ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Le développement durable a été défini en 1987 par Mme Brundtland, Premier Ministre norvégien, comme «*un développement qui répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs.»*

Selon vous, quelles sont les conditions nécessaires à cet équilibre, en Afrique notamment ?

Sujet n° 2

«Une éthique des sciences est-elle nécessaire ?»

Argumentez avec des exemples.

Sujet n° 3

«*Ceux qui ne peuvent pas se souvenir du passé sont condamnés à le répéter*.» (George Santayana, «La Vie de la Raison»)

Quelles réflexions vous inspire cette phrase ? Vous pouvez envisager votre réflexion du point de vue de l'histoire collective mais aussi individuelle.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour n entier ≥ 1, On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp.$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

Si $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A \leq B$ (resp. $A < B$.) si pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ (resp. $a_{i,j} < b_{i,j}$). A est positive (resp. strictement positive) si $A \geq [0]$ (resp $A > [0]$),[0] désigne la matrice nulle.

Un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est dit positif (resp. strictement positif) si ses coordonnées sont positives (resp. strictement positives).

Une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite sous-multiplicative si

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Partie I

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme : $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto ||x|| = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

1. Montrer que $||\ \ ||_\infty \quad : \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$||A||_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

est une norme.

2. Si $A = (a_{i,j})$, vérifier que

$$||A||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

3. Montrer que la norme $||\ \ ||_\infty$ est sous-multiplicative.

Partie II

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $|A| = (|a_{i,j}|)$ et $|x| = (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$.

1. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$, alors $|A + B| \leq |A| + |B|$, $|AB| \leq |A||B|$ et $|Ax| \leq |A||x|$.

2. Montrer que si A est une matrice strictement positive et x un vecteur positif non nul alors Ax est un vecteur strictement positif.

3. Montrer que si A est une matrice positive et x un vecteur strictement positif alors $Ax = 0$ implique A=0.

4. Montrer que si deux complexes z, z' vérifient $|z + z'| = |z| + |z'|$, alors il existe un réel λ tel que $z' = \lambda z$.

5. En déduire que si $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^n$ sont n nombres complexes ($n \geq 2$) tels que
$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \ \ \forall\ k \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad z_k = e^{i\theta}|z_k|$$

6. Soit A une matrice strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$|Ax| = |A||x| \Longrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad x = e^{i\theta}|x|.$$

Partie III

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $||\ \ ||$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, on appelle rayon spectral le nombre $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible, $T = (t_{i,j})$ une matrice triangulaire semblable à la matrice A et λ une valeur propre de la matrice A.

1. Déterminer le rayon spectral de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 \neq c^2$.
2. Montrer qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AX = \lambda X$.
3. En déduire que $\rho(A) \leq ||A||$.
4. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.
5. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$. En déduire que $\rho(A) \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$.
6. Montrer que l'application $N : A \mapsto ||S^{-1}AS||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Soit $\varepsilon > 0$ et $\triangle = (\triangle_{i,j})$ la matrice donnée par

$$\triangle_{i,j} = 0, \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \triangle_{i,i} = d^{i-1}, 1 \leq i \leq n, \quad \text{où} \ \ d > 0.$$

Calculer $\triangle^{-1}T\triangle$, En déduire qu'il existe une norme sous-multiplicative N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

8. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} A^k = 0$.
9. En déduire que $\rho(A) = \lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}}$ (considérer la matrice $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$).

Partie IV

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive.

On note $\mathcal{S}_+ = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}/x \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.

1. Montrer que l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}/\exists X \in \mathcal{S}_+, AX \geq \lambda X\}$$

est majoré et que sa borne supérieure λ_0 est une valeur propre réelle de A associée à un vecteur propre X strictement positif.

2. Si $\lambda \neq \lambda_0$ est une autre valeur propre de A, montrer que $|\lambda| < \lambda_0$.

3. Montrer que le sous espace propre E_{λ_0} de A associé à la valeur propre λ_0 est de dimension 1.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit A la matrice d'une application linéaire de R^n dans R^n.

1. Montrer que l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A)$ est $Ker(A^{'})$, où $\mathrm{Im}(A)$ désigne l'image de A et $Ker(A^{'})$ le noyau de la transposée $A^{'}$ de A.

2. Montrer que le problème de minimisation suivant $\underset{v\in R^n}{Min}\left\|Av-b\right\|^2$ admet au moins une solution que l'on notera u_0, où $b \in R^n$.

