SESSION D' AVRIL 2002

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRECTION DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

1. Si $(M, M') \in \Gamma^2$ alors $MM'^{-1} \in \Gamma$ car $\det(MM'^{-1}) = (\det M)(\det M')^{-1} = 1$. L'ensemble Γ, muni de la multiplication matricielle est un sous groupe de matrices carrées d'ordre deux inversibles, donc un groupe. L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

   Tout élément S de $\mathcal{S}$ s'écrit sous la forme $S = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels, ou encore $S = \frac{a+d}{2}I + \frac{a-d}{2}X + bY + cZ$. Les quatres matrices I, X, Y, Z sont linéairement indépendantes, elles engendrent $\mathcal{S}$ donc elles forment une base de $\mathcal{S}$.

2. Si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on trouve $t(S) = \frac{a+d}{2}$ et $S^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Notons que $t(S) = t(S^{-1})$ si $S \in \mathcal{S}$.

3. $(\alpha S \alpha^\star)^\star = \alpha S^\star \alpha^\star = \alpha S \alpha^\star$. Donc $\alpha S \alpha^\star \in \mathcal{S}$.

4. T_α est une application linéaire donc d'après la question précédente T_α est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. $\mathrm{Ker} T_\alpha = \{S \in \mathcal{S}, \alpha S \alpha^\star = 0\} = \{0\}$ Donc T_α est un automorphisme de $\mathcal{S}$.

5. (a) Si $T_\alpha(S) = I$ alors

$$1 = \det(T_\alpha(S)) = \det(\alpha)\det(S)\det(\alpha^\star) = \det(S).$$

La matrice doit vérifiée $\det(S) = 1$. De plus $S = \alpha^{-1}\alpha^{\star -1} = (\alpha^\star\alpha)^{-1}$.
Si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\alpha^\star\alpha = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b\overline{b} & \overline{a}c + \overline{b}d \\ \overline{c}a + \overline{d}b & c\overline{c} + d\overline{d} \end{pmatrix}$

$$t(S) = t(S^{-1}) = \frac{1}{2}(a\overline{a} + b\overline{+}c\overline{c} + d\overline{d}) > 0$$

car $\alpha \neq 0$.

(b) Si α est solution de (1) alors on a les relations

$$(a\ \ b)S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 1$$

$$S\alpha^\star = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Donc

$$S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons que α vérifie (3). Notons

$$\alpha S\alpha^\star = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

D'après la première relation de (3) on trouve $A = 1$. Comme $S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$, on trouve $(c\ d)S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 0$, soit $C = 0$. La matrice $\alpha S\alpha^\star$ est hermitienne, donc $B = \overline{C} = 0$. Finalement, $\det(S) = 1 = AD - BC = D = 1$. La matrice α est solution de (1).

(c) Un calcul donne

$$Q_S(v) = (t(S) - x(S))m\overline{m} + (y(S) + iz(S))m\overline{n} + \\ (y(S) - iz(S))\overline{m}n + (t(S) + x(S))n\overline{n}.$$

En multipliant par $t(S) - x(S)$ et en utilisant la relation

$$\det(S) = 1 = t^2(S) - x^2(S) - y^2(S) - z^2(S)$$

on obtient :

$$(t(S) - x(S))Q_S(v) = |(t(S) - x(S))m + (y(S) + iz(S))n|^2 + |n|^2.$$

Par ailleurs $t(S) > 0$ et $t^2(S) - x^2(S) = 1 + y^2(S) + z^2(S) > 0$ donc $(t(S) - x(S)) > 0$. Cela implique $Q_S(v) > 0$ si $v \neq 0$ et $Q_S(v) = 0$ si $v = 0$.

(d) Si S vérifie les conditions (2). Soit $v = (m, n) \neq 0$. D'après la question précédente $Q_S(v) > 0$. Notons $a = \frac{m}{Q_S(v)^{\frac{1}{2}}}$, $b = \frac{n}{Q_S(v)^{\frac{1}{2}}}$ et

$$\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}.$$

Les relations (3) sont satisfaites donc l'équation (1) a des solutions.

