ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Expliquer et commenter ce proverbe «FANG» du Gabon :

«La vie est une branche de palmier que les vents inclinent à leur gré»

SUJET n° 2

En cette période où l'on parle de famines dans plusieurs pays du continent africain que signifie ce proverbe «Bariba» du Bénin ?

«Celui qui est rassasié ne sait pas qu'un autre a faim»

Est-ce qu'il est compris dans notre monde actuel ?

SUJET n° 3

Est-il toujours possible d'appliquer à la lettre ce proverbe «Baoulé» ?

«Il faut dire la vérité même si elle rougit les pupilles, elle ne les crève pas»

Expliquer à l'aide d'exemples précis.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère deux variables réelles discrètes X et Y définies par $X=(x_1,...,x_n)$ et $Y=(y_1,...,y_n)$.

❶ Trouver des valeurs de a et b qui minimisent la quantité suivante (on justifiera l'existence de telles valeurs) :

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

❷ Calculer a et b pour les données suivantes :

x_i	y_i
8	43
6	35
9	45
15	48
16	50
20	60
21	62
17	57

EXERCICE n° 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$

❶ Montrer que $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$

❷ On suppose que :

- La série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge, et
- $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = 0$

Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❸ On suppose que la série de terme général u_n converge, montrer alors que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est aussi convergente.

❹ On pose $u_n = (-1)^n$. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

❺. Donner un exemple de suite (s_n) telle que :

- La série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge, et
- $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} \neq 0$

EXERCICE n° 3

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans A et un jeton dans B que l'on échange en les replaçant dans B et A (étape 1). Puis on recommence la même opération.
Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

❶ Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

❷ Soit (k,i) un couple d'événements possibles de X_n. Calculer la probabilité que $X_{n+1}=k$ sachant que $X_n=i$.

❸ On pose $a_n = P(X_n=0), b_n = P(X_n=1), c_n = P(X_n=2),$ puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$,

où P désigne la probabilité.
Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1}=TV_n$

❹ Etudier la suite vectorielle (V_n) et déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

EXERCICE n° 4

Soit f l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par R) par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\exp(x^2)-1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

❶ Montrer que f est impaire et continue.

❷ Montrer que f' garde un signe constant sur R. On pourra étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe : $u(t) = (2t-1)\exp(t)+1$.
En déduire l'existence d'une application réciproque de f, impaire.

❸ Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.

❹ Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5, donner également un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

EXERCICE n° 5

❶ Soient A et B deux parties non vides et bornées de R (ensemble des nombres réels).

On note $A+B=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$. Montrer que :

$$Sup(A+B)=Sup(A)+Sup(B)$$

❷ Soient A et B deux parties non vides et bornées de R^+ (ensemble des nombres réels positifs).

On note $AB=\{x\times y \mid x\in A, y\in B\}$. Montrer que :

$$Sup(AB)=Sup(A)\times Sup(B)$$

EXERCICE n° 6

❶ Pour quelles valeurs de x, l'intégrale suivante est-elle définie : $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Montrer que f admet une application réciproque.

❷ Soit g la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^4}{4}}}dt$$

- Etudier les variations et la convexité de g.
- Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq g'(x)\leq 1$ pour $0\leq x\leq 1$, et $g'(x)<\frac{2}{x^2}$ pour $x\geq 1$.
- En déduire un encadrement de $g(x)$ pour $x\geq 1$.
- Montrer que g admet une limite finie a quand $x\to +\infty$.

❸ Montrer que g est inversible et donner un développement limité de sa fonction réciproque, au voisinage de 0, à l'ordre 3.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Vous résumerez en 250 mots le texte suivant d'Anton BRENDER extrait de son dernier livre « Face aux marchés, la politique ». N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

* *

*

Dans un roman à succès des années 1960 – *The Group* - l'une des héroïnes de Mary Mac Carthy explique : « mes parents étaient communistes. Ils m'ont toujours dit de ne pas donner d'argent aux mendiants : faire la charité ne peut que retarder le jour où le prolétariat opprimé renversera le régime capitaliste. » Le propos témoigne de cette attente confiante du Grand Soir qui, pendant des décennies, a animé de nombreux militants. Pour eux, composer durablement avec le capitalisme était impensable. Le progrès social passait nécessairement par son abolition. « La propriété, c'est le vol. Exproprions les Bourgeois ! Les usines au peuple !... » Ces slogans, porteurs d'un projet clair, ont servi de mots d'ordre à des luttes innombrables. Ceux qui les ont scandés ont souvent été férocement réprimés. Aujourd'hui, pourtant, ces propos paraissent d'un autre âge. Entre temps, beaucoup d'eau a coulé sous les ponts, beaucoup de sang aussi. Le rêve communiste a tourné au cauchemar…et pouvoir vivre en France – ou aux Etats-Unis - est devenu le rêve d'hommes du monde entier.

