ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Montesquieu (1689-1755) écrivain français en évoquant le bon sens, a écrit ceci ***«j'aime les paysans, ils ne sont pas assez savants pour raisonner de travers».***

Que pensez vous de cette phrase assez provocante ? Est-elle encore d'actualité ?

SUJET n° 2

A l'aide d'exemples précis expliquez ce proverbe EWE du Togo ?

«Un mauvais frère est comme une branche de rônier, on ne peut pas le refuser totalement car il faut penser aux jours de pluie».

SUJET n° 3

Que vous inspire ce proverbe Camerounais ?

«L'amitié est une trace qui disparaît dans le sable si on ne la refait pas sans cesse».

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

❶ Déterminer les valeurs et vecteurs propres de cette matrice A

❷ Montrer que A est semblable à une matrice M de la forme $M = \Delta + J$, où Δ est une matrice diagonale et J vérifie $J^3 = 0$. On précisera la matrice de changement de base.

❸ Calculer A^n pour tout entier naturel n.

❹ On considère la suite $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ définie par $u_0 = (1,1,1)$ et $u_{n+1} = Au_n$. Etudier la convergence de cette suite.

EXERCICE n° 2

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

❶ Calculer le produit $A' A$, où A' désigne la transposée de A.

❷ En déduire les valeurs propres de A.

EXERCICE n° 3

Soit f une application de R^3 dans R^2 définie par :

$$f(x,y,z) = (x+y-z, x-2y)$$

❶ Déterminer le noyau et l'image de f

❷ Déterminer la projection orthogonale p de $u=(1,1,1)$ sur le noyau de f

❸ Déterminer la transformée de u par la rotation vectorielle r d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe Oz

❹ Quelle est la transformée de u par la composée des deux applications précédentes, à savoir $p \circ r$ et $r \circ p$.

EXERCICE n° 4

Soit E l'espace vectoriel des polynômes, à coefficients réels, d'une variable réelle X et de degré inférieur ou égal à $2n$.
On note f l'application définie sur E par : $f(P) = (X^2-1)P' - 2(nX+a)P$, où a est un réel non entier et P appartient à E.

❶ Vérifier que f est un endomorphisme de E

❷ Déterminer les valeurs et vecteurs propres f

❸ f est-elle diagonalisable ? f est-elle inversible ?

❹ En déduire que tout polynôme P de E s'écrit sous la forme

$P(X) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$, où α_k est un réel.

EXERCICE n° 5

Soit A une matrice d'ordre (n,p) à coefficients réels, de rang égal à p, où $p<n$. On note D une matrice diagonale d'ordre n et on pose: $M = AA' + D$.

❶ On suppose que D est la matrice nulle. Etudier la diagonalisation de M et montrer que $A = PD_1$ où P est une matrice orthogonale et D_1 une matrice diagonale.

❷ On suppose maintenant que $D = \sigma^2 I_n$. Etudier la diagonalisation de M et montrer que $A = P_1 D_2$ où P_1 est une matrice orthogonale et D_2 une matrice diagonale.

❸ On suppose maintenant que D est définie positive.
Montrer que M est inversible.
Exprimer M^{-1} en fonction de A, A', D et leurs inverses.

EXERCICE n° 6

Soient A et B deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre *n*.

❶ Montrer que la matrice $AB - BA$ n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

❷ On suppose de plus que A et B sont définies positives, montrer que $Tr(AB) > 0$, où Tr désigne la trace de la matrice.

❸ Soit M une matrice antisymétrique réelle.
Montrer que la matrice $I + M$ est inversible.
Montrer que $(I - M)(I + M)^{-1}$ est orthogonale.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN
AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Sujet : Vous résumerez en 350 mots au maximum le texte suivant de Philippe Chalmin publié dans la revue du Comité national des conseillers du commerce extérieur en février 2000.

EN HAUSSE TOUTE !…SAUF LES PRODUITS DE L'AGRICULTURE.

