AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

I. Soit $X = (x, y) \in M_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, le calcul donne

$$^tXAX = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

En particulier si b est définie positive alors pour tout $x \neq 0$ on a $\alpha x^2 > 0$ donc $\alpha > 0$. On trouve

$$^tXAX = \alpha(x + \frac{\beta}{\alpha}y)^2 + (\gamma - (\frac{\beta}{\alpha})^2)y^2. \qquad (1)$$

Cette quantité (définie pour α non nul) est positive pour tout couple de x, y non nul si et seulement si $\alpha > 0$ et $(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}) > 0$ donc si et seulement si $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$. Donc on a montré que si b est positive alors $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$. Inversement si $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$ alors on utilise l'expression (1) et on a montré que b est positive.

II.

1. Le vecteur $w = (\alpha, \alpha, -1)$ est orthogonal aux deux vecteurs u_α et v_α et une équation cartésienne du plan P_α est :
   un point de coordonnées (x, y, z) appartient à ce plan si et seulement si $\alpha x + \alpha y - z = 0$.
2. Soit $(x, y, z) \in P_\alpha$ alors $z = \alpha(x + y)$

   $$b_\alpha((x, y, z), (x, y, z)) = x^2 + y^2 - \alpha^2(x + y)^2.$$

   b_α est positive si et seulement si pour tout $(x, y) \neq 0$ alors $x^2 + y^2 - \alpha^2(x + y)^2 > 0$. D'après la question I on trouve b_α est positive si et seulement si $(1 - \alpha^2) > 0$ et $(1 - \alpha^2)^2 - \alpha^4 > 0$. Donc si et seulement si $|\alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Pour premier vecteur on choisit

   $$e_1 = \frac{u_\alpha}{b(u_\alpha, u_\alpha)^{\frac{1}{2}}} = (\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, 0, \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}).$$

   Le deuxième vecteur est

   $$e_2 = (\frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}, \frac{1}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}, \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}).$$

4. Soit f de matrice associée A. Soit $\tilde{B}$ la matrice associée à B on a

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$B(f(x,y,z), f(x',y',z')) = {}^t(x,y,z)\ {}^tA\tilde{B}A(x',y',z'))$$

L'application f vérifie la propriété voulue si et seulement si

$${}^tA\tilde{B}A = \tilde{B}.$$

III.

1. q change de signe si et seulement si q n'est pas positive et $-q$ n'est pas positive. D'après la question I, si on note

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

une matrice de f, la fonction q change de signe si et seulement si $\alpha\beta - \gamma^2 < 0$. Comme $\det f = \alpha\beta - \gamma^2$, q change de signe si et seulement si $\det f < 0$.

2. Supposons que Z_q est un sous-espace vectoriel et que q change de signe. Donc il existe u et v tels que $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$. Alors u et v sont linéairement indépendants et forment une base de E. l'application $\alpha \to h(\alpha) = q(u + \alpha v)$ est continue , $h(0) < 0$ et $\lim_{h\to\infty} h(\alpha) = \infty$. Donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $q(u + \alpha_0 v) = 0$. l'application $\alpha \to g(\alpha) = q(u - \alpha v)$ est continue , $g(0) < 0$ et $\lim_{h\to\infty} g(\alpha) = \infty$. Donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $q(u - \alpha_1 v) = 0$. Les vecteurs $u + \alpha_0 v$ et $u - \alpha_1 v$ forment une base de E, et appartiennent à Z_q donc $Z_q = E$, et $q = 0$. Ceci contredit le fait que q change de signe. Supposons que q ne change pas de signe, sans perte de généralité supposons que q est positive, montrons que Z_q est un espace vectoriel. Notons

$$Q(x,y) = \frac{1}{2} < f(x), y > + \frac{1}{2} < f(y), x > .$$

Comme f est autoadjoint $Q(x,y) = < f(x), y >$. Pour tout $(x,y) \in E^2$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $q(x + \alpha y) \geq 0$. Comme

$$q(x + \alpha y) = q(x) + 2\alpha Q(x,y) + q(y),$$

on a la relation $|Q(x,y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$. Soit $x \in Z_q$ alors on obtient pour tout $y \in E$, $Q(x,y) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker} f$. Inversement si $x \in \mathrm{Ker} f$ alors $q(x) = 0$. Donc $Z_q = \mathrm{Ker} f$, et Z_q est un espace vectoriel.

