AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice :

1. Déterminons le rang de (u,v,w) : $\left|\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 0 & :u \\ 0 & -1 & 2 & :w \\ 1 & 0 & 1 & :v \end{array}\right. \left|\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 0 & :u \\ 0 & -1 & 2 & :w \\ 0 & 0 & -1 & :v-u-w \end{array}\right.$.

   Le rang de (u,v,w) est 3, donc (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $f(u) = u$, $f(v) = 8u - 6v + 4w$, et $f(w) = 16u - 16v + 11w$; la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^\star = (u,v,w)$ est donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 0 & -6 & -16 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2})(\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2})$. Il a donc 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$. En effectuant la division Euclidienne de X^n par $\mathcal{P}(X)$, on obtient

   $$X^n = \mathcal{P}(X)Q(X) + R(X), \tag{1}$$

   où $R(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur au degré du polynôme $\mathcal{P}$ c'est à dire de degré strictement inférieur à 3. Notons a, b, c les coefficients réels de $R(X)$ i.e. $R(X) = aX^2 + bX + c$.

   D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de la matrice A. En remplaçant X par A dans (1), on obtient

   $$A^n = R(A) = aA^2 + bA + c = a\begin{pmatrix} 7 & -6 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ -10 & 10 & 22 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + c.$$

   Déterminer A^n revient alors à déterminer les réels a, b et c. Les valeurs propres annulant le polynôme caractéristique, il vient que a, b et c sont les solutions du système à trois équations suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a+b+c \\ \lambda_2^n & = & a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c \\ \lambda_3^n & = & a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{-\lambda_2+\lambda_2^n+\lambda_3-\lambda_2^n\lambda_3-\lambda_3^n+\lambda_2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(-1+\lambda_3)} \\ b & = & \frac{\lambda_2^2-\lambda_2^n-\lambda_3^2+\lambda_2^n\lambda_3^2+\lambda_3^n-\lambda_2^2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_2)(-1+\lambda_3)(-\lambda_2+\lambda_3)} \\ c & = & \frac{\lambda_2^2\lambda_3-\lambda_2^n\lambda_3-\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_2^n\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_3^n-\lambda_2^2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_3)(-\lambda_2+\lambda_2^2+\lambda_3-\lambda_2\lambda_3)} \end{array}\right.$

Problème : Soient N et M deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit p un réel de $]0,1[$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1,\ 0 \leq y \leq M-1\} \\
F_1 &= \{(x,M) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1\} \\
F_2 &= \{(N,y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq y \leq M-1\} \\
F &= F_1 \cup F_2 \cup \{(N,M)\} \\
\overline{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \cup F
\end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (l,k) \in \mathcal{R},\ f(l,k) = pf(l+1,k) + (1-p)f(l,k+1). \tag{2}$$

I. Résultat préliminaire et Matrices Nilpotentes.

A. Résultat préliminaire

Résultat : Soients r et s deux entiers donnés ($r \geq 1$ et $s \geq 0$), il existe un unique couple de polynômes (U,V) de l'indéterminée x vérifiant les propriétés suivantes:

i)Le polynôme U est de degré strictement inférieur à r

ii) U et V satisfont la relation $(1-x)^{s+1}U + x^r V = 1$.

De plus les polynômes U et V sont définis par

$$U = \sum_{l=s}^{s+r-1} C_l^s x^{l-s} = \sum_{l=0}^{r-1} C_{l+s}^s x^l \tag{3}$$

$$V = \sum_{l=0}^{s} C_{r-1+l}^{r-1} (1-x)^l \tag{4}$$

B. Matrices Nilpotentes.

1. Soit λ une valeur propre de A et soit u un vecteur propre associé à λ, alors on a

$$A.u = \lambda u \ \Rightarrow\ A^r.u = \lambda^r u, \text{ comme } A^r = 0 \text{ on obtient } \lambda = 0.$$

Par définition $\mathcal{P}_A$, le polynôme caractéristique de A s'écrit $\mathcal{P}_A(x) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - x)^{\alpha_i}$, si $(\lambda_i)_{\{1 \leq i \leq p\}}$ désigne l'ensemble des valeurs propres distinctes de A et α_i désigne l'ordre de multipicité de λ_i.
Ici toutes les valeurs de A étant nulles, on a $\mathcal{P}_A(x) = (-1)^d x^d$.
A annulant son polynôme caractéristique, on a $\mathcal{P}_A(A) = 0$, ce qui signifie que $A^d = 0$; comme r est l'ordre de nilpotence de A, on a $r \leq d$.