3. Montrer que si u_1 est une autre solution du problème précédent de minimisation, alors $Au_1 = Au_0$.

4. Résoudre le problème posé de minimisation dans le cas où le rang de la matrice A est égal à *n*.

Exercice n° 2

Soit f une fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$, convexe, croissante et non constante. Etudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 3

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la fonction numérique f définie sur R^2 par $f(x,y) = x^n + y^n - nxy$.

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f et préciser leur nombre (on discutera selon la parité de n).
2. Dans toute la suite de cet exercice, on suppose $n = 4$. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur le disque $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$.
3. Calculer la valeur minimale de f sur D.
4. Vérifier l'inégalité $f(x,y) \leq 16 - 2x^2y^2 - 4xy$ pour tout couple (x,y) appartenant à D. En déduire la valeur maximale de f sur D.

Exercice n° 4

1. Soit f une fonction numérique de classe C^1 telle que $f(0) = f^{'}(0) = 0$ et vérifiant : $\exists a \in R^* / f(a) = 0.$ Montrer qu'il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M au graphe de f passe par l'origine.
2. Soit g une fonction numérique deux fois dérivables sur un intervalle $[a,b]$ telle que $g(a) = g(b) \geq 0$ et $g^{''}(x) \leq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Montrer que pour tout x de $[a,b]$ on a $g(x) \geq 0$.

Exercice n° 5

1. Développer en série entière $\ln(1-x)$ pour $0<|x|<1$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.
2. Calculer le réel $a=\sum_{n\geq 3}\frac{1}{2^n(n+1)(n-2)}$ (on pourra utiliser la fonction $S(x)=\sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{(n+1)(n-2)}$).

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique continue sur R, périodique de période T.

1. Montrer que $\int_a^b f(nt)\,dt$ converge vers $\frac{(b-a)}{T}\int_0^T f(u)\,du$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour toute fonction en escalier φ sur R, nulle en dehors d'un intervalle borné, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\,\varphi(t)\,dt=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,du\right)$$

3. En déduire que le résultat ci-dessus reste vrai pour toute fonction continue sur un intervalle borné.

4. Expliciter le résultat précédent pour $f(t)=|\sin t|$ et $f(t)=\sin^2 t$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous résumerez en 200 mots l'article suivant « Bataille pour la survie du coton africain » de Tom Amadou Seck paru dans *Le Monde Diplomatique* de décembre 2005.

N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

BATAILLE POUR LA SURVIE DU COTON AFRICAIN

En Afrique de l'Ouest, 15 à 20 millions de personnes vivent directement ou indirectement du coton[1]. En raison de sa bonne qualité, il constitue l'un des rares secteurs où le continent noir demeure compétitif. Dès 2001, quatre pays du Sahel parmi les plus pauvres de la planète (Tchad, Burkina Faso, Mali, Bénin) ont donc demandé à l'Organisation Mondiale du Commerce (OMC) la suppression des subventions massives que les Etats-Unis et l'Union Européenne accordent à leurs producteurs[2]. Ils rappellent que les bailleurs de fonds internationaux leur imposent la plus stricte orthodoxie économique (privatisation des compagnies cotonnières, ouverture des marchés)[3], et ils demandent en contrepartie la fin des pratiques déloyales des pays industrialisés. Fruit de trois ans de travail entre producteurs, industriels et organisations non-gouvernementales (ONG)[4], cette initiative a été l'une des causes de l'échec de la conférence ministérielle de l'OMC de Cancún (Mexique) en septembre 2003[5].

---

[1] Les principaux pays concernés sont le Mali, le Bénin, le Burkina Faso, le Tchad, le Cameroun, le Niger, le Togo, le Sénégal, la Centrafrique, la Guinée-Bissau, la Côte d'Ivoire, Madagascar.

[2] Lire Denis Pesche et Kako Nubukpo, « L'Afrique du coton à Cancún : les acteurs d'une négociation », *Politique Africaine*, n° 158, octobre 2004.

[3] Lire André Linard, « Le coton africain sinistré », *Le Monde Diplomatique*, septembre 2003.

[4] « L'or blanc devient poussière. Quelle voie pour le coton en Afrique de l'Ouest ? », document de synthèse n° 58, Oxfan-ENDA, Dakar, avril 2004.

[5] En 2003, le Bénin et le Burkina ont soutenu la plainte déposée par le Brésil – quatrième exportateur mondial – contre les subventions agricoles américaines, devant l'Organe de règlement des différends (ORD) de l'OMC, qui a abouti à la condamnation des Etats-Unis.

