ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Êtes-vous d'accord avec les termes de ce proverbe ewe du Togo ?

«Un mauvais frère est comme une branche de rônier, on ne peut pas le refuser totalement car il faut penser aux jours de pluie.»

Sujet n° 2

Êtes-vous prêt (prête) à suivre le conseil de ce proverbe peul ? Expliquez votre décision.

«Un village où ne conduit qu'un seul chemin est un mauvais village. N'y allez pas.»

Sujet n° 3

À votre avis le proverbe arabe suivant est-il justifié ? Analyser à l'aide d'exemples.

«Il y a cinq degrés pour arriver à être sage : se taire, écouter, se rappeler, agir, étudier.»

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

I. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Montrer que b est définie positive si et seulement si $\{\alpha > 0 \text{ et } \alpha\gamma - \beta^2 > 0\}$. *On rappelle que b est définie positive si et seulement si elle définit un produit scalaire* c'est à dire si $\forall u \in E - \{0\},\ b(u,u) > 0$ *ou si et seulement si*

$$\forall X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\quad {}^tXAX > 0.$$

${}^tX$ désigne la transposée de X.

II. On considère désormais l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et la forme bilinéaire symétrique

$$B\ :\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

définie par

$$B\left((x,y,z);(x',y',z')\right) = xx' + yy' - zz'.$$

Soit α un paramètre réel. On considère le plan P_α engendré par les vecteurs $u_\alpha = (1, 0, \alpha)$ et $v_\alpha = (0, 1, \alpha)$:

$$P_\alpha = \{\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Donner une équation cartésienne du plan P_α.
   On considère maintenant la restriction de B au plan P_α que l'on appelle b_α : si $U, V \in P_\alpha$, on a donc $b_\alpha(U,V) = B(U,V)$.

2. A quelle condition sur le paramètre α, la forme bilinéaire symétrique b_α est elle définie positive?

3. Dans ce cas, grâce au procédé de Gramm-Schmidt, donner une base orthonormale de l'espace euclidien (P_α, b_α).

4. Ecrire la relation que doit vérifier la matrice A dans la base canonique d'une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$B(f(x,y,z), f(x',y',z')) = B((x,y,z),(x',y',z'))$$

pour tout $(x,y,z);(x',y',z')$.

III. On suppose maintenant E (de dimension deux) muni d'un produit scalaire, que l'on notera, pour deux vecteurs $u, v \in E$: $\langle u, v\rangle$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E, on définit alors une forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $q(u) = \langle f(u), u\rangle$.

1. Montrer que q change de signe sur E (à savoir qu'il existe $u, v \in E$ tels que $q(u)q(v) < 0$) si et seulement si $\det f < 0$.

2. Montrer que q ne change pas de signe sur E si et seulement si l'ensemble $Z_q = \{x \in E,\ q(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Si q ne change pas de signe sur E, discuter alors en fonction de la dimension de Z_q le rang de f.

4. Peut-on généraliser la question 1. au sens suivant : Sur un espace F de dimension $n > 2$, a-t-on
"q change de signe si et seulement si $\det f < 0$"?

IV. On considère ici l'espace

$$F = \{A \in M_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\, A = 0\}.$$

Tr A désigne la trace de la matrice A.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et vérifier que

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

en est une base.

2. Montrer que si on définit $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\, {}^t\!AB$, alors $(M_2(\mathbb{R}), \langle ., .\rangle)$ est un espace euclidien.

3. Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ exprimer le projeté orthogonal de A sur F.

4. Trouver une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de $(F, \langle ., .\rangle)$ en orthonormalisant la base (e_1, e_2, e_3).

5. L'application $A \to \det(A)$ est une forme quadratique sur F, montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint u de E tel que

$$\forall A \in E,\ \det(A) = \langle u(A), A\rangle.$$

6. Déterminer la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) et déterminer les valeurs propres de u et la signature de la forme quadratique $A \in F \to \det(A)$.

V. On considère $G = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si on définit pour $A \in G$, $q(A) = \operatorname{Tr} A^2$, alors q est une forme quadratique sur E. Quelle est la forme bilinéaire associée?
2. Montrer que si A est symétrique et B est antisymétrique alors

$$\operatorname{Tr} AB = 0.$$

3. Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q.
4. Déterminer la signature de q pour $n = 2$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R ***désigne l'ensemble des nombres réels et*** R^+ ***l'ensemble des nombres réels positifs.***

Exercice n° 1

Soit f une fonction numérique définie sur R^+ qui vérifie :

$$\exists b \geq 0,\ \exists a \in R \ /\ f(t) \leq a + b\int_0^t f(u)\, du.$$

Montrer que $f(t) \leq a\, e^{bt}$.