2. Comme $A^r = 0$, $b = (I_d, A, A^2, \ldots, A^{r-1})$ est un système générateur de $\{A^k,\ k \geq 0\}$.

   Montrons que $b = (I_d, A, A^2, \ldots, A^{r-1})$ est libre. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{r-1} \mu_n A^n = 0$. On note $P = \{n \in \mathbb{N}\ :\ 0 \leq n < r\ :\ \mu_n \neq 0\}$ et on suppose que $P \neq \emptyset$. Soit $n_0 = \inf P$, en multipliant les deux membres de l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{r-1} \mu_n A^n = 0$ par A^{r-1-n_0}, on obtiendrait que $\mu_{n_0} A^{r-1} = 0$ ce qui est impossible.

3. Soit s un entier naturel.

   a. $(I_d - A)^{s+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{s+1} C_{s+1}^n (-1)^n A^n = \sum_{n=0}^{min(s+1,r-1)} C_{s+1}^n (-1)^n A^n$. On a alors que $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$ et ses coordonnées dans la base b sont $(C_{s+1}^n (-1)^n)_{\{0 \leq n \leq min(s+1,r-1)\}}$.

   b. Le résultat préliminaire appliqué à l'indéterminée A assure l'existence et l'unicité d'un couple de polynômes (U, V) tels que

   $$(I_d - A)^{s+1} U + A^r V = I_d \quad \Rightarrow \quad (I_d - A)^{s+1} U = I_d.$$

   Cela implique que $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible d'inverse $U(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} C_{k+s}^s A^k$.

4. **Exemple. a.** Pour $k = 2$, on a que

   $$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2,\ J_d^2(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On peut montrer par récurrence que pour $k \geq 2$

   $$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2,\ J_d^k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Or $j - i \leq d - 1$ par conséquent dès que $k \geq d$, la matrice J_d^k est nulle. L'ordre de nilpotence de la matrice J_d est d.

   b. D'après la question I.**B.**3, pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} C_{k+s}^s \lambda^k J_d^k$.

   En utilisant l'expression des matrices J_d^k, pour $0 \leq k \leq d-1$, les éléments de la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$ sont

   $$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2,\ (I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}(i,j) = \begin{cases} C_{k+s}^s \lambda^k & \text{si} \quad j - i = k,\ 0 \leq k \leq d-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II. Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (2).

A. Etude de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\overline{\mathcal{R}}$ vérifiant (2).

1. $\mathcal{E}$ est non vide car l'application nulle appartient à $\mathcal{E}$. On vérifie facilement que $\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $\forall (\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2$, $\mu f + \nu g \in \mathcal{E}$.
2. **a.** Le terme général de $C_k(f)$ est le réel $f(l,k)$ $(0 \leq l \leq N)$, qui est déterminé de manière unique par $f(l+1,k)$ et $f(l,k+1)$ (Equation (2)). Or $f(l,k+1)$ appartient à la matrice $C_{k+1}(f)$. Donc $f(N,k)$ et $C_{k+1}(f)$ déterminent $f(N-1,k)$, puis successivement $f(N-2,k), f(N-3,k), \ldots, f(0,k)$ de manière unique.

   b. Tout élément f de $\mathcal{E}$ est par conséquent déterminé de manière unique par la dernière colonne $C_M(f)$ de la matrice $M(f)$ et par les éléments $\{f(N,k),\ 0 \leq k \leq M-1\}$ donc par les ensembles $\{f(l,M); 0 \leq l \leq N\}$ et $\{f(N,k); 0 \leq k \leq M-1\}$.

3. Tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par sa restriction à l'ensemble F donc par les éléments $\{f(N,k) = \mu_k,\ 0 \leq k \leq M-1\}$, $\{f(l,M) = \eta_l,\ 0 \leq l \leq N-1\}$ et $f(N,M) = \nu$. Les fonctions f de $\mathcal{E}$ et $\sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \phi_l + \nu\xi + \sum_{k=0}^{M-1} \mu_k \psi_k$ coincident alors sur F donc sur $\overline{\mathcal{R}}$. $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{N-1}, \xi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{M-1}\}$ engendre $\mathcal{E}$. Montrons que c'est un système libre. Si $\sum_{l=0}^{N-1} \eta_l \phi_l + \nu\xi + \sum_{k=0}^{M-1} \mu_k \psi_k = 0$, la valeur de la fonction en (l,M), $\quad (0 \leq l \leq N-1)$ est égale à η_l, donc $\eta_l = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1)$, de même pour $\mu_k = 0 \quad (0 \leq k \leq M-1)$ et $\nu = 0$ en utilisant les valeurs en (N,k) pour $0 \leq k \leq M-1$ et en (N,M).
4. On a $C_M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ et $L_N(\xi) = (0,0,\ldots,1)$.

$$\xi(l,M) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1), \quad \xi(N,M) = 1, \quad \xi(N,k) = 0 \quad (0 \leq k \leq M-1).$$

   Or ξ vérifie l'équation (2), on en déduit que $\xi(N-1,M-1) = p\xi(N,M-1) + (1-p)\xi(N-1,M) = 0$, donc $\xi(l,M-1) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1)$, et de proche en proche $\xi(l,k) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1,\ 0 \leq k \leq M-1)$. $M(\xi)$ est donc une matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme $\xi(N,M) = 1$.

B. Calcul des fonctions ϕ_i et ψ_j.

1. On note $C_k(\phi_i)(h)$ la h-ième composante de la matrice colonne $C_k(\phi_i)$ $(0 \leq h \leq N+1)$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k < M$ et pour tout entier l tel que $0 \leq l \leq N$, la matrice $(I_{N+1} - pJ_{N+1})C_k(\phi_i)$ est une matrice colonne à $(N+1)$ lignes dont le terme général

$$\begin{aligned}
\tau_l &= \sum_{h=0}^{N} (I_{N+1}(l,h) - pJ_{N+1}(l,h))C_k(\phi_i)(h) \\
&= C_k(\phi_i)(l) - pC_k(\phi_i)(l+1) \\
&= \phi_i(l-1,k) - p\phi_i(l,k) \\
&= (1-p)\phi_i(l,k+1) \ \text{ d'après l'équation (2).}
\end{aligned}$$

τ_l est donc la terme général de $(1-p)C_{k+1}(\phi_i)$.
Un calcul analogue donne $pL_{l+1}(\psi_j) = L_l(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)$.

2. Le terme général de $C_M(\phi_i)$ est $\phi_i(l, M)$ égal à 1 si $i = l$ et 0 sinon, pour tout l tel que $0 \leq l \leq N$. D'après la question précédente, on a $C_k(\phi_i) = (1-p) \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-1} \ C_{k+1}(\phi_i)$. En itérant la formule, on obtient $C_k(\phi_i) = (1-p)^{M-k}(I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)} \ C_M(\phi_i)$. Le terme général de $C_k(\phi_i)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\phi_i(l,k) &= (1-p)^{M-k} \sum_{h=0}^{N} \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}(l,h) \ \phi_i(h,M) \\
&= (1-p)^{M-k} \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}(l,i) \\
&= (1-p)^{M-k}(\sum_{h=0}^{N} \ C_{M-k-1+h}^{M-k-1} \ p^h \ J_{N+1}^h(l,i))
\end{aligned}$$

