{4}{9}$.

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique continue sur R, périodique de période T.

1. En posant $u=nt$, on obtient :

   $$\int_a^b f(nt)\,dt=\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}f(u)\,du=\frac{1}{n}\int_{na}^{k_1T}f(u)\,du+\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\frac{1}{n}\int_{kT}^{(k+1)T}f(u)\,du+\frac{1}{n}\int_{k_2T}^{nb}f(u)\,du,$$

   avec $k_1=E\left(\frac{na}{T}\right)$ et $k_2=E\left(\frac{nb}{T}\right)$.

   Or $\left|\frac{1}{n}\int_{na}^{k_1T}f(u)\,du+\frac{1}{n}\int_{k_2T}^{nb}f(u)\,du\right|\leq\frac{2}{n}\int_0^T|f(t)|\,dt$ qui tend vers zéro.

   Et $\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\frac{1}{n}\int_{kT}^{(k+1)T}f(u)\,du=\frac{k_2-k_1}{n}\int_0^T f(u)\,du$ qui converge vers $\frac{(b-a)}{T}\int_0^T f(u)\,du$, d'où le résultat.

2. D'après la question précédente, le résultat est vrai pour une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$, et il le reste clairement pour une combinaison linéaire de telles fonctions.
3. Soit φ une fonction continue sur un intervalle borné $[a,b]$. Il existe une suite de fonctions en escalier φ_n qui converge uniformément vers φ (propriétés de l'intégrale de Riemann).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe p entier strictement positif tel que :

$\forall\, t \in [a,b],\ \left|\varphi(t) - \varphi_p(t)\right| < \varepsilon$

On peut toujours supposer que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)\,du = 1$, on a :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt)|\left|\varphi(t) - \varphi_p(t)\right| dt$$
$$+\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi_p(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(t)\,dt\right| + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi(t) - \varphi_p(t)\right| dt$$

Pour n assez grand, chacune des trois expressions de la somme précédente peut être rendue inférieure à un $\varepsilon' > 0$ quelconque, d'où la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt$ vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.

4. Pour $f(t) = |\sin t|$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin nt|\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} |\sin u|\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin u|\,du = 2\int_0^{\pi/2} \sin u\,du = 2$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin nt|\,\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$

   Pour $f(t) = \sin^2 t$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 t\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2u}{2}\,du = \frac{\pi}{2}$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 t\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du\right)$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGE DE l'EPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

I. Exercice

1. La série $\left|\sum_{n\geq 1} a_n z_0^n\right|$ converge par hypothèse. De plus, $\sup_{z\in\mathcal{B}(0;|z_0|)}\left\{\sum_{n\geq 1}|a_n||z|^n\right\}$ est convergente car $r=|z_0|$ est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$. Donc, comme $\left|\sum_{n\geq 1} a_n z^n\right| \leq \sum_{n\geq 1}|a_n||z|^n$, finalement, la série est uniformément convergente sur toute la boule de centre 0 et de rayon $|z_0|$.

2. (a) Soit $a_n = \frac{x^n}{n}$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = |x||\frac{n}{n+1}|$. Or $|x||\frac{n}{n+1}| \leq |x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi d'après le critère de d'Alembert, cette série converge dés que $x| < 1$. La borne supérieure de cet ensemble est par définition r, le rayon de convergence de la série, donc $r = 1$.
   (b) $ln(x+1)$.
   (c) Cette série converge en tant que série alternée de Rieman dont le terme général tend vers 0.
   (d) La série converge sur $[0;1[$ car $r=1$, et la série converge en $x=1$; d'après la question 1, la série converge donc uniformément sur $[0,1]$.
   (e) La fonction $x \mapsto ln(x+1)$ est continue sur tout $]-1,+\infty$. La série est égale à $ln(x+1)$ sur $[0,1[$, et est uniformément convergente sur $[0,1]$, elle est donc continue sur $[0;1]$.
   (f) Calculer

