ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quelles Interprétations peut-on donner du proverbe peul suivant dans différents contextes (ville ou village, pays, Afrique, monde) ?

«Les hautes herbes peuvent avaler les pintades, mais elles ne peuvent étouffer leurs cris.»

Sujet n° 2

Commentez ce proverbe guinéen qui évoque la prévoyance :

«Ce n'est pas le jour du combat qu'on aiguise sa lance.»

Que veut-il dire ? Expliquez avec des exemples précis.

Sujet n° 3

Que signifie ce proverbe arabe ?

«Les proverbes sont les lampes des mots.»

Expliquez à l'aide d'exemples.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On considère les vecteurs $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 + e_3$ et $w = -e_2 + 2e_3$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Problème

Soient N et M deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit p un réel de $]0, 1[$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le x \le N-1,\ 0 \le y \le M-1\} \\
F_1 &= \{(x, M) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le x \le N-1\} \\
F_2 &= \{(N, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le y \le M-1\} \\
F &= F_1 \cup F_2 \cup \{(N, M)\} \\
\overline{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \cup F
\end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (l, k) \in \mathcal{R},\ f(l, k) = pf(l+1, k) + (1-p)f(l, k+1) \tag{1}$$

Après une étude préliminaire (partie I), nous recherchons (partie II) les éléments de $\mathcal{E}$.

Dans tout le problème, on notera $C_t^q = \frac{t!}{q!(t-q)!}$ le coefficient binomial de paramètres $t \in \mathbb{N}$ et $q \in \{0, \ldots, t\}$.

I. Résultat préliminaire et Matrices nilpotentes.

A. Résultat préliminaire (*ce résultat sera admis*)

Résultat : Soient r et s deux entiers donnés ($r \geq 1$ et $s \geq 0$), il existe un unique couple de polynômes (U, V) de l'indéterminée x vérifiant les propriétés suivantes:

i) Le polynôme U est de degré strictement inférieur à r.

ii) U et V satisfont la relation $(1-x)^{s+1}U + x^r V = 1$.

De plus les polynômes U et V sont définis par

$$U = \sum_{l=s}^{s+r-1} C_l^s x^{l-s} = \sum_{l=0}^{r-1} C_{l+s}^s x^l \qquad (2)$$

$$V = \sum_{l=0}^{s} C_{r-1+l}^{r-1} (1-x)^l \qquad (3)$$

B. Matrices nilpotentes.

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_d$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels, à d lignes et d colonnes. Si A est un élément de $\mathcal{M}_d$ et i, j deux entiers appartenant à $\{1, \dots, d\}$, on note $A(i,j)$ le coefficient de la matrice A se situant sur la i-ième ligne et la j-ième colonne. On appelle I_d la matrice identité de $\mathcal{M}_d$. On pose

$$A^0 = I_d,\ A^1 = A,\ \text{et pour tout entier } k \geq 2, A^k = AA^{k-1}.$$

Une matrice A de $\mathcal{M}_d$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$; le plus petit entier $r \geq 1$ vérifiant $A^r = 0$ est appelé *ordre de nilpotence* de A.

On suppose désormais que A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_d$ nilpotente d'ordre r ($r \geq 1$, r est donné).

1. Montrer que 0 est la seule valeur propre de la matrice A. Donner le polynôme caractéristique de A. En déduire que $r \leq d$.
2. On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d$ engendré par les matrices $\{A^k, k \geq 0\}$. Montrer que $b = (I_d, A, A^2, \dots, A^{r-1})$ est une base de $e(A)$.
3. Soit s un entier naturel.

   a. Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$; donner ses coordonnées dans la base b.

   b. Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible et que sa matrice inverse notée $(I_d - A)^{-(s+1)}$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} C_{s+k}^s\, A^k$.

   Indication : on pourra utiliser le résultat préliminaire appliqué à l'indéterminée A.