Partie II

1. $\langle S, S \rangle = \det(S)$

2. Un calcul donne

$$\langle T_\alpha(S+S'), T_\alpha(S+S') \rangle = \langle T_\alpha(S), T_\alpha(S) \rangle + \langle T_\alpha(S'), T_\alpha(S') \rangle + 2\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S') \rangle$$

Par ailleurs pour tout $M \in \mathcal{S}$ $\langle T_\alpha(M), T_\alpha(M) \rangle = \det(T_\alpha(M)) = \det(M)$. Donc on trouve $2\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S') \rangle = \det(S+S') - \det(S) - \det(S') = 2\langle S, S' \rangle$.

3. (a) Le produit de la matrice

$$\begin{pmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ -x(S_1) & -x(S_2) & -x(S_3) & -x(S_4) \\ -y(S_1) & -y(S_2) & -y(S_3) & -y(S_4) \\ -z(S_1) & -z(S_2) & -z(S_3) & -z(S_4) \end{pmatrix}^t$$

par la matrice

$$\begin{pmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{pmatrix}$$

est égale à la matrice

$$(\langle S_i, S_j \rangle)_{(i,j)}.$$

Donc

$$\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}^2 = (-1)^3 \Pi_{i=1}^4 \langle S_i, S_i \rangle \in \{1, -1\}$$

Le nombre $\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}^2$ est positif, il vaut 1. On a montrer les relations $\Pi_{i=1}^4 \langle S_i, S_i \rangle = -1$, et $|\det(S_1, S_2, S_3, S_4)| = 1$.

(b) Comme $\det(S_1, S_2, S_3, S_4) \neq 0$, S_1, S_2, S_3, S_4 sont indépendantes.

(c) Si toutes les matrices étaient de genre $-$, on aurai

$$1 = \Pi_{i=1}^{4}\langle S_i, S_i\rangle = -1$$

. Ceci est impossible, l'une au moins des matrices est de genre $+$.

(d)
$$\det T_\alpha = \det(T_\alpha(I), T_\alpha(X), T_\alpha(Y), T_\alpha(Z))$$

Un calcul montre que les vecteurs $T_\alpha(I), T_\alpha(X), T_\alpha(Y), T_\alpha(Z)$ sont des vecteurs deux à deux orthogonaux et de genre $+$ ou $-$. Donc d'après la question II 3. (a) $(\det T_\alpha)^2 = 1$.

4. L'une des matrices est de genre $+$, soit $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\det S_j = 1$. On a $t(S_j)^2 \geq 1$ (car $t^2(S_j) - x^2(S_j) - y^2(S_j) - z^2(S_j) = 1$) donc $t(S_j) \neq 0$. Si $t(S_j) > 0$ alors d'après la question I 5. (d) il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que $T_\alpha(S_j) = I$. Si $t(S_j) < 0$ alors $t(-S_j) > 0$ d'après la question I 5. (d) il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que $T_\alpha(-S_j) = I$ donc $T_\alpha(S_j) = -I$. Si deux des matrices sont de genre $+$, par exemple S_i et S_j avec $i \neq j$ alors $t(S_i)t(S_j) - x(S_i)x(S_j) - y(S_i)y(S_j) - z(S_i)z(S_j) = 0$ donc

$$(t(S_i)t(S_j))^2 \leq (x(S_i)x(S_j) + y(S_i)y(S_j) + z(S_i)z(S_j))^2 <$$
$$(x(S_i)^2 + y(S_i)^2 + z(S_i)^2)(x(S_j)^2 + y(S_j)^2 + z(S_j)^2)$$

D'où $(t(S_i)t(S_j))^2 < (1 - t(S_i)^2)(1 - t(S_j)^2)$ $t(S_i)^2 + t(S_j)^2 < 1$. Ceci est impossible car $t(S_i)^2 \geq 1$ et $t(S_i)^2 \geq 1$. On conclusion, nécessairement trois des matrices sont de genre $-$.

5.
$$\alpha\mathcal{R}\alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R}\ \ (1-t)\alpha + t\alpha' \in \Gamma$$
$$\alpha\mathcal{R}\alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R}\ \ \det((1-t)\alpha + t\alpha') = 1$$

L'application $t \to \det((1-t)\alpha + t\alpha')$ est un polynôme du second degré à valeur constante. Donc $\alpha\mathcal{R}\alpha'$ si et seulement si les coefficients devant t^2 et t du polynôme $t \to \det((1-t)\alpha + t\alpha')$ sont nuls.