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \sum_{n\geq 1}\lim_{x\to 1} x^n\frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= \lim_{x\to 1}\sum_{n\geq 1} x^n\frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ par convergence uniforme} \\
&= \lim_{x\to 1, x<1}\sum_{n\geq 1} x^n\frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ par continuité de la série en x=1} \\
&= \lim_{x\to 1, x<1} ln(x+1) \text{ d'après la question b)} \\
&= \lim_{x\to 1} ln(x+1) = ln(2) \text{ par continuité de la fonction} x \mapsto ln(x+1).
\end{aligned}$$

(g) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n}$ a un rayon de convergence égal à $r = 1$ (même méthode que la série précédente). Sur $[0;1[$, cette série est égale à $x - arctg(x)$. Cette fonction est continue, et comme la série converge (comme série alternée de Riemann) sur $[0;1]$, elle est continue sur $[0;1]$. Ainsi

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1} x - arctg(x) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

II. Problème

Estimation de l'erreur dans l'approximation des intégrales par la méthode de Poncelet.

Méthode 1

- **A. Question préliminaire**

  1. (a) On applique deux fois successivement le théorème de Rolle, une fois sur $[0,1]$ aboutissant à l'existence d'un réel $\eta \in [0,1]$, annulant la fonction G, et la seconde fois sur $[0,\eta]$ aboutissant à l'existence du réel θ demandé.
     (b) On applique le théorème des accroissements finis.
  2. On pose $g(t) = h(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})$. Comme $h \in C^2([a;b]))$ avec $a < b$, on a $g \in C^2([0,1])$. En appliquant le **A.**1.(b) et le changement de variable $u = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$, on obtient le résultat demandé.

- **B. Application**

  1. Il s'agit d'une série de Riemann lorsque l'intervalle $[0;1]$ est découpé en intervalle de longueur $1/n$ en démarrant en $1/(2n)$. L'application f étant continue sur $[0;1]$ cette série converge vers une limite l égale à $\int_0^1 f(x)dx$.
  2. $$\begin{aligned} |S_n - l| &= |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \int_0^1 f(x)dx| \\ &= |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx| \\ &= |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \frac{1}{n^3 24}f''(\varepsilon_k))| \quad \text{avec } \varepsilon_k \in [k/n;(k+1)/n] \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^3} \end{aligned}$$

     où $\|f''\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f''(x)|$.
  3. $$\begin{aligned} l - S_n &= \int_0^1 x^2dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{2n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=0}^{n-1}k^2 + \sum_{k=0}^{n-1}k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}1\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $f''(x) = 2$ ainsi $\|f''\|_\infty \leq 2$ et la borne (1) vaut $\frac{1}{12n^2}$. La borne (1) est donc optimale.

Méthode 2

1. Soit f affine, c'est à dire qu'il existe a et b deux réels tels que $f(x) = ax + b$, pour tout x réel. On a alors (après calculs)

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a\frac{2k+1}{2n} + b) - \int_0^1 ax + bdx \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Il s'agit simplement du développement de Taylor avec reste intégral.

3.

$$\begin{aligned} R_n(f) &= R_n(f(0) + xf'(0)) + R_n(\int_0^1 \varphi_t(x)f''(t)dt) \text{ car } R_n \text{ est linéaire} \\ &= 0 + \int_0^1 (\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_t(\frac{2k+1}{2n}) - \int_0^1 \varphi_t(x)dx)f''(t)dt \\ &= \int_0^1 R_n(\varphi_t)f''(t)dt. \end{aligned}$$

4. (a) $K_n(t)$ est un polynôme de degré 3 par dérivables par morceaux.

   (b)
$$\int_0^1 |K_n(t)|dt = \frac{1}{24n^2}.$$

   (c)

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= |\int_0^1 R_n(\varphi_t)f''(t)dt)| \\ &\leq \int_0^1 |R_n(\varphi_t)||f''(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |K_n(t)||f''(t)|dt \\ &\leq \sup||f''||\int_0^1 |K_n(t)|dt = \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}. \end{aligned}$$