Certains n'en ont pas moins du mal à se résigner. Abattre le capitalisme ? La tâche est lourde et le cœur n'y est décidément plus. De là toutefois à accepter purement et simplement sa froide mécanique, il y a un pas. L'utopie révolutionnaire cède ainsi la place à d'autres moins radicales. On peut le comprendre. Ceux pour qui le capitalisme a été longtemps le diable ont du mal à s'en accommoder. Pourtant les faux-semblants et l'hypocrisie sont ici inutiles. Entre la finance et le capitalisme les relations sont étroites : ceux qui n'aiment pas la première, répugnent à regarder le second en face. Ce réflexe est dangereux. Accepter, *en toute lucidité*, le capitalisme et la finance force la société à plus d'audace et de détermination, à plus d'imagination et d'intelligence aussi. De la mesure dans laquelle nous saurons collectivement en faire la preuve dépendent aussi bien la survie du capitalisme que la poursuite du progrès social.

Une logique simple : accumuler

Le marché et l'entreprise privée sont maintenant familiers et largement acceptés. Plus grand monde, il est vrai, ne pense qu'une administration puisse, dans notre pays, décider du nombre de voitures, de télévisions, de brosses à dents, de boulons …à produire, une autre à fixer leurs prix et une troisième leurs lieux et dates de livraison. Ainsi, pourtant, fonctionnait le Plan qui pendant des décennies est apparu, dans les livres d'école, comme une alternative au marché. Va donc pour le marché. Laissons le régler la production, adapter l'offre à la demande. Va aussi pour l'entreprise privée ! A elle de fabriquer ces objets, de produire ces services dont l'usage est aujourd'hui profondément ancré dans nos vies quotidiennes. Voilà de sérieuses concessions, un grand pas en direction de la « modernité ». Mais, doit-on dans la même foulée, aller jusqu'à accepter le principe de la course au profit ? Autour de lui s'articule, depuis toujours, l'antagonisme entre capital et salariat. Oui à l'entreprise privée, soit. Reconnaître que l'un comme l'autre ne fonctionnent que pour et par le profit, est-il pour autant vraiment nécessaire ? Plutôt que de capitalisme, parlons donc d'économie de marché.

De bons et de mauvais profits

Il ne faut pas aller très profond pourtant pour découvrir que le marché ne serait rien sans commerçants pour le faire fonctionner. Toute leur activité s'organise autour d'une arithmétique simple : profit égale recettes moins dépenses. Le miracle, quand on y réfléchit, est que, par la force de ce seul calcul, les marchandises utilisées chaque jour dans notre société se trouvent à peu près là où il faut, quand il le faut. Quant à ces marchandises elles –mêmes, elles ne sortent bien sûr pas d'un chapeau. Elles sont produites par d'autres entreprises dont l'activité s'organise autour de la même arithmétique élémentaire. Le principe qui guide leurs décisions à toutes est unique : faire croître leurs profits. L'opposition entre salariat et capital peut, dès lors, être touchée du doigt : si rien ne change par ailleurs, plus de salaires pour l'un font moins de profit pour l'autre. Là se noue le problème.

Il y a bien sûr mille façons pour une entreprise d'augmenter ses profits. Certaines recueilleront facilement une approbation générale. Une nouvelle machine à laver est lancée, des milliers d'exemplaires sont vendus, des centaines d'emplois sont créés et des profits substantiels sont engrangés. Tout ceci est positif. Et il faudrait vraiment faire la fine bouche pour ne pas juger ces profits justifiés. Tel n'est toutefois pas toujours le cas. Une entreprise peut réduire ses coûts en faisant vieillir ses installations, au risque de polluer son environnement et de faire travailler son personnel dans des conditions dangereuses. Elle augmente ainsi, pour un temps au moins, ses profits. Est-ce acceptable ? Cette fois l'unanimité sera plus difficile à faire. Si en plus l'entreprise annonce des licenciements, un grondement réprobateur se fera entendre.