3. Si q ne change pas de signe sur E, d'après la question précédente $Z_q = \mathrm{Ker} f$ donc $\dim Z_q = 2 - \mathrm{rang} f$.
4. La réponse est non. Prenons par exemple la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det C = 1$ et la forme quadratique associée à C change de signe. i.e. $C((x,y,z),(x,y,z)) = x^2 - y^2 - z^2$.

IV.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement si $a + d = 0$. Donc finalement $F = \{ae_1 + be_2 + ce_3, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ de base (e_1, e_2, e_3).
2. Le crochet est symétrique $\mathrm{Tr}\,{}^tAB = \mathrm{Tr}\,{}^tBA$, bilinéaire, positive $\mathrm{Tr}\,{}^tAA = \sum_i \sum_j a_{i,j}^2$ si $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$. Et $\mathrm{Tr}\,{}^tAA = 0$ implique $A = 0$.
3. Le projeté orthogonal de A sur F est $A - P'(A)$ si $P'(A)$ désigne le projeté orthogonal sur l'orthogonal de F. L'orthogonal de F est l'espace engendré par Id, et le projeté $P'(A)$ est $1/2\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Id}$. Le projeté orthogonal de A sur F est $A - 1/2(\mathrm{Tr}A)\mathrm{Id}$.
4. On trouve $f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $f_2 = e_2$ et $f_3 = e_3$.
5. La forme quadratique $\det A$ définit une unique forme bilinéaire symétrique $q(A,B) = \frac{\det(A+B) - \det(A-B)}{4}$ telle que $q(A,A) = \det A$ qui définit une unique forme linéaire autoadjoint u par $q(A,B) =< u(A), B >$.
6. La matrice est donnée par les éléments

$$u = \begin{pmatrix} \det f_1 & q(f_1, f_2) & q(f_1, f_3) \\ q(f_2, f_1) & \det f_2 & q(f_2, f_3) \\ q(f_3, f_1) & q(f_3, f_1) & \det f_3 \end{pmatrix}.$$

On trouve $u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de u sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (valeur propre double) et la signature de la forme quadratique $A \in E \mapsto \det(A)$ est $(2, 1)$.

V.

1. La forme bilinéaire associée est $q(A,B) = \mathrm{Tr}AB$.

2. Si A est symétrique et B est antisymétrique alors

$$\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\ {}^t(AB) = -\mathrm{Tr}\, BA = -\mathrm{Tr}\, AB = 0$$

3. L'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q contient les matrices antisymétriques. Soit $A = S + S'$ une matrice dans l'orthogonal des matrices symétriques, avec S symétrique et S' antisymétrique (une telle décomposition existe).

$$0 = \mathrm{Tr} AS = \mathrm{Tr} SS + \mathrm{Tr} S'S = \mathrm{Tr} SS = 0$$

Comme S est symétrique $\mathrm{Tr}\ {}^tSS = \mathrm{Tr}SS = 0$ et, d'après la section V, $S = 0$. Donc A est antisymétrique. L'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q est l'ensemble des matrices antisymétriques.

4. Les matrices suivantes forment une base de G

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette base q a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La signature de q est $(3, 1)$.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On multiplie la relation par e^{-bt} pour obtenir :

$$f(t)e^{-bt} \le ae^{-bt} + be^{-bt}\int_0^t f(u)\,du$$

d'où $f(t)e^{-bt} - be^{-bt}\int_0^t f(u)\,du \le ae^{-bt}$ ou encore $\frac{d}{dt}(e^{-bt}\int_0^t f(u)\,du) \le ae^{-bt}$

Puis en intégrant sur $[0,t]$, on obtient :

$e^{-bt}\int_0^t f(u)\,du \le \frac{a}{b}(1-e^{-bt})$ et $a+b\int_0^t f(u)\,du \le ae^{bt}$, d'où $f(t) \le a\,e^{bt}$

Exercice n° 2

L'intégrale étant dérivable, le produit $x\,f(x)$ est dérivable, donc f est dérivable sauf peut-être en 0, par dérivation on obtient donc une condition nécessaire sur f :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[f(x) + 2f(0)\right] + \frac{x}{3}f'(x)$$

f apparaît comme solution de l'équation différentielle :

$$x\,y' - 2y = -2f(0)$$

L'intégration immédiate donne :

$$f(x) = f(0) + m\,x^2$$

On vérifie facilement que ces fonctions conviennent.