D'où,

$$\phi_i(l,k) = \begin{cases} (1-p)^{M-k} C_{M-k-1+h}^{M-k-1} \ p^h & \text{si } i - l = h \text{ et } h \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le terme général de $L_N(\psi_j)$ est $\psi_j(N,k)$ égal à 1 si $k = j$ et 0 sinon, pour tout k tel que $0 \leq k \leq M$. D'après la question précédente, on a $L_l(\psi_j) = pL_{l+1}(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-1}$. En itérant la formule, on obtient $L_l(\psi_j) = p^{N-l} L_N(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}$. Le terme général de $L_l(\psi_j)$(matrice ligne) s'écrit

$$\begin{aligned}
\psi_j(l,k) &= p^{N-l} \sum_{h=0}^{M} \psi_j(N,h) \ (I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}(h,k) \\
&= p^{N-l} \ (I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}(j,k) \\
&= p^{N-l} \ \sum_{h=0}^{N} \ C_{N-l-1+h}^{N-l-1} \ (1-p)^h \ ((J_{M+1})^t)^h(j,k).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\psi_j(l,k) = \begin{cases} p^{N-l} \ C_{N-l-1+h}^{N-l-1} \ (1-p)^h & \text{si } j - k = h \text{ et } h \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels et R^+ l'ensemble des nombres réels positifs.

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique de classe C^2 définie sur R telle que $f(0)=0$.

Pour tout $x \in R$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\frac{x}{2}f(x)$

1. Comme f est de classe C^2, F est aussi de classe C^2 par opération sur les fonctions de classe C^2. On obtient :
   $F'(x)=f(x)-\frac{1}{2}(f(x)+xf'(x))$ et $F''(x)=-\frac{1}{2}x\,f''(x)$
2. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre 0 et x :

$F(x)=F(0)+xF'(0)+\int_0^x \frac{(x-t)}{2}F''(t)\,dt$. Comme $F(0)=F'(0)=0$, on obtient :

$$F(x)=-\frac{1}{4}\int_0^x t(x-t)f''(t)\,dt$$

Exercice n° 2

1. On a $|y_i|=y_i^+ + y_i^-$. Soit L le lagrangien du problème, à savoir :
   $L=\sum_{i=1}^n |y_i| +\lambda(\sum_{i=1}^n y_i^2-1)$; sa dérivée est $L'=\pm 1+2\lambda\, y_i$. Cette dérivée est nulle pour $y_i=\pm\frac{1}{2\lambda}$. On obtient alors pour la contrainte : $\sum_{i=1}^n y_i^2=n\times\frac{1}{4\lambda^2}=1$, puis $\lambda=\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$ et $y_i=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Le maximum est donc égal à : $\sum_{i=1}^n |y_i|=\sqrt{n}$.

On peut aussi remarquer qu'il s'agit du maximum d'une fonction linéaire sur la sphère unité (cas identique dans R^n et R^2) et que ce maximum est atteint lorsque toutes les valeurs de y_i sont égales, à savoir pour la contrainte $n \times y_i^2 = 1$, d'où $y_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ et le maximum est égal à $\sqrt{n}$.

2. $Min\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i| \;/\; \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 1\right\} \Leftrightarrow Min\left\{\sum_{i=1}^{n}|y_i| \;/\; \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1\right\}$.

Ceci implique que chaque valeur de y_i est en valeur absolue inférieure à 1. Par conséquent $y_i^2 \leq |y_i|$. Le minimum de $\sum_{i=1}^{n}|y_i|$ est donc le même que celui de $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ qui est égal à 1. Ce minimum est atteint en tous les points de la sphère unité.

Exercice n° 3

1. M_3 correspond à une moyenne mobile arithmétique d'ordre 3. On obtient le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_t	4	7	4	10	13	10	16	19	16
$M_3 X_t$	-	5	7	9	11	13	15	17	-

2. Les valeurs de $M_3 X_t$ correspondent à une suite arithmétique de raison 2 d'où $M_3 X_t = 2t + 1$

3. Soit $S_t = X_t - M_3 X_t$. On obtient :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_t	-	2	-3	1	2	-3	1	2	-

S_t est une fonction périodique de période 3, dont la somme sur une période est nulle.