Exercice n° 2

Trouver toutes les fonctions numériques d'une variable réelle continues telles que :

$$\forall x \in R - \{0\}, \qquad \int_0^x f(t)\, dt = \frac{x}{3}\left[f(x) + 2f(0)\right].$$

Exercice n° 3

a,b,c étant trois nombres réels, pour que $\Omega=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation, il faut et il suffit que a,b,c soient les racines d'une équation de la forme : $t^3-t^2+k=0,$ avec $0\leq k\leq\frac{4}{27}$. Vérifier cette condition nécessaire et suffisante et préciser cette rotation pour $k=\frac{4}{27}\sin^2\varphi$ (on peut effectuer le changement de variable $t=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\theta$).

Exercice n° 4

Soit f une fonction continue et bornée sur R^+.

❶ Montrer que $\underset{n\to\infty}{Lim}\int_0^{+\infty} n\,f(x)e^{-nx}\,dx=f(0)$.

❷ Montrer que $\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{n\,f(x)}{1+n^2x^2}dx=f(0)$.

❸ Si f est en outre dérivable en 0, avec $f^{'}(0)=a\neq 0$, trouver un équivalent de $\int_0^{+\infty} n\,f(x)e^{-nx}\,dx-f(0)$ en $\frac{k}{n}$.

Exercice n° 5

Soit X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a)=\left\{u\in R^2\,/\,\exists(u_n)\in X,\exists(\lambda_n)>0,\underset{n\to\infty}{Lim}\,u_n=a,\underset{n\to\infty}{Lim}\,\lambda_n(u_n-a)=u\right\}$$

❶ Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

❷ Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

a) $X=\left\{(x,y)\in R^2\,/\,x^2+y^2=1\right\}$ et $a=(1,0)$

b) $X=\left\{(x,y)\in R^2\,/\,x^2+y^2\leq 1\right\}$ et $a=(1,0)$

c) $X=\left\{(x,y)\in R^2\,/\,x\geq 0,-x^2\leq y\leq x^2\right\}$ et $a=(0,0)$

Exercice n° 6

On cherche à déterminer les fonctions $j_p(n)$ telles que :

$$j_p(n) = 1^p + 2^p + ... + n^p$$

❶ Déterminer j_0 et j_1.

❷ Pour tout nombre réel t, on considère la fonction numérique F_t définie pour $x \neq 0$ par :

$$F_t(x) = \frac{e^{(1+t)x} - 1}{e^x - 1}$$

- Déterminer F_0 et F_1.

- Montrer que F_t est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée, notée encore F_t, est dérivable en 0. Que valent $F_t(0)$ et $F_t'(0)$?

❸ On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p, et l'on pose :

$$F_t(x) = 1 + y_0(t) + \frac{y_1(t)}{1!} x + \frac{y_2(t)}{2!} x^2 + ... + \frac{y_p(t)}{p!} x^p + x^p e(t)$$

A l'aide de la précédente question, retrouver les valeurs de y_0 et y_1.

❹ Lorsque t est un entier, $t = n$, écrire la fonction F_n comme la somme de fonctions exponentielles , et montrer alors que $j_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

❺ En identifiant les développements limités des fonctions $F_t(x)(e^x - 1)$ et $e^{(1+t)x} - 1$, montrer que pour tout p , on a :

$$1 + j_0(t) + c_{p+1}^1 j_1(t) + ... + c_{p+1}^p j_p(t) = (1+t)^{p+1}$$

❻ En déduire les fonctions j_0, j_1, j_2, j_3 (on essaiera d'en donner une forme factorisée).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous résumerez en 200 mots le texte suivant extrait de l'ouvrage «*Les Politiques de l'emploi en France et aux Etats-Unis*» sous la direction de Jean-Claude BARBIER et Jérôme GAUTIÉ, Paris, Presses universitaires de France, 1998, pp, 424-426.
N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

Le rôle ambigu des politiques de l'emploi

Nulle part les politiques de l'emploi ne semblent avoir joué un rôle déterminant dans les performances en termes de création d'emplois, et au-delà dans les modifications des régimes d'emploi. Ainsi aux Etats-Unis et aux Pays-Bas où ces performances ont été les plus fortes et/ou ces modifications les plus importantes, il est généralement admis que ce sont des facteurs liés à la régulation macro-économique (politique monétaire) et aux ajustements sur le marché du travail (ajustements des salaires) qui ont été primordiaux.