Si l'on pouvait éliminer les profits du second type pour ne garder que ceux du premier, tout irait pour le mieux. D'où des idées régulièrement renouvelées. On songera à de nouveaux critères de gestion, on demandera à l'entreprise de devenir citoyenne, on lui proposera de respecter des règles éthiques, de contribuer à un développement durable. Chacune de ces pistes suscite des enthousiasmes, donne lieu à débats et colloques, alimente une littérature spécialisée. Toutes pourtant relèvent de la même illusion : elles veulent ignorer que la recherche du profit est le ressort unique de l'entreprise capitaliste. *Les seuls idéaux qui peuvent influencer significativement la stratégie de cette dernière sont ceux qui, d'une manière ou d'une autre, affectent ses perspectives de profit.*

Ceci n'interdit bien sûr pas à nombre d'entreprises d'agir généreusement. Elles patronnent une épreuve sportive, parrainent des événements culturels, soutiennent les initiatives de collectivités locales ou de grandes causes nationales, voire internationales…De plus en plus nombreuses sont celles qui cherchent à faire preuve, au travers de leur culture d'entreprise, d'un véritable sens moral. Il n'empêche. La concurrence, caractéristique du capitalisme, reste une loi d'airain. Elle conduit implacablement à distinguer deux situations. Soit ces gestes généreux sont une façon habile de développer une image positive, cette culture une manière intelligente de mobiliser un personnel de haute qualité. Leur aspect citoyen est alors une coïncidence heureuse : loin de seulement coûter, ces actions rapportent aussi. Elles sont en fait rentables et les entreprises qui ne l'ont pas vu le regretteront demain. Soit ces pratiques et cette attitude sont parfaitement « gratuites » elles coûtent à la firme et ne lui rapportent rien. Les dépenses engagées et les surcoûts viendront alors purement et simplement amputer les profits de l'entreprise qui les adopte. Si les montants en jeu ne sont pas marginaux, si les actions sont durables, la pérennité de l'entreprise peut en être affectée (sans parler bien sûr, dans un premier temps, de celle de ses dirigeants).

Le nerf de la guerre est unique

Que va-t-il se passer en effet dans ce dernier cas ? L'entreprise citoyenne se verra décerner des brevets de civisme. Les journaux lui consacreront des articles élogieux, avec un peu de chance même, son dirigeant pourra être désigné « manager » de l'année. Mais sa firme a toutes chances de faire moins de profit que ses concurrentes. Elle ne pourra ni investir ni recruter autant qu'elles. Peu à peu, sa position s'affaiblira. Assez vite, il lui faudra renoncer à ses pratiques pourtant sympathiques. Le profit n'est en effet pas un indicateur de succès qui peut être mis sur le même plan que d'autres « critères de gestion » Son pouvoir est unique : *il permet d'accroître le montant des capitaux possédés en propre par chaque entreprise.*

Si l'on peut voir la concurrence comme une guerre, alors les profits sont le nerf de cette guerre. Aucune entreprise ne peut considérer leur montant comme un chiffre parmi d'autres : ses possibilités de développement en dépendent. Pour une part, ce développement peut certes s'appuyer sur des capitaux empruntés. Mais ceux qui prêtent à une société surveilleront étroitement le montant de ses capitaux propres. Qu'une perte vienne les amputer gravement et ils ne renouvelleront pas leurs prêts. Que ces capitaux propres augmentent au contraire et les prêteurs se bousculeront. L'argent va à l'argent ! Pour des raisons faciles à comprendre : un épais matelas de capitaux propres rassure les créanciers. Il dit en effet combien l'entreprise peut perdre tout en restant capable de les rembourser.

Quant au montant de ces capitaux propres, il ne peut s'accroître que de deux façons : grâce aux profits dégagés et conservés par l'entreprise ou par une « augmentation de capital ». Comment persuader les actionnaires de laisser une part importante des profits réalisées dans l'entreprise, voire de lui amener de l'argent frais en souscrivant de nouvelles actions ? La réponse est simple : ils le feront volontiers si l'entreprise est rentable. Si ça n'est pas le cas, il sera très difficile de les persuader de remettre de l'argent au pot. Ceux qui fournissent des capitaux à une entreprise ressemblent, par un trait, aux joueurs de casino : ils prennent le risque de perdre de l'argent avec l'espoir d'en gagner. Mais, à la différence des joueurs de casino, le frisson du jeu ne remplace pas, pour eux, la réalité du gain.