4. L'équation $M_{2p+1}X_t = X_t$ est équivalente, pour $X_t = at+b$, à $a\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right)t+\left(\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right)+b\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right)=at+b$. Cette égalité est vérifiée pour

$\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right)=1$ et $\left(\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right)=0$

5. Pour $X_t = at^2+bt+c$, l'équation $M_{2p+1}X_t = X_t$ est équivalente à

$$a\left(t^2\sum_{i=-p}^{p}\theta_i+2t\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i+\sum_{i=-p}^{p}i^2\theta_i+\right)+b\left(t\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i+\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right)+c\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right)=at^2+bt+c$$

Cette équation est vérifiée pour $\left(\sum_{i=-p}^{p}\theta_i\right)=1$, $\left(\sum_{i=-p}^{p}i\theta_i\right)=0$ et $\left(\sum_{i=-p}^{p}i^2\theta_i\right)=0$

Exercice n° 4

On définit une suite de matrices carrées de la façon suivante :

$H_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $H_k=\begin{pmatrix}H_{k-1} & H_{k-1}\\ H_{k-1} & -H_{k-1}\end{pmatrix}$ pour tout $k\geq 2$.

1. On vérifie que $H_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

2. On a $\det(H_2-\lambda I)=(2-\lambda I)^2(2+\lambda I)^2$ obtenu par combinaison linéaire des colonnes (à la première colonne on ajoute les trois autres, à la deuxième colonne la somme des deux dernières, puis la quatrième à la troisième). On peut aussi procéder de même sur les lignes. Donc –2 et +2 sont des valeurs propres doubles de H_2.

   Soit un vecteur $e=(x,y,z,t)$ vérifiant $H_2e=2e$. Ce système est équivalent aux équations : $x-2y-t=0$ et $y=z$. Le sous espace propre E_2, de dimension 2, associé à la valeur propre 2 est engendré (par exemple) par les vecteurs propres orthogonaux suivants : $e=(1,0,0,1)$ et $e^{'}=(1,1,1,-1)$.

On procède de même pour la valeur propre –2 . Le sous espace propre associé à cette valeur propre vérifie les équations : $2x+2y+z=0$ et $x=-t$, d'où les vecteurs propres $e_{-2}=(0,1,-1,0)$ et $e'_{-2}=(1,-1,-1,-1)$. De plus ces 4 vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

3. On vérifie facilement par récurrence que $Tr(H_k)=0$ pour tout $k\geq 2$

Exercice n° 5

1. Soit $f(x)=\sqrt{x}$. On applique la formule de Taylor à f sur l'intervalle $[a^2,a^2+1]$. Il existe *c* dans cet intervalle ouvert tel que :

$f(a^2+1)=f(a^2)+f'(a^2)+\frac{1}{2}f''(c)$ ou encore $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8c\sqrt{c}}$, d'où

$$\sqrt{a^2+1}-a<\frac{1}{2a}$$

2. De même, on applique la formule de Taylor à l'ordre 3 à f sur l'intervalle $[a^2,a^2+1]$.

$f(a^2+1)=f(a^2)+f'(a^2)+\frac{1}{2}f''(a^2)+\frac{1}{6}f'''(c)$, d'où

$$\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3}<\sqrt{a^2+1}-a$$

On peut aussi démontrer ces deux questions, par multiplication par la quantité conjuguée.

3. D'après la première question, $\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|=\sqrt{a^2+1}-a<\frac{1}{2a}\leq\frac{1}{2}$

On a : $\left|\sqrt{a^2+1}-k\right|=\left|a-k+\sqrt{a^2+1}-a\right|\geq|a-k|-\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|\geq 1-\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|>\frac{1}{2}$,d'où l'inégalité demandée $\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|<\left|\sqrt{a^2+1}-k\right|$

4. Soit $a=25$. D'après les deux premières questions on a :

$$\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3}+a<\sqrt{a^2+1}<a+\frac{1}{2a}$$,d'où $25{,}01<\sqrt{626}<25{,}02$.