On ne saurait cependant en rester à l'appréciation de facteurs purement quantitatifs, aussi bien au niveau des instruments des politiques de l'emploi (en termes de dépenses) que de leurs résultats (en termes de niveau et de taux d'emploi). Dans de nombreux pays, en effet, les politiques de l'emploi ont contribué à brouiller les catégories d'emploi, de chômage et d'activité/inactivité. Le déploiement massif de mesures reposant sur des formes particulières d'emploi (emplois publics temporaires, comme par exemple en Allemagne et en France, mesures d'insertion professionnelle pour les jeunes – en France, au Royaume-Uni, en Italie –, préretraites progressives, contrats de travail dérogatoires subventionnés – le cas le plus frappant étant l'Espagne –, etc.) ont grandement participé à la déstabilisation de la norme d'emploi «normal» (à plein temps, à durée indéterminée, couvert par des conventions collectives…). De même, la focalisation croissante, dans les comparaisons internationales, sur le repérage du «sous-emploi» - incluant les chômeurs découragés ou dispensés de recherche d'emploi, les travailleurs à temps partiel contraint, et les «faux» handicapés – est un indice de la remise en cause de la pertinence de la catégorie de chômage.

Cette dernière avait été «inventée» au tournant du siècle, notamment par des réformateurs sociaux, comme catégorie plus opératoire que la «pauvreté», et a connu son apogée dans le cadre du paradigme keynésiano-beveridgien avec la focalisation sur les politiques de plein emploi. Il semble qu'aujourd'hui on assiste au processus symétrique de «déconstruction» de la catégorie de chômage, à laquelle participent les politiques de l'emploi, notamment en Europe. Ainsi, le chômage n'est plus au cœur de la question sociale aux Etats-Unis. Il suffit de souligner dans ce pays la coexistence de ce qui est considéré comme le plein emploi (un taux de chômage de l'ordre de 5 % en 1998) et de problèmes sociaux importants. Cela découle du fait que, symétriquement, l'emploi n'est pas ou n'est plus la condition suffisante de l'intégration sociale, contrairement à ce que l'on pensait dans le paradigme keynésiano-beveridgien. Depuis le début des années quatre-vingt, les inégalités se sont fortement accrues, du fait de la baisse non seulement en termes relatifs, mais aussi réels, du revenu des moins qualifiés, entraînant, on l'a noté, une croissance du nombre des *working poor*. Symétriquement, de nombreux sans emploi ne sont pas recensés dans le chômage. Au total, aux Etats-Unis, chômage et pauvreté coïncident de moins en moins. Il est d'ailleurs symptomatique que les publics-cibles des politiques de l'emploi ne sont pas définis comme des catégories de chômeurs, mais comme des « désavantagés économiques» et que l'impact de ces politiques se mesure avant tout en termes de «gains» des bénéficiaires. Les catégories de *working poor* et de *welfare recipients* renvoient à des paradigmes qui rappellent, par de nombreux aspects, les représentations qui ont précédé l'invention du chômage. Ainsi avec le *working poor*, on retrouve la conjonction du travail et de la misère qui est au fondement du «paupérisme» (au cœur de la question sociale au dix-neuvième siècle) ; avec les programmes du *workfare,* on retrouve la dialectique traditionnelle «assistance-répression» qui caractérise le traitement de la pauvreté en Occident depuis le quatorzième siècle.