Sur les marchés mondiaux, 1999 a été une bien curieuse année, particulièrement contrastée, marquée par une forte reprise de certains produits et la poursuite du marasme en affectant d'autres. Le clivage est d'ailleurs assez simple : d'un côté à la hausse l'énergie, les métaux et les produits industriels, de l'autre à la baisse l'agriculture qu'elle soit tempérée ou tropicale. Il y a donc eu deux conjonctures radicalement différentes en 1999 dans le monde des matières premières qui sont le reflet des tensions économiques mondiales : d'un côté, la fin de la crise et la reprise très vive des économies asiatiques, de l'autre la persistance du malaise agricole dont l'échec des négociations de Seattle est une des illustrations. Cependant, avant d'illustrer ces deux versants de la conjoncture, on ne peut éviter d'évoquer le cas du pétrole, le marché en valeur de loin le plus important dont la violente reprise est, sans conteste, l'événement le plus marquant de 1999.

Dans son dernier numéro de l'année, l'hebdomadaire anglais *The Economist* revenait sur sa " belle " erreur de prévision de l'année 1999. En mars 1999, la " une " annonçait en effet l'effondrement attendu du prix du pétrole et s'aventurait même à prédire un cours de 5 dollars le baril ! Sans aller jusque-là, la plupart des analystes anticipaient des prix moyens pour l'année dans la fourchette de 12 à 14 dollars le baril (pour un prix moyen 1998 du baril de Brent de 12,7 dollars). Notre propre prévision était de 13 dollars. Tout ceci se passait bien sûr avant la réunion de l'OPEP du 22 mars 1999. On connaît la suite : le pétrole termine 1999 autour de 26 dollars le baril, soit près de trois fois le point le plus bas atteint en février. Par l'importance de ce retournement peu ou pas anticipé, le pétrole aura été la " star " incontestée de l'année. Avec un peu de recul, la hausse s'explique assez bien, quoique son ampleur continue de surprendre : l'élément déclencheur en a été bien entendu la décision prise le 22 mars par les membres de l' OPEP et quelques-uns des principaux " nopeps ". Au total, ce sont plus de 2 millions de barils/jour (bj) qui devraient être retirés du marché dont 1,7 millions de bj pour les seuls membres de l'OPEP (585 000 bj pour l'Arabie Saoudite, 264 000 bj pour l'Iran). Depuis sa malheureuse décision de novembre 1997 d'augmentation de son quota (le baril valait alors 20 dollars), l'OPEP avait multiplié réunions et engagements sans parvenir à enrayer la chute des cours qui avaient même frôlé la barre des 9 dollars en décembre 1998 et étaient encore inférieurs à 10 dollars en février 1999. Même au lendemain de la décision de Vienne, si l'on ne parlait plus de cours de 5 dollars, les analystes affichaient un scepticisme certain et révisaient leurs prévisions d'un ou deux dollars à peine : la Banque mondiale, par exemple, anticipait au début de mai un prix moyen 1999 de 14, 5 dollars le baril (et de 16,5 dollars pour 2000). D'ailleurs, après une première réaction positive, les marchés rechutèrent brutalement en mai. Ce n'était là, en fait, qu'un repli technique puisque du début juin à la fin de l'année la hausse a été pratiquement continue, le baril passant de 15 à 26 dollars.

Un temps, on put penser que le déclenchement de la guerre au Kosovo avait un impact psychologique sur le marché, le pétrole remplaçant en quelque sorte l'or comme valeur refuge. Mais la guerre terminée, il fallut bien convenir que la hausse se poursuivait et en venir alors un peu aux fondamentaux.

Absence de défection des pays producteurs La première surprise fut que les pays producteurs, pour une fois, ont tenu leurs engagements. Il est vrai que la situation devenait pour eux dramatique : de janvier 1998 à mars 1999, les pays membres de l'OPEP ont perdu 82 milliards de dollars de manque à gagner. Ce n'était plus le moment de tricher, et comme bien souvent la solidarité est née de la misère, avec l'aide bienveillante des Etats-Unis, directement intéressés en tant que producteurs et gardiens de l'ordre international au Proche-Orient, à ce que le marasme des prix ne dure pas trop.

Dès avril 1999, l'Agence internationale de l'énergie (AIE) calculait un taux de réalisation des engagements de réduction des membres de l'OPEP de 83 %, soit d'un mois sur l'autre une diminution de 1,5 millions de bj de l'offre de l'organisation. Par la suite, le taux de réalisation de l'OPEP a évolué selon les mois entre 85 et 95 %. Même si l'on peut estimer que la Russie n'a pas tenu son modeste engagement (100 000 bj) et a même augmenté ses exportations, ce sont 1,8 à 2 millions de bj qui ont en quelque semaines disparu des bilans de l'offre. Ajoutons à cela, fin novembre, le retrait temporaire de l'Irak et nous avons une des explications de la tension du marché à la fin de 1999.