25,02 est une valeur approchée de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} près par excès.
D'ailleurs, $\sqrt{626}\approx 25{,}0199920$

5. Notons Q l'ensemble des nombres rationnels et f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+\frac{1}{2a}(1+a^2-x^2)$, on a $f(Q)\subset Q$ car tous les coefficients de f sont rationnels. Le maximum de f est atteint en a et elle est décroissante sur l'intervalle $[a,+\infty]$.

$$f(\left[a,a+\frac{1}{2a}\right])=\left[f(a+\frac{1}{2a}),f(a)\right]=\left[a+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3},a+\frac{1}{2a}\right]\subset\left[a,a+\frac{1}{2a}\right]$$

Soit $\mathrm{X}=\left[\mathrm{a},\mathrm{a}+\frac{1}{2\mathrm{a}}\right]\cap\mathrm{Q}$, on a $f(X)\subset X$. On démontre alors par récurrence que $t_n\in X$. Pour $n=0$, $t_0=a$ qui est un entier. Si $t_n\in X$, alors $t_{n+1}=f(t_n)\in f(X)\subset X$, donc $t_{n+1}\in X$.

6. La suite $(t_n)_{n\in N}$ est bornée (question 5). Notons encore f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+\frac{1}{2a}(1+a^2-x^2)$, sa dérivée est $f'(x)=1-\frac{x}{a}$, d'où le tableau de variation :

x	a $\qquad\qquad$ $a+1/2a$
f'	$\downarrow$
f	$a+1/2a$ $\qquad$ $a+1/2a-1/8a^3$

La fonction f étant décroissante, les suites extraites de $(t_n)_{n\in N}$ d'ordre pair et d'ordre impair sont monotones de sens contraire et comme elles sont bornées, elles sont convergentes vers une même limite l qui vérifie $f(l)=l$ du fait de la continuité de f et de l'unicité de la limite. L'équation $f(l)=l$ est équivalente à $l=l+\frac{1}{2a}(1+a^2-l^2)$, d'où $l=\sqrt{1+a^2}$

Exercice n° 6

1. Soit la fonction numérique d'une variable réelle G définie par $G(t)=f(a+t(x-a))$. On applique le théorème des accroissements finis à G sur l'intervalle $[0,1]$, il existe un point c de cet intervalle ouvert tel que : $G(1)-G(0)=G'(c)$. Comme G est convexe comme composée d'une fonction convexe f et d'une fonction affine, on a : $G'(c)\geq G'(0)$ et $G'(t)=<df(a+t(x-a)),x-a>$ (par composition des différentielles).
On obtient alors :

$$G(1)-G(0)=f(x)-f(a)=G'(c)\geq G'(0)=<df(a),x-a>$$

2. Par hypothèse, on a :

$$\forall a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

et

$$\forall a, x \in A \qquad f(a) - f(x) \geq < df(x), a - x >$$

Par addition des deux lignes, on obtient :

$$\forall a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

3. On effectue une démonstration par l'absurde.

Supposons que $\exists a, x \in A \qquad f(x) - f(a) << df(a), x - a >$

D'après la première question, $f(x) - f(a) = G^{'}(c) = < df(a + c(x - a)), x - a >$

Posons $z = a + c(x - a)$, on obtient : $< df(a) - df(z), a - x > < 0$. On multiplie cette inégalité par *c* (strictement positif) et comme $z - a = c(x - a)$, on a : $< df(a) - df(z), a - z > < 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse :

$$\forall a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

donc

$$\forall a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I :

1. Pour tout $t \geq 0$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > \lambda t\right)$$

La fonction exponentielle est strictement croissante donc,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right) = \mathbb{P}\left(e^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} > e^{\lambda t}\right)$$

La fonction exponentielle est toujours positive, et par l'inégalité de Markov, on obtient le résultat voulu.