4. **Exemple.** On appelle J_d la matrice de $\mathcal{M}_d$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,d\}^2,\ J_d(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Pour $k \geq 2$, calculer la puissance k-ième de J_d. En déduire que J_d est une matrice nilpotente et préciser son ordre de nilpotence.
b. Pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, expliciter la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$, c'est-à-dire expliciter les éléments de la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$.

II. Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (1)

Si f est une fonction définie sur $\overline{\mathcal{R}}$, à valeurs réelles, on note $M(f)$ la matrice à $(N+1)$ lignes et $(M+1)$ colonnes définie par :

$$M(f) = \begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdot & \cdot & \cdot & f(0,M) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdot & \cdot & \cdot & f(1,M) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(N,0) & f(N,1) & \cdot & \cdot & \cdot & f(N,M) \end{pmatrix}$$

Pour k et l entiers vérifiant $0 \leq k \leq M$ et $0 \leq l \leq N$, on désigne par $C_k(f)$ la $(k+1)$-ième colonne de $M(f)$, c'est-à-dire $C_k(f) = \begin{pmatrix} f(0,k) \\ f(1,k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(N,k) \end{pmatrix}$ et par $L_l(f)$ la $(l+1)$-ième ligne de $M(f)$, c'est-à-dire $L_l(f) = (f(l,0), f(l,1), \ldots, f(l,M))$.

A. Etude de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\overline{\mathcal{R}}$ vérifiant (1)

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ et à valeurs réelles.
2. **a.** Soit k un entier vérifiant $0 \leq k \leq M-1$. Si $f \in \mathcal{E}$, montrer que la matrice colonne $C_k(f)$ est déterminée de manière unique par la donnée de la matrice colonne $C_{k+1}(f)$ et du réel $f(N,k)$.
   b. En déduire que tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par la donnée des ensembles $\{f(l,M); 0 \leq l \leq N\}$ et $\{f(N,k); 0 \leq k \leq M-1\}$.
   Remarque : cela signifie que $f \in \mathcal{E}$ est déterminée de manière unique par sa restriction à l'ensemble F.

Pour tout i vérifiant $0 \leq i < N$, on désigne par ϕ_i l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \phi_i(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (i,M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout j vérifiant $0 \leq j < M$, on désigne par ψ_j l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \psi_j(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (N,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin on note ξ l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \xi(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (N,M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{N-1}, \xi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{M-1}\}$ est une base de $\mathcal{E}$.
4. Déterminer l'élément ξ de $\mathcal{E}$ en explicitant la matrice $M(\xi)$.
   Indication : utiliser la question **II.A.**2.**b.** *pour expliciter la matrice $M(\xi)$.*

B. Calcul des fonctions ϕ_i et ψ_j.

1. En conservant les notations I_d et J_d de la partie **I.B.** pour $d = N+1$, respectivement pour $d = M+1$, montrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k < M$, respectivement pour tout entier l vérifiant $0 \leq l < N$, on a

$$\begin{aligned} (1-p)C_{k+1}(\phi_i) &= (I_{N+1} - pJ_{N+1})C_k(\phi_i) \\ pL_{l+1}(\psi_j) &= L_l(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{N+1})^t), \end{aligned}$$

   où $(J_{N+1})^t$ désigne la transposée de la matrice J_{N+1}.
2. A l'aide de la question **I.B.**3., expliciter alors, pour tout élément $(l,k) \in \mathcal{R}$, les valeurs de $\phi_i(l,k)$ et $\psi_j(l,k)$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique de classe C^2 définie sur R telle que $f(0)=0$

Pour tout $x \in R$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\frac{x}{2}f(x)$

1. Montrer que F est de classe C^2 sur R, et calculer sa dérivée seconde.

2. Montrer que pour tout $x \in R$: $F(x)=-\frac{1}{4}\int_0^x t(x-t)f''(t)\,dt$

Exercice n° 2

Soit *y* une fonction numérique à valeurs réelles. Pour tout *i* =1,2,…*n*, on pose :
$y_i^+ = Sup(y_i, 0)$ et $y_i^- = Sup(-y_i, 0)$