Première anomalie, qui affecte le marché du coton, comme d'ailleurs ceux de l'ensemble des produits de base : ce ne sont pas les plus gros producteurs mais les premiers exportateurs qui déterminent les cours mondiaux. La Chine, plus gros producteur de coton, est aussi le premier consommateur : elle importe plus de 60 % de la production de la zone franc africaine. Deuxième producteur, devant l'Inde et le Pakistan, les Etats-Unis sont, et de loin, les premiers exportateurs, avec 37 % du marché. Les producteurs africains représentent 3,6 % de la production mais 17 % des exportations mondiales. Pour autant ce sont les exportations américaines qui définissent les cours mondiaux, et non celles des principaux producteurs.

Deuxième anomalie : la production américaine se trouve artificiellement dopée par l'intervention du gouvernement fédéral, sous forme d'aides directes aux producteurs (3,5 milliards de dollars) et de subventions aux exportations (1,5 milliard de dollars), qui représentent près de 50 % des subventions mondiales au coton. Les aides des Etats-Unis et, dans une moindre mesure, celles de l'Union Européenne aux producteurs espagnols et grecs alimentent une surproduction mondiale provoquant une chute des cours. En 2005, le prix mondial est tombé au-dessous de 55 cents (40 centimes d'euro) la livre. A 65 cents la livre, les producteurs africains ne dégagent déjà plus de bénéfices. Au dessous, ils produisent à perte, et devront réduire les surfaces cultivées en 2005-2006.

Pour le continent noir, les dégâts dépassent le secteur cotonnier. Durant les bonnes années, en effet, les groupements de producteurs réinvestissent les revenus de « l'or blanc » : réfection des pistes, construction d'écoles ou de dispensaires. La fibre constitue ainsi la première exportation du Burkina Faso et du Mali.

Les subventions américaines représentent trois fois le total de l'aide publique au développement des Etats-Unis au continent noir. En 2004, le Mali a perdu 43 millions de dollars en recettes d'exportation, alors que le soutien financier que lui apporte Washington s'élève à 38 millions de dollars. A la baisse des cours du coton s'ajoute la hausse des prix du carburant, qui renchérit d'autant les coûts de production, notamment dans les pays enclavés comme le Burkina, le Mali et le Tchad.

Au long des années 1990, les producteurs de coton africains ont effectué de considérables efforts pour s'adapter aux exigences du marché mondial. Sous la pression des bailleurs de fonds, en premier lieu la Banque mondiale, ils ont dû enclencher la privatisation des sociétés de collecte, telle la Compagnie malienne de développement des textiles (CMDT), qui leur garantissait des prix planchers, la fourniture d'intrants et l'achat de matériel[6]. Ce processus a profondément désorganisé les filières et fragilisé les paysans. Les producteurs ont dû se regrouper : au Burkina, ils ont obtenu de siéger au conseil d'administration de la Sofitex, l'entreprise publique reprise par le groupe français Dagris. L'Union nationale des producteurs de coton du Burkina Faso (UNPCB) et son responsable, M. François Traoré, ont mobilisé d'autres organisations de producteurs – au Bénin, au Mali, au Sénégal, au Cameroun, à Madagascar – et donné naissance à une organisation continentale : l'Association des producteurs de coton africain (Aproca).

[6] Voir notre supplément « Le coton, atout de l'Afrique rurale », *Le Monde Diplomatique,* mai 1999.

L'Aproca a réussi à s'attirer les bonnes grâces de l'Association cotonnière africaine (ACA), qui regroupe les principales sociétés cotonnières de la sous-région. Mieux, elle a mis en place une « cyberpétition » contre les subventions agricoles du Nord, qui a recueilli 250 000 signatures. Mais de nombreux dirigeants politiques africains redoutent des représailles de Washington dans le cadre de l'African Growth and Opportunity Act (AGOA)[7].

Les pays africains souhaitent dissocier le dossier coton de celui de l'agriculture en général, compte tenu du rôle vital de la fibre dans leurs économies. Ils réclament des mesures compensatoires, notamment la mise en place d'un fonds d'urgence d'appui à la production cotonnière. Ils attendent aussi des progrès de la recherche agronomique pour lutter contre la stagnation des rendements, et ils veulent pouvoir discuter de l'introduction des organismes génétiquement modifiés (OGM), que les Etats-Unis tentent d'imposer dans leurs rapports bilatéraux avec les pays du continent.