Exercice n° 3

a) La matrice Ω est orthogonale droite si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad ab + bc + ca = 0$$

et si :

$$\det \Omega = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a + b + c = 1$$

Les deux conditions $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$

entraînent d'ailleurs les conditions précédentes et sont suffisantes pour entraîner la propriété ; elles montrent que a, b, c doivent être solutions d'une équation de la forme $t^3 - t^2 + k = 0$, dont les racines doivent être réelles, ce qui s'écrit, on le voit facilement d'après le tableau de variation de la fonction $f(t) = t^3 - t^2$, $0 = f(0) \le k \le f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$.

b) Posons $k = \frac{4}{27} \sin^2 j$, avec $0 \le j \le 2p$, et faisons dans l'équation le changement de variable $t = \frac{1}{3} + l \cos q$

Pour $l = \frac{2}{3}$, l'équation se simplifie et devient :

$$\frac{2}{27}(4\cos^2\theta - 3\cos\theta) = \frac{2}{27}\cos 2\varphi \quad \text{ou} \quad \cos 3\theta = \cos 2\varphi$$

ce qui donne : $q = \pm(\frac{2}{3} j + \frac{2np}{3})$. On obtient ainsi, à une permutation près :

$$a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2j}{3}, \qquad b = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2j + 2p}{3}, \qquad c = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2j - 2p}{3}$$

L'axe de la rotation est un vecteur propre pour la valeur propre 1, en remarquant que $a + b + c = 1$, on trouve comme vecteur directeur unitaire $\boldsymbol{a}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice n° 4

❶ f étant une fonction continue et bornée, l'intégrale est convergente.

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx$ et effectuons le changement de variable $t = nx$, on obtient :

$$I_n - f(0) = \int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right) e^{-t}\, dt$$

Notons M la borne supérieure de la valeur absolue de f sur R^+.
Pour tout $e > 0$, il existe T tel que :

$$2M \int_T^{+\infty} e^{-t}\, dt = 2Me^{-T} < \frac{e}{2}$$

T étant ainsi choisi,

$$\left| \mathrm{I_n} - \mathrm{f}(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^{\mathrm{T}} \left| \mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{n}}\right) - \mathrm{f}(0) \right| \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\, \mathrm{dt}$$

La continuité de f en 0 assure que :

$$\exists h,\ \forall x, \quad 0 < x < h \ \Rightarrow \ \left| f(x) - f(0) \right| < \frac{e}{2T}$$

alors, $\forall n, \quad n > \dfrac{T}{h} \Rightarrow \left| I_n - f(0) \right| < \dfrac{e}{2} + \dfrac{e}{2T} \displaystyle\int_0^T e^{-t}\, dt < e$

D'où $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} n\, f(x) e^{-nx}\, dx = f(0)$.

❷ Dans la deuxième intégrale, le même changement de variable conduit à : $J_n = \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \frac{dt}{1+t^2}$ et $J_n - f(0) = \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right) \frac{dt}{1+t^2}$

La même démonstration que dans la question précédente conduit à la même conclusion, à savoir $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\, f(x)}{1+n^2x^2}\, dx = f(0)$

❸ Si f est en outre dérivable en 0,

$$f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)=\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}e\left(\frac{t}{n}\right)$$

avec $\lim\limits_{u\to 0} e(u)=0$, donc :

$$I_n-f(0)=\int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}e\left(\frac{t}{n}\right)\right)e^{-t}\,dt+\int_{\sqrt{n}}^{\infty}\left(f\left(\frac{t}{n}\right)-f(0)\right)e^{-t}\,dt$$

La deuxième intégrale est majorée par $2M\,e^{-\sqrt{n}}$, c'est donc un $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{t}{n}f'(0)+\frac{t}{n}e\left(\frac{t}{n}\right)\right)e^{-t}\,dt=\frac{f'(0)}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\,e^{-t}\,dt+\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\,e\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}\,dt$