2. La loi de $X_1, \cdots, X_n$ étant symétrique on a

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right).$$

3. On utilise les espérances conditionnelles avec la propriété suivante : soient Z et Y deux variables aléatoires, on a $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(YZ|Y))$. De plus les σ_i sont indépendants entre eux et indépendants des X_i, aussi

$$\begin{aligned}
\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n\right).
\end{aligned}$$

4. On exprime la loi des σ_i qui est indépendante de l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$, puis l'inégalité rappelée dans l'énoncé de cette question.

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(e^{\lambda \frac{X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} + e^{\lambda \frac{-X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda^2 \frac{X_i^2}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right)\\
&\leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda^2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right)\\
&\leq \mathbb{E}(e^{\frac{\lambda^2}{2}})\\
&\leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

5. Pour Z une variable aléatoire de loi symétrique, on a toujours pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(|Z| > t) = \mathbb{P}((Z > t) \cup (-Z > t)) = \mathbb{P}(Z > t) + \mathbb{P}(-Z > t) = 2\mathbb{P}(Z > t)$. Ainsi pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right| > t\right) &= 2\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right)\\
&\leq e^{-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

La fonction qui à $\lambda > 0$ associe $-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}$ admet un minimum en $\lambda = \frac{t}{2}$. D'où le résultat voulu.

Problème :

Partie I.

1. (a) La fonction $t \mapsto \tilde{x}(t) + sh(t)$ est une combinaison linéaire de deux fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ elle est donc également une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (b) On a $x(t_i) + sh(t_i) = x_0 + s0 = x_0$ et $x(t_f) + sh(t_f) = x_1 + s0 = x_1$.

   (c) On a par définition de $\tilde{x}$,
   $$\forall s > 0, \quad \Phi(\tilde{x}) \geq \Phi(\tilde{x} + sh)$$

   (d) Pour tout s_0,
   $$g'(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x} + s_0 h)}{s - s_0}.$$
   Pour $s_0 = 0$ on obtient
   $$g'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0}.$$
   Et d'après la question précédente et par continuité de $g'(s)$ on a
   $$\lim_{s \to 0, s > 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0} = \lim_{s \to 0} \frac{\Phi(\tilde{x} + sh) - \Phi(\tilde{x})}{s - 0} \leq 0.$$

2. (a) Par définition de ϕ,
   $$g(s) = \int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt.$$

(b) La fonction qui à s associe $U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))$ est continument dérivable par rapport à s car U est continument dérivable par rapport à chacune de ses variables. Ainsi sur le compact $[t_i, t_f]$ cette dérivée est bornée en tant que combinaison de fonctions continues (dérivée de U par rapport à sa deuxième et troisième variable, h, et dérivée de h) sur un compact. On peut donc intervertir le signe dérivation par rapport à s et le signe intégrale.

(c) D'une part, la dérivée de $U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))$ par rapport à s vaut $\partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h(t) + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h'(t)$.
D'autre part $g'(0) \leq 0$ et $g'(0)$ vaut

$$\begin{aligned}
0 \geq g'(0) &= \frac{d}{ds}\left(\int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt\right)_{s=0} \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{ds}\left(U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))\right)_{s=0} dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h(t) + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h'(t)dt
\end{aligned}$$

(d) On pose une intégration par partie avec $h(t)$ qui a pour dérivée $h'(t)$ et $\partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))$ qui a pour primitive $\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A$ pour A constante quelconque. De plus $h(t_i) = h(t_f) = 0$. Puis on place $h'(t)$ en facteur.