Accumuler du capital, telle est dans nos économies la finalité de la firme privée. Là réside le principe du capitalisme. Son unicité, sa simplicité font sa puissance. Elles font aussi son aveuglement. On trouvera bien sûr des patrons pour soutenir le contraire et des salariés pour le croire. Un chef d'entreprise expliquera avec conviction qu'il veut surtout contribuer au mieux-être de l'humanité. Un autre dira vouloir susciter l'enthousiasme de ses salariés, un troisième n'œuvrer que pour la satisfaction de ses clients…

Ces propos sont parfois creux, tenus au gré des circonstances. Ils sont parfois sincères. Sur le fond, cela n'a aucune importance. On en revient toujours à la même alternative : soit l'entreprise fait suffisamment de profits et tout va bien, soit cela n'est pas le cas... et très vite, elle reculera par rapport à ses concurrentes. Penser qu'une entreprise peut faire longtemps le bonheur de qui que ce soit aux dépens de la croissance de ses profits relève de l'illusion ! La réalité du capitalisme est plus brutale que ne l'aimeraient ceux qui ont fini par accepter à contrecoeur de ne pas le renverser. D'où cette tentation constante de lui insuffler un supplément d'âme, de l'appeler à faire preuve de sens civique. L'espoir est vain. Le capitalisme est un moteur, le profit est son carburant. La recherche du profit est la force qui anime aussi bien l'entreprise que les mouvements du marché. Il est temps d'en prendre pleinement son parti.

Anton BRENDER
«Face aux marchés, la politique» (p. 95 à 102)
La Découverte

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Soit n un entier naturel non nul. On pose $\alpha_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{(k^2)}$.

1. Calculer G_1, G_2, G_3, G_4. Calculer pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr}$.
2. Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, le polynôme $X^5 - 1$.
3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ en fonction de $\sqrt{5}$. Calculer G_5.
4. On considère la matrice $A_n \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \\ 1 & \alpha_n^2 & (\alpha_n^2)^2 & \cdots & (\alpha_n^2)^{n-1} \\ & & \cdots & & \\ 1 & \alpha_n^{n-1} & (\alpha_n^{n-1})^2 & \cdots & (\alpha_n^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Vérifier que $\mathrm{Tr} A_n = G_n$ (Tr désigne la trace de la matrice) et que $A_n^2 = nB_n$ avec $B_n = (b_s^r)$ définie par $b_s^r = 1$ si $r+s=2$ ou $r+s=n+2$, sinon $b_s^r = 0$. Montrer que $B_n^2 = I_n$.
5. Montrer que si λ est valeur propre de A_n alors λ^p est une valeur propre de A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$. En déduire que A_n admet au plus quatre valeurs propres distinctes. Indiquer leurs valeurs possibles.

6. Soit $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que $U^2 = I_n$. Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant U pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ établir

$$\mathbb{C}^n = \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id).$$

En déduire que U est diagonalisable. Montrer que B_n est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$). Si v est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant pour matrice B_n dans la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, déterminer en fonction des vecteurs e_i une base de vecteurs propres de v et montrer que 1 et -1 sont respectivement valeurs propres de B_n d'ordre, respectivement , $p+1$ et p . Quel est le polynôme caractéristique de B_n?

8. Soit P un polynome de degré d de la forme $P(X) = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_d)$ avec pour tout $i \neq j$, $a_i \neq a_j$. Notons Q le polynôme tel que $P(X) = (X-a_1)Q(X)$. Montrer que $Q(X)$ et $(X-a_1)$ sont premiers entre eux. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit w un endomorphisme de E tel que $P(w) = 0$. Montrer que

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$

En déduire que

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker(w - a_2 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id).$$

En déduire que w est diagonalisable.

9. Montrer que A_n est semblable à une matrice diagonale du type

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_k \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$.

10. On suppose que $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On désigne par a, b, c, d le nombre de fois où les quatre valeurs $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$ sont respectivement écrites dans la matrice D_n. Montrer que $a + b = p + 1$ et $c + d = p$.

11. Soit $T = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Montrer que l'on définit une bijection ϕ de $T \times T$ sur $T \times T$ par $\phi(k, s) = (k - s, s)$ si $k \geq s$ et $\phi(k, s) = (k + n - s, s)$ si $k < s$. En déduire que $G_n \overline{G}_n = \sum_{(r,s)\in T\times T} \alpha_n^{(r+s)^2 - s^2}$. Prouver que si n est impair alors $|G_n| = \sqrt{n}$.