1. Résoudre $Max\left\{\sum_{i=1}^n (y_i^+ + y_i^-) \ / \ \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1\right\}$ (il s'agit de trouver, s'il existe, le maximum de $\left\{\sum_{i=1}^n (y_i^+ + y_i^-)\right\}$ sachant que les fonctions y_i doivent vérifier la contrainte $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$)
2. Résoudre $Min\left\{\sum_{i=1}^n |y_i| \ / \ \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 1\right\}$

Exercice n° 3

On considère une suite finie $X_t,\ t=1,2,...n$

1. Soit M_3 l'application définie par : $M_3\,X_t=\frac{1}{3}(X_{t-1}+X_t+X_{t+1})$

Transformer les valeurs suivantes de la suite X_t par cette application M_3 :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_t	4	7	4	10	13	10	16	19	16

2. Trouver les valeurs de *a* et *b* telles que : $M_3\,X_t=at+b$
3. Soit $S_t=X_t-M_3\,X_t$. Quelles sont les propriétés de la suite S_t ?
4. De façon plus générale, on pose $M_{2p+1}\,X_t=\sum_{i=-p}^{p}q_i\,X_{t+i}$, où les coefficients q_i sont des nombres réels. On suppose que $X_t=at+b$. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les coefficients q_i pour obtenir : $M_{2p+1}\,X_t=X_t$
5. On suppose maintenant que $X_t=at^2+bt+c$. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les coefficients q_i pour obtenir : $M_{2p+1}\,X_t=X_t$

Exercice n° 4

On définit une suite de matrices carrées de la façon suivante :

$$H_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \text{ et } H_k=\begin{pmatrix}H_{k-1} & H_{k-1}\\ H_{k-1} & -H_{k-1}\end{pmatrix} \text{ pour tout } k\geq 2$$

1. Expliciter H_2
2. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres orthogonaux de H_2
3. Montrer que $Tr(H_k)=0$ pour tout $k\geq 2$

Exercice n° 5

Soit a un entier strictement positif fixé.

1. Montrer que $\sqrt{a^2+1}-a<\frac{1}{2a}$

2. Montrer que $\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3}<\sqrt{a^2+1}-a$

3. En déduire que a est l'entier le plus proche de $\sqrt{a^2+1}$, c'est-à-dire que, pour tout entier naturel k , distinct de a , $\left|\sqrt{a^2+1}-a\right|<\left|\sqrt{a^2+1}-k\right|$

4. En déduire une valeur approchée décimale de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} près par excès.

5. On définit la suite $(t_n)_{n\in N}$ par :

$$t_0=a \quad \text{et} \quad t_{n+1}=t_n+\frac{1}{2a}(1+a^2-t_n^2)$$

Montrer que pour tout entier n, t_n est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $\left[a,a+\frac{1}{2a}\right]$

6. Etudier la suite $(t_n)_{n\in N}$

Exercice n° 6

Soient A un ouvert convexe non vide de R^n et f une fonction numérique différentiable définie sur A.

1. Montrer que si f est convexe, alors :

$$\forall a,x\in A \qquad f(x)-f(a)\geq<df(a),x-a>$$

On note $<.,.>$ le produit scalaire euclidien dans R^n et on rappelle qu'une fonction f est convexe si et seulement si elle vérifie $\forall a,x\in A \quad \forall t\in[0,1] \qquad f(tx+(1-t)a)\leq tf(x)+(1-t)f(a)$.
On pourra utiliser la fonction G définie par $G(t)=f(a+t(x-a))$

2. Montrer que si f vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall\, a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

alors

$$\forall\, a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

3. Montrer que si f vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall\, a, x \in A \qquad < df(a) - df(x), a - x > \geq 0$$

alors

$$\forall\, a, x \in A \qquad f(x) - f(a) \geq < df(a), x - a >$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous résumerez en 150 mots le texte suivant d'Edgar Pisani extrait du *Monde diplomatique* du mois de décembre 2004.