L'Alliance Sud-Sud apparue à Cancún avec la création du G21[8] n'est pas sans contradictions. Sur la question agricole, en effet, une victoire du Brésil pourrait se révéler être celle de *l'agro-business* au détriment de l'agriculture familiale des paysans africains. Selon le fonds international pour le développement de l'agriculture (FIDA) des Nations unies, l'agriculture familiale demeure le moteur de la croissance et de la productivité pour la production vivrière. C'est elle qui contribue à la sécurité alimentaire et à la lutte contre la famine et la pauvreté, tout particulièrement en Afrique subsaharienne.

Tom Amadou Seck
Le Monde Diplomatique, décembre 2005

[7] Loi votée en mai 2000 par le Congrès américain, et qui établit un règlement concernant les relations économiques et commerciales entre les Etats-Unis et 48 pays africains (excepté le Maghreb) ; www.agoa.gov

[8] Afrique du Sud, Argentine, Bolivie, Brésil, Chili, Chine, Colombie, Costa Rica, Cuba, Egypte, Equateur, Guatemala, Inde, Mexique, Pakistan, Paraguay, Pérou, Philippines, Salvador, Thaïlande, Venezuela. Lire Hugo Ruiz-Diaz, « Une tribune pour les pays du Sud », *Le Monde Diplomatique*, septembre 2005.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

I. Exercice

Soit z un nombre complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On dit que $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ est le rayon de la série $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ si r est la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels positifs R tels que pour tout $|z| \leq R$, la série est absolument convergente où $|\ .\ |$ désigne le module d'un nombre complexe.

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série de rayon r fini. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, tel que $|z_0| = r$. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} a_n z_0^n$ est convergente, alors $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ est uniformément convergente sur $[0, z_0]$.
2. Soit une réel x. On considère la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$
   (a) Quel est son rayon ?
   (b) Que vaut cette série pour tout $x \in]-1, 1[$?
   (c) Quel est le comportement de cette série pour $x = 1$?
   (d) Quel est le comportement de cette série sur $[0, 1]$?
   (e) Que dire de la régularité de la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ lorsque $x \in [0, 1]$?
   (f) Calculer
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(g) Déterminer de la même manière la valeur de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}.$$

II. Problème

Estimation de l'erreur dans l'approximation des intégrales par la méthode de Poncelet.

Méthode 1

- **A. Question préliminaire**

1. Soit g une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[-1;1]$. Soit l'application G de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0;1], \quad G(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0) - Kx^3$$

où K est une constante que l'on choisira de telle sorte que $G(1) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un réel $\theta \in]0;1[$ tel que

$$K = \frac{g'(\theta) - g'(-\theta)}{6\theta}.$$

(*on pensera à utiliser le théorème de Rolle*)

(b) En déduire qu'il existe un réel $\eta \in]-1;1[$ tel que $K = \frac{1}{3}g''(\eta)$.

2. Montrer à l'aide du **A.**1.(b) que si h est une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ $(a < b)$, alors il existe un réel $\xi \in]a;b[$ tel que

$$\int_a^b h(t)dt = (b-a)h\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}h''(\xi).$$

- **B. Application**

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0;1]$. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right).$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$. Donner une expression de sa limite l.

2. Montrer que

$$|S_n - l| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}, \tag{1}$$

où $\|f''\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f''(x)|$.

3. Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $l - S_n = \dfrac{1}{12n^2}$. En déduire que la borne (1) de $|S_n - l|$ est optimale (c'est-à-dire du même degré en $\dfrac{1}{n}$).

Méthode 2

Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[0;1]$. On pose

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \int_0^1 f(x)dx.$$

1. Montrer que si l'application f est affine, alors $R_n(f) = 0$.
2. Montrer que si l'application f est deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[0;1]$, alors pour tout $x \in]0;1[$
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^1 \varphi_t(x) f''(t)dt,$$
où $\varphi_t(x) = \sup(0; x-t)$.
3. Montrer que si f est deux fois continûment dérivable sur $[0;1]$,
$$R_n(f) = \int_0^1 R_n(\varphi_t) f''(t)dt.$$
4. On définit maintenant le noyau de Péano par $K_n(t) = R_n(\varphi_t)$.
   (a) Décrire $K_n(t)$.
   (b) Montrer que
   $$\int_0^1 |K_n(t)|dt = \frac{1}{24n^2}.$$
   (c) En déduire que si f est deux fois dérivable sur $[0;1]$, alors
   $$|R_n(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2}.$$