On a : $\displaystyle\frac{f'(0)}{n}\int_0^{\sqrt{n}}t\,e^{-t}\,dt=\frac{f'(0)}{n}\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^{\sqrt{n}}\simeq\frac{f'(0)}{n}$

Pour $t\in[0,\sqrt{n}]$, $\left|e\left(\frac{t}{n}\right)\right|<\varepsilon$, car $\frac{t}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$, et la deuxième intégrale précédente est aussi un $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En conclusion :

$$I_n-f(0)=\frac{f'(0)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice n° 5

Soit X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a)=\left\{u\in R^2 \,/\, \exists(u_n)\in X, \exists(l_n)>0, \lim_{n\to\infty}u_n=a, \lim_{n\to\infty}l_n(u_n-a)=u\right\}$$

❶ On vérifie aisément que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$, en posant $l_n=n$ et $u_n=a$

❷

a) Si $u\in T(X,a)$ où $X=\left\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2=1\right\}$ et $a=(1,0)$

Soit une suite $u_n=(x_n,y_n)$ dans X qui converge vers a et $l_n(u_n-a)\to u=(x,y)$.

En particulier, $l_n(x_n-1)\to x$, $l_n y_n\to y$, $x_n\to 1$ et $y_n\to 0$.

Comme $u_n\in X$, $l_n x_n^2+l_n y_n^2=l_n$ ou encore $l_n(x_n-1)(x_n+1)+l_n y_n y_n=0$

Et par passage à la limite, on obtient $x=0$.

On vérifie la réciproque pour obtenir $T(X,a)=\{(x,y)/x=0\}$. Par exemple $x_n=\sqrt{1-(1/n^2)}$, $y_n=(1/n)$ et $l_n=y_n$

b) Si $u\in T(X,a)$ où $X=\left\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\leq 1\right\}$ et $a=(1,0)$

Soit une suite $u_n=(x_n,y_n)$ dans X qui converge vers a et $l_n(u_n-a)\to u$.

En particulier, $l_n(x_n-1)\to x$, $l_n y_n\to y$, $x_n\to 1$ et $y_n\to 0$.

Comme $u_n\in X$, $l_n x_n^2+l_n y_n^2\leq l_n$ ou encore $l_n(x_n-1)(x_n+1)+l_n y_n y_n\leq 0$

Et par passage à la limite, on obtient $x\leq 0$.

Réciproquement, on pose $x_n=1+\dfrac{x}{n}$ et $y_n=\dfrac{y}{n}$, alors $x_n\to 1$ et $y_n\to 0$.

Et pour $l_n=n$, $l_n(x_n-1)\to x$ et $l_n y_n\to y$.

Il reste à vérifier que la suite $u_n=(x_n,y_n)$ est bien dans X. En effet, pour *n* grand, $l_n x_n^2+l_n y_n^2\leq l_n$ pour $x\leq 0$.

On obtient : $T(X,a)=\{(x,y)/x\leq 0\}$

c) Si $u\in T(X,a)$ où $X=\left\{(x,y)\in R^2 / x\geq 0,\ -x^2\leq y\leq x^2\right\}$ et $a=(0,0)$

Soit une suite $u_n=(x_n,y_n)$ dans X qui converge vers a et $l_n(u_n-a)\to u=(x,y)$.

En particulier, $l_n x_n\to x$, $l_n y_n\to y$, $x_n\to 0$ et $y_n\to 0$.

Comme $u_n\in X$, $-l_n x_n^2\leq l_n y_n\leq l_n x_n^2$ et $x_n\geq 0$.

Et par passage à la limite, on obtient $y=0$ et $x\geq 0$

La réciproque est évidente en posant $x_n=\dfrac{x}{n}$ (avec $x>0$), $y_n=0$ et $l_n=n$, pour obtenir la demie droite :

$$T(X,a)=\{(x,y)/x\geq 0,\ y=0\}$$

Exercice n° 6

❶ $j_0(n)=n$ et $j_1(n)=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

❷ $F_0(x)=1$ et $F_1(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=e^x+1$

En 0, $F_t(x)$ est équivalent à $\frac{(1+t)x}{x}$. On peut donc prolonger F_t par continuité en 0 en posant $F_t(0)=1+t$.