(a) Un calcul donne $\det((1-t)\alpha + tI) = 1 + t(a + d - 2) + t^2(2 - d - a)$. On a $\alpha\mathcal{R}I$ si et seulement si $a + d = 2$.

(b) Un calcul donne $\det((1-t)\alpha + t\alpha') = (1-t) + t(ad' - cb')$. Finalement $\alpha\mathcal{R}\alpha'$ si et seulement si α' appartient à Γ (i.e. $ad' - cb' = 1$).

(c) $\det((1-t)\alpha + t\alpha'') = (1-t) + t(a'd - c'b)$. On a $\alpha\mathcal{R}\alpha''$ si et seulement si α'' appartient à Γ $(a'd - c'b = 1)$.

(d) Cherchons α' et α'' sous la forme $\alpha' = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ et $\alpha'' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$
Le système

$$\alpha'' \mathcal{R} I \quad \alpha \mathcal{R} \alpha' \quad \alpha' \mathcal{R} \alpha''$$

est équivalent à

$$ad' - cb' = 1 \; a'd' - c'b' = 1 \; a' + d' = 2$$

Ce système admet une solution par exemple si $c \neq 0$

$$d' = 0, b' = -\frac{1}{c}, a' = 2, c' = c$$

Si $c = 0$ alors $a \neq 0$ car $ad - bc = 1$. Une solution est alors

$$d' = \frac{1}{a}, b' = -\frac{1-a}{a}, a' = 2 - \frac{1}{a}, c' = \frac{a-1}{a}$$

(e) Notons $\alpha(t) = (1-t)\alpha + t\alpha'$ ou α' et α'' sont des solutions du système

$$\alpha'' \mathcal{R} I, \quad \alpha \mathcal{R} \alpha', \quad \alpha' \mathcal{R} \alpha''$$

un calcul montre que $|\det(T_{\alpha(t)})| = 1$. La fonction $t \to \det(T_{\alpha(t)})$ est une fonction polynômial en t continue vérifiant $|\det(T_{\alpha(t)})| = 1$ donc c'est une fonction constante. Cela prouve que $\det(T_\alpha) = \det(T_{\alpha(0)}) = \det(T_{\alpha(1)}) = \det(T_{\alpha'})$. De la même façon on montre que $\det(T_{\alpha'}) = \det(T_{\alpha''})$. Puis $\det(T_{\alpha''}) = \det(T_I) = 1$. En résumé

$$\det(T_\alpha) = \det(T_I) = 1.$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

CORRIGE 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ Si $b = a+1$, $u_n = \dfrac{a}{a+n+1}$

Pour $b \leq a+1$, $\prod_0^n (b+k) \leq \prod_0^n (a+1+k)$, donc $u_n \geq \dfrac{a}{a+n+1}$. Or la série de terme général $\dfrac{a}{a+n+1}$ diverge puisque $\dfrac{a}{a+n+1} \approx \dfrac{a}{n}$, d'après le critère d'équivalence concernant des séries à terme général positif. Le critère de comparaison sur les séries à termes positifs prouve que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

❷ La démonstration se fait facilement par récurrence.

❸ Comme $(b-a-1)\,S_n \leq a$, on a : $S_n \leq \dfrac{a}{b-(a+1)}$. La suite S_n est croissante et majorée, donc elle converge.

❹ $\lim\limits_{n\to+\infty} (b-a-1)\,S_{n-1} = (b-a-1)\,S$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} (n+b)u_n = a-(b-a-1)\,S$.

Supposons que $l = a-(b-a-1)\,S$ soit non nul, alors $u_n \approx \dfrac{l}{n+b}$, d'après le critère sur les séries dont le terme général garde un signe fixe. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ divergerait, ce qui est faux.

En conclusion $S = \dfrac{a}{b-a-1}$.

EXERCICE n° 2

❶ Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $a \in [0,1]$ telle que $f(a) > 0$ (par exemple, sinon on remplace f par $-f$). Comme f est continue, il existe un voisinage de a, à savoir il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$ f reste strictement positive.

❷ On construit un polynôme P qui vérifie $P(0) = 0, P(\alpha) = 1, P(\beta) = 1$ et $P(1) = 0$. Par exemple $P(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k$ avec les conditions:
$a_0 = 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 0,\ a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 = 1,\ a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 = 1$ dans la cas général où $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 1$.