N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

NOURRIR NEUF MILLIARDS D'ETRES HUMAINS

« […] Le monde peut-il nourrir les 9 milliards d'humains annoncés ? Rien n'est sûr. Certains facteurs de production peuvent s'accroître : il y a de bonnes terres incultes à mettre en valeur, des progrès techniques et scientifiques à diffuser, des recherches à poursuivre, une formation technique à favoriser. Mais certains facteurs de production se réduisent : parmi les meilleures terres, certaines sont menacées par la montée du niveau des océans, l'urbanisation et les grands travaux, la surexploitation, la pollution, la disparition de forêts qui sont des régulateurs climatiques. Le désert dévore des espaces hier encore fertiles. L'eau, bien rare, devient un élément de conflit entre irrigation et besoins « urbains ». Les capitaux à investir en faveur du développement ne sont pas inépuisables, et l'agriculture en exige beaucoup.

Il nous serait permis, malgré tout cela, de faire le pari de l'autosuffisance de tous si le monde avait la capacité politique d'assurer des médiations difficiles : entre le droit des peuples de se nourrir eux-mêmes et le droit des marchands à abolir les frontières ; entre une planète exploitée par 300 000 méga fermes industrielles et 1 milliard d'entreprises familiales agricoles ; entre l'idéologie marchande, pour laquelle tout est simple, et une appréhension nuancée d'un monde naturel, social et politique complexe. La sécurité internationale dépend en effet d'un développement équilibré où la nature serait jardinée ; où d'immenses agglomérations et de grands conglomérats ne communiqueraient pas entre eux par des voies express traversant des espaces désolés ; où échappant à la misère, les peuples les moins bien pourvus connaîtraient au moins une pauvreté tolérable.

Le pire n'est pas exclu, car nous passons de la mondialisation des échanges à la globalisation d'un modèle dont la plus grande partie de la planète et la grande majorité des humains ne sauraient s'accommoder. Dans une unité contrainte, nous sommes menacés par une uniformisation faisant fi de notre diversité. Or si les civilisations sont multiples, c'est que la nature les a faites telles. Uniformiser, c'est faire disparaître des capacités de production. C'est vouer au désespoir – qui est mauvais conseiller – de 4 à 5 milliards de paysans ou de ruraux.

DES CLIVAGES POLITIQUES INATTENDUS

Le monde met l’agriculture au défi de nourrir 9 milliards d’êtres en sauvegardant nature et sociétés rurales. Acceptant ces responsabilités, l’agriculture met la société globale au défi de lui en donner les moyens ; elle met l’Union européenne élargie au défi d’exister comme une puissance autonome, capable de définir et de négocier une politique agricole, alimentaire, rurale et environnementale européenne assumant sa sécurité et contribuant aux équilibres mondiaux ; elle met l’OMC au défi de définir des règles qui tiennent compte de ses caractères spécifiques et de son infinie diversité ; elle met la modernité au défi d’inscrire le présent dans la durée. Il n’est pas impossible de relever ce défi. Esquissons donc les principes d’une gouvernance mondiale et d’une politique européenne.

Notre ambition, notre devoir étant de mettre fin à la faim, les besoins alimentaires du monde seront trois fois plus importants dans vingt cinq ans qu’ils ne le sont aujourd’hui. Les sociétés rurales représentant 4 milliards d’êtres, l’augmentation de la production agricole ne peut être recherchée dans l’oubli des énormes problèmes que représenterait un exode rural massif, alors que les villes, l’industrie et les services ne leur ouvrent pas les bras.