3. Soit $h(t)$ telle que

$$h'(t) = -\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)).$$

Il existe donc B constante telle que

$$h(s) = \int_{t_i}^{s}\left(-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) dt + B.$$

. On choisit A et B tels que $h(t_i) = h(t_f) = 0$. C'est à dire $B = 0$ garantit que $h(t_i) = 0$ et A etlq ue

$$\int_{t_i}^{t_f}\left(-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) dt = 0$$

(a) Comme U est continument dérivable ainsi que x, h est deux fois continument dérivable. De plus une primitive de h peut s'écrire comme

$$h(w) = \int_{t_i}^{w}\left(-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) dw + a.$$

où a est une constante. Par définition de h, on a $h(t_i) = 0$

(b) Avec cette expression pour h' et avec l'expression obtenue précédement, on a maintenant

$$\int_{t_i}^{t_f} (h'(t))^2 dt \leq 0.$$

De plus h' est continue donc, $h'(t) = 0$ pour tout $t \in [t_i, t_f]$.

(c) On exprime $h'(t) = 0$ puis on dérive cette expression par rapport à t.

Partie II.

1. La fonction $y(t)$ étant le nombre de vis fabriquée en tout temps t, $w(s)$ est le nombre de vis fabriquées entre 0 et s.

2. $y(t) = w'(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

3. La vitesse de production est la dérivée du nombre de vis produite. C'est à dire $y(t) = w'(t)$.

4. $w(0) = 0$ et $w(T) = B$ si l'on veut honorer la commande.

5. $S(t) = c_1 w(t)$.

6. $F(t)$ est proportionnelle à la vitesse de production qui est $y(t)$. Le coût de fabrication instantanée vaut donc $y(t)$ nombre de vis produites en tout temps t multiplié par le nombre de vis produites en tout temps t. On a donc $F(t) = c_2 y^2(t)$, avec c_2 constante strictement positive (sinon, le coût de fabrication serait nul).

7. Le coût total instantané $C(t) = S(t) + F(t)$ où encore
$$C(t) = c_1 w(t) + c_2 (w'(t))^2$$

8. Le coût total $\mathcal{C}$ est la somme des coût instantanés. Il vaut
$$\mathcal{C} = \int_0^T c_1 w(t) + c_2 (w'(t))^2 dt$$

9.
   - $\min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2 (w'(t))^2 + c_1 w(t) dt$ représente le plan de production $w(t)$ à respecter afin de minimiser le coût. On impose cependant qu'il doit y avoir une évolution "douce" dans l'évolution de ce plan de production avec l'hypothèse $w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
   - $w(0) = 0$ exprime la condition : il n'y a pas de stock de vis à la date $t = 0$.
   - $w(T) = B$ exprime le fait qu'il faut avoir B vis fabriquées à la date $t = T$.
   - $w(t) > 0$ induit un démarrage de la production dès la date de passage de la commande $t = 0$.
   - $w'(t) \geq 0$ impose qu'il ne peut pas avoir destruction des vis fabriquées.

10. On applique le résultat obtenu dans la partie I équation (3) puisque le minimum de l'intégrale de U est identique au maximum de l'intégrale de $-U$, avec $x = w$, $t_i = 0, t_f = T, x_0 = 0$ et $x_1 = B$. On a donc à résoudre pour tout temps $t \in [0, T]$,
$$c_1 = c_2 w''(t)$$
sous les conditions initiales et finales $w(0) = 0$ et $w(T) = B$. On obtient pour $t \in [0, T]$,
$$w(t) = t\left(\frac{c_1}{4c_2}(t - T) + \frac{B}{T}\right).$$

11. $w(t) > 0$ équivaut à $\frac{c_1}{4c_2}(t - T) + \frac{B}{T} > 0$ où encore $t > T - \frac{4c_2}{c_1}\frac{B}{T}$ ceci pour tout temps $t \in]0, T]$. Ce qui donne encore
$$\frac{4c_2}{c_1} B > T^2$$
La seconde condition $w'(t) \geq 0$ pour $t \in]0, T]$ donne $B \geq \frac{c_1}{4c_2} T^2$. Qui est la même condition. B doit donc être suffisament grand devant la période de temps T disponible pour des constantes de coût de stockage et de fabrication c_1 et c_2 données.

12. Si H_1 n'est pas respectée, il suffit de rendre plus petit le second terme c'est à dire qu'il convient de démarrer la production plus tard et de manière à ce que $\tilde{T}$ respecte $H1$.