En développant le numérateur à l'ordre 2, on obtient $\lim_{x\to 0}\frac{F_t(x)-F_t(0)}{x}=\frac{t(t+1)}{2}=F_t^{'}(0)$

❸ En identifiant un développement limité avec la formule de Taylor, on trouve $\psi_0(t)=F_0(t)-1=t$ et $\psi_1(t)=F_1^{'}(0)=\frac{t(t+1)}{2}$

❹ $F_n(x)=\frac{(e^x)^{n+1}-1}{e^x-1}=1+e^x+...+e^{nx}=\sum_{k=0}^{n} e^{kx}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{k^p x^p}{p!}$ et le coefficient de $\frac{x^p}{p!}$ est alors $\sum_{k=0}^{n} k^p$

❺ L'égalité $\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{j_i(t)}{i!}x^i+o(x^N)\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{x^j}{j!}+o(x^N)\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(1+t)^k}{k!}x^k+o(x^N)$

conduit par identification des coefficients de x^{p+1}, à :

$$\frac{1}{(p+1)!}+\frac{j_0(t)}{(p+1)!}+\frac{j_1(t)}{1!}\frac{1}{p!}+\frac{j_2(t)}{2!}\frac{1}{(p-1)!}+...+\frac{j_p(t)}{p!}\frac{1}{1!}=\frac{(t+1)^{p+1}}{(p+1)!}$$

soit, en multipliant les deux expressions par $(p+1)!$, on obtient la relation recherchée.

❻ Des relations :

$$p=0 \quad 1+j_0(t)=1+t$$

$$p=1 \quad 1+j_0(t)+C_2^1\, j_1(t)=(1+t)^2$$

$$p=2 \quad 1+j_0(t)+C_2^1\, j_1(t)+C_3^2\, j_2(t)=(1+t)^3$$

$$p=3 \quad 1+j_0(t)+C_2^1\, j_1(t)+C_3^2\, j_2(t)+C_4^3\, j_3(t)=(1+t)^4$$

on en déduit :

$$j_0(t)=t$$

$$j_1(t)=\frac{t(t+1)}{2}$$

$$j_2(t)=\frac{1}{6}(2t+1)t(t+1)$$

$$j_3(t)=\frac{1}{4}\frac{t^2(t+1)^2}{2}$$

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE OPTION MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I :
On choisit $\| f \|_a = sup_{x\in[0;1]}\{|f(x)|\}$ et $\| f \|_b = \int_{[0;1]} |f(x)|dx$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_a = 1$ et $\|f_n\|_b = \frac{1}{2n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice II :

1. L'intégrale de $\frac{r3^r x^k}{(3+x)^{r+1}}$ est de type Riemann et converge si et seulement si $r+1-k>1$ ou encore $k<r$. La quantité $M_{k;r}$ est définie pour tout $k \in \{0,\cdots,r-1\}$.
2. On effectue une intégration par parties avec $u(x) = x^k$ et $v'(x) = \frac{r3^r}{(3+x)^{r+1}}$. On obtient $u'(x) = kx^{k-1}$ et $v(x) = \frac{-3^r}{(3+x)^r}$ et pour tout $k \in \{0,\cdots,r-1\}$,

$$\begin{aligned} M_{k;r} &= \left[-\frac{3^r x^k}{(3+x)^r}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{3^r k x^{k-1}}{(3+x)^r}dx \\ &= \frac{3k}{r-1}\int_0^{+\infty}\frac{(r-1)3^{r-1}x^{k-1}}{(3+x)^{(r-1)+1}}dx \\ &= \frac{3k}{r-1}M_{k-1;r-1} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} M_{0;r-k} &= \int_0^{+\infty}\frac{(r-k)3^{r-k}}{(3+x)^{r-k+1}}dx \\ &= \left[-\frac{3^{r-k}}{(3+x)^{r-k}}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Comme $k<r$, on montre par récurrence sur k que

$$M_{k;r} = \frac{3^k k!(r-k-1)!}{(r-1)!}M_{0;r-k}$$

ou encore, pour tout $k \in \{0;\cdots;r-1\}$, $M_{k;r} = \frac{3^k}{C_{r-1}^k}$

Problème :