Le développement de la production agricole est favorisé par les progrès, mais il est menacé par la raréfaction de certains facteurs de production. Il ne saurait être promis, où que ce soit dans le monde, par la mise en œuvre hâtive de découvertes et la persistance de pratiques menaçant l’environnement. La sécurité alimentaire étant reconnue comme un droit humain et politique fondamental, doivent donc être consacrés à la fois le droit des peuples à se nourrir eux-mêmes et l’interdiction de toute subvention à l’exportation. Des médiations doivent être assurées : entre les dynamiques scientifique et marchande et la fragilité des sociétés comme de l’environnement ; entre la diversité naturelle et culturelle des régions et l’unité à inventer d’un monde pacifié.

Tels doivent être les objectifs d’une « gouvernance » mondiale et d’une politique agricole, alimentaire, rurale et environnementale européenne. Elles sont, l’une et l’autre, à inventer. Elles mettent au défi une OMC qui a pour seule vocation de favoriser les échanges et une Union européenne qui doit se construire en puissance mondiale d’un nouveau type.

Ces exigences répondant à des besoins et des menaces constatés, il serait moralement inacceptable, objectivement absurde et politiquement dangereux de ne pas y répondre.

Edgar PISANI

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un n-échantillon de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ l'espace des réels muni de la tribu borélienne et sa probabilité image. On a $var(X_i) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_i) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. De plus, la probabilité P_X est symétrique, c'est-à-dire qu'elle est telle que pour tout événement $B \in \mathcal{B}$,

$$P_X(B) = P_{-X}(B)$$

où P_{-X} est la loi de la variable aléatoire $-X_i$.

1. Montrer que

$$\forall t \geq 0, \lambda > 0, \quad \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} > t\right) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \right)$$

2. Soit un n-échantillon $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ indépendant de l'échantillon $X_1, \cdots, X_n$, tel que $\mathbb{P}(\sigma_i = 1) = \mathbb{P}(\sigma_i = 0) = \frac{1}{2}$. Justifiez l'égalité suivante

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \right)$$

3. Montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sigma_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \;\middle|\; X_1, \cdots, X_n \right) \right)$$

4. On rappelle que pour tout y réel, on a $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \leq e^{\frac{y^2}{2}}$. A l'aide de cette inégalité montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} \right) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

5. Conclure en montrant que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}\right| > t\right) \leq 2e^{\frac{t^2}{2}}$$

Problème

Partie I.
Soit U une fonction deux fois continûment dérivable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ ($U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$). Soit x une fonction deux fois continûment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soient t_i, t_f, x_0, x_1 quatre réels donnés tels que

$$\begin{cases} x(t_i) = x_0 \\ x(t_f) = x_1 \end{cases}$$

On appellera par la suite cette condition sur x : *CIF*.
On cherche dans cette partie à exprimer une condition sur $\tilde{x}(t)$ afin que

$$\max_{x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ CIF} \{\Phi(x)\} = \Phi(\tilde{x}) \tag{1}$$

lorsque

$$\Phi(x) = \int_{t_i}^{t_f} U(t, x(t), x'(t))dt$$

On notera pour tout ce qui suit $\partial_{zi}U$ la dérivée partielle de U par rapport à sa i $^{\text{ème}}$ variable pour $i = 1, 2, 3$.
On considère $\tilde{x}$ une solution de (1).

1. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h(t_i) = h(t_f) = 0$. Soit $s > 0$.
   (a) A-t-on $t \mapsto \tilde{x}(t) + sh(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   (b) Cette fonction remplit-elle les conditions *CIF* ?
   (c) Comparer $\Phi(\tilde{x})$ et $\Phi(\tilde{x} + sh)$ pour tout $s > 0$.
   (d) Soit $g(s) = \Phi(\tilde{x} + sh)$ définie pour tout $s \in \mathbb{R}$. A l'aide de la définition d'une dérivée, montrer que $g'(0) \leq 0$.