❸ On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^\alpha f(x)(P(x))^n\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)(P(x))^n\,dx + \int_\beta^1 f(x)(P(x))^n\,dx \right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta f(x)(P(x))^n\,dx = +\infty$, (car $P(x) > 1$ sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$)

❹ $\displaystyle\int_0^1 f(x)(P(x))^n\,dx = \int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right)^n dx = \sum_{k=0}^{np} \left(\int_0^1 f(x) b_k x^k \right) = 0$ par hypothèse.

L'hypothèse $f \neq 0$ est donc absurde puisque l'on obtient une contradiction entre les questions 3 et 4. En conclusion $f \equiv 0$.

EXERCICE n° 3

❶ $f_n'(x) = x^{n-1}\sin nx + x^n \cos nx = x^{n-1}(\sin nx + x\cos nx)$

Sur l'intervalle $[-a, a]$, on a $\displaystyle\sup_x \left| f_n'(x) \right| \leq a^{n-1}(a+1)$ et $\sum a^{n-1}$ converge puisque $a \in]0,1[$.

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ est donc normalement convergente sur l'intervalle $[-a, a]$.

❷ Pour $x=0$, $f_n(0)=0$ et $\sum f_n(0)$ converge simplement.

Pour x fixé non nul, $\underset{n\to\infty}{Lim}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\underset{n\to\infty}{Lim}|x|\frac{n}{n+1}\left|\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}\right|=|x|<1$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$ vers une fonction f d'après le théorème de d'Alembert.

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)$ est normalement convergente (question 1), elle converge uniformément et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=f^{'}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $[-a,a]$.

❸ On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\sin nx+x^n\cos nx)=\frac{1}{x}\mathrm{Im}(\sum_{n=1}^{+\infty}x^ne^{inx})+\mathrm{Re}(\sum_{n=1}^{+\infty}x^ne^{inx})$$

Par ailleurs, $\sum_{n=1}^{+\infty}x^ne^{inx}=\sum_{n=1}^{+\infty}(xe^{ix})^n=\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}=\frac{x(\cos x-x)+ix\sin x}{(1-x\cos x)^2+(x\sin x)^2}$

En conclusion $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=\frac{x(\cos x-x)+\sin x}{(1-x\cos x)^2+(x\sin x)^2}$

❹ On vérifie que la dérivée de cette fonction $f(x)=Arc\tan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$ est égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'}(x)=\frac{x(\cos x-x)+\sin x}{(1-x\cos x)^2+(x\sin x)^2}$

EXERCICE n° 4

❶ Par hypothèse

$$\exists\eta>0,\ \forall x,\ x\in]0,\eta[\Rightarrow x^2\ f^{''}(x)\geq -k$$

Soit alors $\alpha>1$ fixé, et $x<\frac{\eta}{\alpha}$

$$f(\alpha x)=f(x)+(\alpha-1)x\ f^{'}(x)+\frac{(\alpha-1)^2}{2}x^2\ f^{''}(\sigma)$$

où $\sigma\in]x,\alpha x[$, on en déduit

$$x\ f^{'}(x)=\frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}-\frac{\alpha-1}{2}x^2\ f^{''}(\sigma)$$

mais

$$x^2 f''(\sigma)=\frac{x^2}{\sigma^2}\sigma^2\ f''(\sigma^2)\geq -k\frac{x^2}{\sigma^2}$$

donc

$$-\frac{(\alpha-1)}{2}x^2\ f''(\sigma)\leq\frac{\alpha-1}{2}k\frac{x^2}{\sigma^2}\leq\frac{\alpha-1}{2}k$$

Soit $\varepsilon>0$, on peut choisir $\alpha>1$ tel que $(\alpha-1)k<\varepsilon$ (k peut être supposé positif); pour α ainsi fixé $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}=0$, donc

$$\exists\eta_1<\eta,\ 0<x<\eta_1\ \Rightarrow\frac{f(\alpha x)-f(x)}{\alpha-1}<\frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite,

$$x\in\left]0,\eta_1\right[\Rightarrow xf'(x)<\varepsilon$$

Fixons maintenant $0<\alpha<1$, on a de même

$$x\ f'(x)=\frac{f(x)-f(\alpha x)}{1-\alpha}+\frac{1-\alpha}{2}x^2\ f''(\sigma),\quad \alpha x<\sigma<x$$

avec

$$\frac{1-\alpha}{2}x^2\ f''(\sigma)\geq -\frac{1-\alpha}{2}k\frac{x^2}{\sigma^2}\geq -\frac{1-\alpha}{2\alpha^2}k$$