A) Préliminaires :

1. Par définition de la norme matricielle on a pour tout x non identiquement nul les deux inégalités suivantes

$$\|B_1(B_2x)\|_a \leq \|B_1\|_A \|B_2x\|_a$$
$$\|B_2x\|_a \leq \|x\|_a \|B_2\|_A$$

dont on tire $\|B_1B_2x\|_a \leq \|B_1\|_A \|B_2\|_A \|x\|_a$ pour tout x non nul et ainsi

$$\frac{\|B_1B_2x\|_a}{\|x\|_a} \leq \|B_1\|_A \|B_2\|_A$$

et qui est en particulier vraie pour le sup sur x.

2. (a) $\lim_{k\to+\infty} B^k v = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|B^k v\|_a = 0$ par définition d'une norme. Or comme B^k tend vers la matrice identiquement nulle avec k, $\|B^k\|_A$ tend également vers 0 avec k, et pour tout v non nul

$$\|B^k\|_A \|v\|_a \geq \|B^k v\|_a$$

ce qui nous permet de conclure avec le fait que $B^k v = 0$ lorsque v est nul.

(b) Soit v_{i_0} le vecteur propre associé à la valeur propre λ_{i_0} (donc v_{i_0} est différent du vecteur nul) où λ_{i_0} est telle que $\rho(B) = |\lambda_{i_0}|$. On a $B^k v_{i_0} = \lambda_{i_0}^k v_{i_0}$. Ainsi $B^k v_{i_0}$ converge vers 0 si et seulement si $|\lambda_{i_0}| < 1$.

(c) Montrer que B^k tend vers 0 avec k est équivalent à montrer que $\|B^k\|_A$ tend vers 0 avec k. Or d'après le résultat établi en **A)1.** on a $\|B^k\|_A \leq \|B\|_A^k$. Comme il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ telle que $\|B\|_A < 1$ on obtient le résultat voulu.

B) Méthode

1. On pose $e_0 = u_0 - u$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= u_{k+1} - u \\ e_{k+1} &= Bu_k + c - (Bu + c) \\ e_{k+1} &= Be_k \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient facilement pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_k = B^k e_0$.

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} u_k &= u \\ \lim_{k\to+\infty} e_k &= 0 \\ \lim_{k\to+\infty} B^k e_0 &= 0 \end{aligned}$$

Et d'après le **A) (a)** on a $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$ équivalent à $\rho(B) < 1$ et "il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ telle que $\|B\|_A < 1$"

2. (a)

$$\begin{aligned} Au &= b \\ \Leftrightarrow (M - N)u &= b \\ \Leftrightarrow Mu &= Nu + b \\ \Leftrightarrow u &= M^{-1}Nu + M^{-1}b \quad \text{car } M \text{ est inversible} \\ \Leftrightarrow u &= Bu + c \quad \text{avec } B = M^{-1}N \text{ et } c = M^{-1}b \end{aligned}$$

La matrice A est inversible, c'est à dire que $(M-N)$ est inversible. Et on a

$$\begin{aligned}
\left((M-N)^{-1}M\right)(I-M^{-1}N) &= \left(M(I-M^{-1}N)\right)^{-1} M(I-M^{-1}N) \\
&= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1} M^{-1}M(I-M^{-1}N) \\
&= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1} M^{-1}M(I-M^{-1}N) \\
&= \left((I-M^{-1}N)\right)^{-1} (I-M^{-1}N) \\
&= I
\end{aligned}$$

De même avec la multiplication à droite, on obtient $I - M^{-1}N$ est inversible.

(b) On définit la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ par u_0 réel quelconque et pour tout k non nul,

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$$

C) Application :

On peut écrire $A = M - N$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (facilement) et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

A est inversible car son déterminant est non nul. La matrice $B = M^{-1}N$ est égale à $\frac{1}{2}N$ qui est inversible d'après **B)2.(a)**. Et $\|B\|_A < 1$ pour $\|\ .\ \|_a$= norme sup sur $\mathbb{R}^n$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}Nu_k + \frac{1}{2}b$$

converge vers u quelque soit u_0.