Etant donné la persistance d'un taux de chômage très élevé, la situation européenne apparaît à bien des égards très différente de celle des Etats-Unis. Plus que jamais le chômage semble être au cœur de la question sociale dans les pays d'Europe continentale. Pourtant, la permanence de la catégorie de «chômage» cache des évolutions très importantes des représentations et des modalités d'action, indissociablement liées, repérables dans un double glissement, par passage de la politique de régulation macro-économique de plein emploi aux *politiques spécifiques de l'emploi* – qui regroupent les interventions directes sur le marché du travail visant à en réduire les déséquilibres -, puis de plus en plus aux *politiques d'insertion*, qui dépassent la simple dimension professionnelle de l'intégration sociale. De façon corollaire, on est passé du *chômage*, pris dans sa globalité, aux *publics spécifiques de chômeurs* (les jeunes, les chômeurs de longue durée principalement), puis aux *exclus*. On voit que ce processus est inverse de celui qui a débouché sur «l'invention du chômage», celle-ci ayant notamment consisté à dépasser la typologie des individus en fonction de leurs caractéristiques propres, pour passer à un autre niveau d'analyse, et à une entité abstraite macro-sociale[1]. Le recours aux *groupes-cibles* de l'intervention publique au niveau central et, plus encore, la déconstruction même de ces groupes considérés comme trop hétérogènes au niveau local (les agents locaux de l'emploi recourant à leurs propres critères de classement pour identifier et orienter les chômeurs) marquent le retour de la *localisation* et de l'*individualisation* de l'intervention publique. Cela risque de déboucher sur une conception où se sont avant tout les caractéristiques des individus qui expliquent leur difficulté d'insertion, et non un dysfonctionnement du système économique et social. Le retour en force du concept d'*employabilité* comme référence de l'intervention publique est assez symptomatique de ce point de vue, et fait craindre le retour d'une certaine «handicapologie» dans le traitement de la question sociale.

[1] Avec la catégorie de « chômage », on passe en effet d'une collection d'individus – les pauvres, les «indigents» ou les «chômeurs» - à un phénomène macro-économique et social, dont les causes sont à rechercher du côté du dysfonctionnement du marché du travail ou de l'économie dans son ensemble. Le tout n'est pas égal à la somme des parties : ce n'est pas un hasard si en France à la même époque, c'est un durkheimien, Lazard, qui définit lui aussi le chômage comme un fait social irréductible aux individus qui le composent.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I :

Soient $E = \{f : [0;1] \to \mathbb{R},\ \textit{continue}\}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 & x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Proposer deux normes $\| \,.\, \|_a$ et $\| \,.\, \|_b$ sur E telles que $(\|f_n\|_a)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(\|f_n\|_b)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

Exercice II :

Soit r un entier supérieur strictement à 2.

1. Déterminer $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$\int_0^{+\infty} \frac{r3^r x^k}{(3+x)^{r+1}}\, dx < +\infty$$
   On note cette intégrale $M_{k;r}$
2. Exprimer $M_{k;r}$ en fonction de $M_{k-1;r-1}$.
3. Calculer $M_{0;r-k}$.
4. Exprimer $M_{k;r}$ en fonction du coefficient binômial $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\ (n\text{-}p)!}$.

Problème :

Soit $\| .\|_a$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\| \,.\, \|_A$ la norme matricielle subordonnée à $\| \,.\, \|_a$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|B\|_A = \sup_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} \frac{\|Bx\|_a}{\|x\|_a}$$

Et on note

$$\rho(B) = \max_{1\le i\le n} \{|\lambda_i(B)|\}$$

où $\lambda_i(B)$ est la $i^{\text{ème}}$ racine complexe du polynôme caractéristique de B.

A) Préliminaires

1. Vérifier que pour toutes matrices B_1 et B_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\|B_1B_2\|_A \le \|B_1\|_A \|B_2\|_A$$

2. Montrer que

   (a)
   $$\lim_{k \to +\infty} B^k = 0 \Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} B^k v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

   (b)
   $$\lim_{k \to +\infty} B^k v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \rho(B) < 1$$

   (c) On admet que :
   $\rho(B) < 1 \Longrightarrow$ Il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\quad \|B\|_A < 1$.

   Montrer que s'il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|B\|_A < 1$, alors $\lim_{k \to +\infty} B^k = 0$

B) Méthode

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I - B)$ soit inversible lorsque I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit c un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit u comme l'unique solution de

$$u = Bu + c$$

Soit u_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = Bu_k + c$$

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

   (a) $\lim_{k \to +\infty} u_k = u, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n$

   (b) $\rho(B) < 1$

   (c) Il existe une norme $\| \,.\, \|_a$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\|B\|_A < 1$

2. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec u l'unique solution du système
   $$Au = b$$
   On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = M - N$.

   (a) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(I - B)$ inversible et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que
   $$Au = b \Longleftrightarrow u = Bu + c$$
   Exprimer B et c en fonction de M, N et b.

   (b) Proposer une méthode itérative permettant de calculer une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers u quel que soit le vecteur initial u_0 à partir de M, N et b.

C) Application :

Expliciter une méthode itérative permettant d'approcher l'unique solution $u \in \mathbb{R}^n$ de l'équation $Au = b$ lorsque A et b sont tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$