On peut choisir α tel que $\frac{1-\alpha}{\alpha^2}k<\varepsilon$, comme ci-dessus on obtient $\eta_2<\eta$ tel que

$$0<x<\eta_2\ \Rightarrow xf'(x)>-\varepsilon$$

On a donc

$$\forall x\in\left]0,Inf(\eta_1,\eta_2\right[\ ,\ \left|xf'(x)\right|<\varepsilon$$

et la propriété est démontrée.

❷ Soit $\varphi(x)=f(x)-\frac{x}{3}f'(x)$ et $\varphi(0)=0$

Par dérivation, on obtient :

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}f'(x)-\frac{x}{3}f''(x)\ \text{et}\ \varphi'(0)=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}f''(x)-\frac{x}{3}f'''(x)\ \text{et}\ \varphi''(0)=0$$

$$\varphi'''(x)=-\frac{x}{3}f^{(4)}(x)\ \text{et}\ \varphi'''(0)=0$$

D’après le théorème des accroissements finis :

$$\left|f^5(x)\right|\leq M\Rightarrow\left|f^{(4)}(x)-f^{(4)}(0)\right|\leq M|x|$$

d’où

$$\forall x\in R,\ \left|\varphi'''(x)\right|\leq M\frac{x^2}{3}$$

Par application successive des accroissements finis, on obtient alors

$$\left|\varphi''(x)-\varphi''(0)\right|=\left|\varphi''(x)\right|\leq M\,\frac{|x|^3}{9}$$

$$\left|\varphi'(x)-\varphi'(0)\right|=\left|\varphi'(x)\right|\leq M\,\frac{x^4}{36}$$

$$\left|\varphi\ (x)-\varphi\ (0)\right|=\left|\varphi\ (x)\right|\leq M\,\frac{|x|^5}{180}$$

En appliquant ceci à la fonction définie par : $f(x)=M\,\dfrac{x^5}{120}$ pour laquelle $f^{5}(x)=M$, on obtient :

$$\varphi(x)=\frac{x^5}{120}M-\frac{x^5}{72}M=\frac{x^5}{180}M$$

La valeur $\lambda=\dfrac{1}{180}$ est donc la meilleure valeur possible.

EXERCICE n° 5

❶ Supposons que la suite (x_n) soit croissante, alors :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leq\frac{1}{n}nx_n=x_n$$

Pour n fixé et $m>n$:

$$u_m=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{m}x_k\geq\frac{1}{m}\sum_{1}^{n}x_k+\frac{m-n+1}{m}x_n$$

Puis quand $m\to\infty$, $\lim\limits_{m\to\infty}u_m=l\geq x_n$

donc $l\geq x_n\geq u_n$ et par passage à la limite $(x_n)\to l$

❷ La suite $(x_n)=(-1)^n$ n'est pas monotone et ne converge pas, pourtant $u_n=\dfrac{-1+(-1)^n}{n}$ tend vers zéro.

EXERCICE n° 6

❶ f est continue en 0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

En effet, si $x \in I - Q$, on a : $f(x) = \dfrac{x}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$ et

si $x \in I \cap Q$, $\left|\dfrac{p}{q}\right| < \alpha \Rightarrow |f(x)| = \left|\dfrac{x}{1+x+\frac{1}{q}}\right| \le |x|$

❷ Soit $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0} \in I \cap Q^*$,

$$\underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I-Q}}{Lim} f(x) = \underset{x \to x_0}{Lim} \frac{x}{1+x} = \frac{x_0}{1+x_0} \neq f(x_0) = \frac{x_0}{1+x_0+\frac{1}{q_0}}$$

donc f n'est pas continue sur $I \cap Q^*$

❸ Montrons que f est continue sur $I - Q$

f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si $x \in I - Q$, la relation est vérifiée car f restreinte à $I - Q$ est continue.