2. (a) Exprimer $g(s)$ en fonction de U, t, x, x', s et h.
   (b) Montrer qu'on peut intervertir le signe dérivation par rapport à s et le signe intégrale dans l'expression suivante

$$\frac{d}{ds}\left[\int_{t_i}^{t_f} U(t, \tilde{x}(t) + sh(t), \tilde{x}'(t) + sh'(t))dt\right]$$

   (c) Montrer que l'on a

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[\partial_{z_2}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h(t) + \partial_{z_3}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))h'(t)\right] dt \leq 0$$

   (d) A l'aide d'une intégration par partie que l'on posera soigneusement, montrer qu'il existe une constante A telle que

$$\int_{t_i}^{t_f} h'(t)\left[-\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2}U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3}U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right] dt \leq 0$$

3. Soit $h(t)$ telle que

$$h'(t) = -\int_{t_i}^{t} \partial_{z_2} U(v, \tilde{x}(v), \tilde{x}'(v))dv + A + \partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) \tag{2}$$

   (a) Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifiant (2) et $h(t_i) = h(t_f) = 0$.

   (b) Montrer qu'on a alors

   $$\forall t \in [t_i, t_f], \quad h'(t) = 0$$

   (c) En déduire qu'une condition nécessaire pour que $\tilde{x}$ soit solution de (1) et vérifie *CIF* est

   $$\forall t \in [t_i, t_f], \quad \frac{d}{dt}\left(\partial_{z_3} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))\right) = \partial_{z_2} U(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) \tag{3}$$

Partie II.*Application de la partie I*
On s'intéresse à une entreprise produisant des vis. Cette entreprise reçoit une commande de B vis à livrer en une seule fois à la date $t = T$. On suppose qu'à la date $t = 0$ où elle reçoit la commande, elle ne posssède aucune vis en stock. On désire établir le plan de production de cette entreprise durant la période de temps $[0, T]$ de manière à minimiser le coût total de cette commande.
Le coût total instantané $C(t)$ se décompose entre :

- Le coût de stockage instantané $S(t)$. On suppose celui-ci proportionnel à la quantité stockée : lorsqu'il y a $N(t)$ vis au temps t à stocker, le coût de stockage instantané est alors $S(t) = c_1 N(t)$ avec c_1 constante positive.
- Le coût direct de fabrication instantané $F(t)$ d'une vis. Il est supposé linéairement croissant avec la vitesse de production.

On note $y(t)$ le nombre de vis fabriquées en tout temps t.

1. Que représente
$$\forall t \in [0, T], \quad w(t) = \int_0^t y(s)ds \ ?$$
2. Exprimer $y(t)$ en fonction de $w'(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
3. Quelle est la vitesse de production par vis ? Exprimer la en fonction de $w'(t)$.
4. Déterminer $w(0)$ et $w(T)$.
5. Déterminer $S(t)$ en fonction de $w(t)$.
6. Montrer que $F(t)$ s'exprime comme $F(t) = c_2 y^2(t)$, avec c_2 constante strictement positive.
7. Exprimer le coût total instantané $C(t)$ en fonction de $w(t)$ et $w'(t)$.
8. Exprimer le coût total $\mathcal{C}$ sur la période $[0, T]$.
9. Préciser le sens du problème d'optimisation suivant dans le cadre ci-dessus défini. On explicitera le sens de chacune des expressions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2 (w'(t))^2 + c_1 w(t) dt \\ w(0) = 0 \\ w(T) = B \\ w(t) > 0, \ w'(t) \geq 0, \ t \in]0, T] \end{cases}$$

10. Proposer des solutions possibles au problème $(\mathcal{P})$ en appliquant le résultat (3) de la partie I question 3 (c), pour le problème $(\mathcal{P}_1)$

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \min_{w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})} \int_0^T c_2 w'^2(t) + c_1 w(t) dt \\ w(0) = 0 \\ w(T) = B \end{array} \right.$$

11. Vérifier *a posteriori* les conditions sous lesquelles ces solutions vérifient $w(t) > 0$ et $w'(t) \geq 0$ pour $t \in]0, T]$. On notera ces conditions H_1.

12. Si H_1 n'est pas respectée, que faire du point de vue du plan de production pour minimiser le coût et honorer la commande en temps voulu ?