12. En déduire que les coefficients de la question 8) vérifient $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$ si n est impair.

13. On suppose que $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Montrer en calculant $\det A_n$ que $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = i^{p(2p+1)} n^{\frac{n}{2}}$.

14. On suppose que $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $b + d = p + 2m$. Calculer les valeurs de a, b, c, d .

15. En déduire la valeur de $\mathrm{Tr} A_n$ pour n impair.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Calculatrice permise.
Tous les exercices sont indépendants et de difficultés diverses.

- **Exercice 1 :**

On dit que E, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est convexe si

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in [0;1], \quad \lambda\, x + (1-\lambda)y \in E$$

On dit que f, une application de E dans $\mathbb{R}$, est convexe si E est convexe et si

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in [0;1], \quad f(\lambda\, x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Soit E un ensemble convexe de $\mathbb{R}$. On admet que pour toute fonction f continuement dérivable de E dans $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x, x_0 \in E, \quad f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

1. Soit x et x_0 deux réels de E. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre deux de $f(x)$ en x_0 avec reste exact.
2. Montrer que, si E est convexe et f deux fois continuement dérivable sur tout E, on a $f'' > 0$ entraîne f convexe.
3. Application : montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^4 \leq 2^3(x^4 + y^4)$$

- **Exercice 2 :**

1. Soit m un réel, et σ un réel strictement positif.
   Sans utiliser la densité d'une loi gaussienne, calculer à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires, l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

   (*on pensera par exemple à calculer le carré de cette intégrale*).
2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$.
   Soit $\Phi_n(t) = \phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$. Calculer pour tout t réel, la limite de $\Phi_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini.

- **Exercice 3 :**

  Soit $\alpha > 0$ et pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$$

  1. $xf(x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$? Dans l'affirmative, calculer cette intégrale, dans le cas contraire, préciser le type de divergence.
  2. $xf(x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Dans l'affirmative, calculer cette intégrale, dans le cas contraire, préciser le type de divergence.

- **Exercice 4 :**

  Pour toute fonction $f \in C([0,1])$ où $C([0,1])$ est l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

  1. Montrer que $\| \ \|_1$ est une norme sur l'espace vectoriel $C([0,1])$.
  2. On cherche à montrer que $C([0,1])$ muni de $\| \ \|_1$ n'est pas complet.
     (a) Exprimer la suite $f_n(x)$ définie par une suite de fonctions continues, affines par morceaux, nulles sur $[0,1/2]$ et valant 1 sur $[1/2+1/n,1]$.
     (b) Montrer que f_n est de Cauchy pour la norme $\| \ \|_1$. On montrera au préalable que pour tout n et p entiers non nuls avec $n > p$, on a $|f_n - f_p| \leq 2$.
     (c) On suppose qu'il existe une fonction continue f limite, au sens de la norme $\| \ \|_1$, de f_n. Comparer

$$\int_0^{1/2} |f(x)|dx \quad \text{et} \quad \int_{1/2+1/p}^{1} |1 - f(x)|dx$$

     avec $\|f_n - f\|_1$ pour $n > p$.
     (d) Conclure.

- **Exercice 5 :**

  Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

  1. Calculer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.
  2. Calculer les vecteurs propres engendrant les sous-espaces propres associés.
  3. Exprimer ces vecteurs en fonction de $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
  4. Exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire réelle de U et V.

- **Exercice 6 :**

  Un entonnoir conique d'angle au sommet 60 degrés et de hauteur 10 cm présente une ouverture de 0,5 cm^2 à sa base. On place l'entonnoir verticalement, et on le remplit d'eau.
  On note $h(t)$ la hauteur comprise entre l'ouverture de l'entonnoir et la surface du liquide au temps t.
  La dynamique d'écoulement de l'eau s'exprime en fonction de $h(t)$ par la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad h'(t) = -C\sqrt{h(t)}$$

  avec $C = \frac{a}{A(t)}\sqrt{2g}$, où $g = 9,8$, a est l'aire de l'ouverture de l'entonnoir et $A(t)$ est l'aire de la surface du liquide à l'instant t.
  Calculer le temps T que l'entonnoir met à se vider complètement.