Si $x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q^*$, alors

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{1+x+\frac{1}{q}} - \frac{x_0}{1+x_0}\right| = \frac{|x - x_0 - x_0/q|}{(1+x_0)(1+x_0+1/q+x+x_0)} \le \frac{|x-x_0| + |x_0|/q}{1/2(1+x_0)^2}$$

dès que $|x - x_0| \le 1/2(1+x_0)$, alors

$$1 + x_0 + \frac{1}{q} + x - x_0 \ge 1 + x_0 + \frac{1}{q} - |x - x_0| \ge \frac{1}{2}(1+x_0)$$

Considérons les rationnels tels que $\dfrac{|x_0|}{q} \ge \dfrac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon$ ou $q \le \dfrac{4|x_0|}{(1+x_0)^2 \varepsilon}$

Ces rationnels sont en nombre fini dans tout intervalle borné. Soit β le minimum de la distance de x_0 à ces points. On a pour $x \in I \cap Q^*$,

$$|x - x_0| < Inf\left(\frac{1}{2}(1+x_0), \beta, \frac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon\right) = \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Concours CESD 2002

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

1. (a) Comme la matrice M est symétrique, elle est diagonalisable. On calcule les valeurs propres et vecteurs propres de $(1+p)M$, et on trouve :

$$(1+p)M = ADA^{-1}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$M^n = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1-p}{1+p})^n \end{pmatrix} A^{-1}$$

ce qui donne pour $n \to \infty$:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Les deux proportions sont égales. En effet, on peut raisonner sans calcul : après l'opération, la partie de bière dans la bouteille de vin prend un certain volume V qui avant était occupé par du vin. Or, lors de l'opération on ne perd pas de liquide et on a encore la même quantité dans chaque bouteille. Donc c'est précisément ce volume V de vin qui se trouve maintenant dans la bouteille de bière. (On peut aussi passer par un calcul, voir (c).)

(c) Soit a_n (resp. b_n) la proportion de bière dans la bouteille de vin (resp. de bière) après la n-ième opération. Evidemment, au départ, $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Détaillons la $(n+1)$-ième opération. En transvasant une proportion p, $0 < 1 < p$, de la bouteille de vin dans la bouteille de bière, on obtient encore la proportion a_n dans la bouteille de vin et la proportion $\frac{1}{1+p}(b_n + pa_n)$ dans la bouteille de bière. En retransvasant on obtient alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1-p)a_n + \frac{p}{1+p}(b_n + pa_n) = \frac{1}{1+p}(a_n + pb_n), \\ b_{n+1} &= \frac{1}{1+p}(b_n + pa_n). \end{aligned}$$

En écriture matricielle avec la matrice A de la partie (a), cela devient :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Donc avec le résultat de (a) on trouve $\lim a_n = \lim b_n = 1/2$.

2. Le chemin direct pour le bateaux est un grand cercle sur la terre, donc un cercle de circonférence 40000 km, tandis que le chemin direct pour le sous-marin est la droite entre les deux îles. On fera une esquisse du grand cercle, où O désigne le centre du cercle, M et R les deux îles, S le milieu du segment de droite entre M et S, et α l'angle MOR. On a

$$\begin{aligned} \alpha : (2\pi) &= 150 : 40000, \\ OM &= 40000\,\mathrm{km} : (2\pi), \\ OS : OM &= \cos(\alpha/2). \end{aligned}$$

La profondeur demandée est alors

$$\begin{aligned} OM - OS &= OM - OM\cos(\alpha/2) = OM(1 - \cos(\alpha/2)) \\ &= 20000\,\mathrm{km}/\pi(1 - \cos(3\pi/800)) = 441,78\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

C'est donc beaucoup plus que la plupart parmi nous auraient estimé...

3. (a) Si les deux fonctions sont solutions, on doit avoir $ax^2 - 2x = -b$ et $ax^3 - 3x^2 = -b$, donc $a(x^3 - x^2) - 3x^2 + 2x = 0$, d'où

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{3x-2}{x(x-1)}, \\ b &= -\tfrac{x^2}{x-1}. \end{aligned}$$

(b) L'équation différentielle $(*)$ est linéaire, de premier ordre, et sur chaque intervalle I_j le coéfficient de y' ne s'annulle pas. Comme x^2 et x^3 sont deux solutions linéairement indépendantes, nous savons alors par la théorie des équations différentielles linéaires que la solution générale sur I_j est donnée par $y_j = x^2 + \lambda_j(x^3 - x^2)$, où $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$.

(c) D'après ce qui précède la restriction à l'intervalle I_j d'une solution f doit être de la forme $y_j = x^2 + \lambda_j(x^3 - x^2)$. La condition $f(-1) = 0$ détermine $\lambda_1 = -1/2$, et la condition $f(2) = 0$ détermine $\lambda_3 = -2$. Maintenant il faut choisir λ_2 convenablement, pour que la "recollée" f soit de classe C^1. D'abord par continuité il faut que $y_1(0) = y_2(0)$ et $y_2(1) = y_3(1)$. On voit immédiatement que ces deux conditions sont vérifiées pour tous les choix de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Pour que f soit continument différentiable en 0 il faut et il suffit que $y_1'(0) = y_2'(0)$. Mais encore ici $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ pour tous les choix de λ_1, λ_2. En revanche la dernière condition, $y_2'(1) = y_3'(1)$, donne $2 + \lambda_2 = 2 + \lambda_3$, donc $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. La fonction demandée existe alors et elle est unique.

(d) Pour avoir une fonction de classe C^2 on a les 2 conditions de "recollement" supplémentaires $y_1''(0) = y_2''(0)$ et $y_2''(1) = y_3''(1)$. Elles s'écrivent $2(1-\lambda_1) = 2(1-\lambda_2)$ et $2(1+2\lambda_2) = 2(1+2\lambda_3)$. Donc les conditions entrainent que pour toute solution de $(*)$ de classe C^2 on doit avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, et ceci n'est pas vérifié pour l'unique solution de classe C^1 trouvée ci-dessus. Donc il n'y a pas de telle solution dans la classe C^2.

4. Une condition nécessaire pour que l'espace des solutions a la dimension 1, est que la matrice du système homogène associé a le rang 2. Cette matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $\det(M) = pqr - pq - pr - qr$. Pour trouver le rang de M avec $0 \leq p, q, r \leq 2$, il y a plusieurs cas à considérer :
- Au moins un parmi les p, q, r est nul.
  Si $p = q = r = 0$, on voit immédiatement que rg(M)=1.
  Si précisément 2 nombres parmi p, q, r sont nuls, alors $\det M = 0$ et il y a une sous-matrice 2×2 de rang 2. Donc rg(M)=2.
  Si précisément 1 nombre parmi p, q, r est nul, alors $\det M \neq 0$. On a donc rg(M)=3.
- $p, q, r \geq 1$ et au moins un parmi les p, q, r vaut 1.
  Supposons par exemple $p = 1$. Alors $\det M = -q - r < 0$, donc rg(M)=3.
- $p = q = r = 2$. Alors $\det(M) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \neq 0$, donc rg($M$)=3.

Ainsi l'espace vectoriel du système homogène a la dimension 1 précisément quand (p, q, r) est $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ou $(0, 0, 2)$. L'espace des solutions du système inhomogène est alors de dimension 1 précisément si (p, q, r) est l'un des ces 6 triplets et si le système inhomogène possède une solution, i.e., si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-r & 0 \end{pmatrix}.$$

a le même rang que M, donc est de rang 2. C'est le cas seulement pour $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ et $(p, q, r) = (2, 0, 0)$.

5. La fonction continue sin est Riemann-intégrable. La définition de l'intégrabilité nous donne :

$$\frac{2}{\pi} = \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi} \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\pi/n)}{n}.$$

6. Les théorèmes d'addition donnent :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos x} &= \sqrt{1-\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}\\ &= \sqrt{2\sin^2(x/2)}\\ &= \sqrt{2}\,|\sin(x/2)|.\end{aligned}$$

Donc on a comme primitive $-2\sqrt{2}\cos(x/2)$ sur $[0,2\pi]$ et $2\sqrt{2}\cos(x/2)$ sur $[-2\pi,0]$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{3\pi/2}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3\pi/2}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\sqrt{2}(\cos(0)-\cos(-\pi/2)-\cos(3\pi/4)+\cos(0))\\ &= 2\sqrt{2}(2+1/\sqrt{2})\\ &= 2(1+2\sqrt{2}).\end{aligned}$$