Une demande plus soutenue Mais la deuxième surprise est venue de la demande. Début 1999, celle-ci, d'après l'AIE, était inférieure à 74 millions de bj au niveau mondial. La remarquable santé des économies occidentales, et surtout la fin de la crise en Asie, se sont traduites par une forte poussée qui amène l'AIE à anticiper pour le premier trimestre 2000 une demande moyenne de 78 millions de bj, le gros de la consommation supplémentaire se trouvant en Asie.

Dès lors, l'arithmétique est simple : à peu près 2 millions de bj de production en moins et une demande qui aura progressé sur l'année de 3 millions de bj environ. Cela fait un mouvement de quelque 5 millions de bj à comparer à un excédent de 1,5 millions de bj en 1998. La hausse, la flambée même avec le zeste d'excitation propre à un marché aussi sensible et symbolique que celui du pétrole, devenaient évidentes, tellement évidentes que personne ne les avait anticipées. Où allons-nous maintenant ? Un premier constat s'impose : l'absence quasi totale de réaction inflationniste. Le pétrole a perdu de son pouvoir maléfique sur les économies ou du moins, en un temps de baisse des prix industriels et des services, le doublement du prix du baril est presque passé inaperçu. Cela veut donc dire que les autorités monétaires, surtout aux Etats-Unis, peuvent rester sans inquiétude et se réjouir au contraire de l'impact favorable de la hausse du pétrole sur l'humeur de l'électeur du Texas, ce qui en année électorale a son importance. En 2000, les Etats-Unis ne chercheront donc pas à jouer la baisse du prix du pétrole. La demande devant rester soutenue, tout dépendra de la stratégie de l'OPEP lors de sa prochaine réunion de mars 2000.

Les réductions de quotas sont en effet valables un an jusqu'au 22 mars. La hausse des prix a incontestablement cimenté la cohésion de l'organisation. Son intérêt à moyen terme est de " gérer " le prix à des niveaux moins tendus, la fourchette idéale restant celle des 15/20 dollars le baril qui limite l'intérêt de projets comme les pétroles de la Caspienne dont on sait l'importance des coûts logistiques.

Notre prévision 2000 (20 dollars le baril de Brent) intègre ce scénario raisonnable qui serait optimal pour les producteurs. Mais on peut avoir aussi une vision plus chaotique de prix tendus jusqu'à 30 dollars le baril, impliquant par la suite une rechute encore plus brutale. L'OPEP a une chance de prendre la main sur le marché et de gérer sa position de manière optimale à moyen terme. Saura-t-elle le faire, c'est là l'une des grandes interrogations sur les marchés mondiaux pour l'an 2000.

EUPHORIES INDUSTRIELLES

De manière moins spectaculaire que pour le pétrole, 1999 aura par ailleurs été marquée par le retournement des marchés des biens intermédiaires destinés aux filières industrielles : métaux non ferreux, acier, pâte à papier, chimie lourde, semi-conducteurs et, dans une moindre mesure, même caoutchouc et laine. Pour la plupart d'entre eux, la période charnière s'est située vers mai-juin 1999, ce qui correspond exactement à la perception de la fin de la crise économique qui, née en Thaïlande en juillet 1997, a ravagé pendant deux ans l'Asie et l'Amérique latine. En réalité, le creux de la crise fut atteint – en Asie au moins - en 1998, mais l'accélération de la reprise est éloquente à partir du deuxième trimestre 1999, se traduisant par une augmentation spectaculaire de la demande qui a rapidement asséché les surcapacités existantes, puis vers la fin de l'année augmenté les besoins à l'importation.

Plusieurs produits illustrent parfaitement ce sursaut de la demande : il s'agit en premier lieu du nickel, dont le prix est passé en quelques mois de 4 500 à 8 000 dollars la tonne sous le choc d'une forte croissance de la demande d'acier inoxydable. Plus spectaculaire encore, la flambée des grandes chimiques, dont le prix a doublé sous l'effet certes de la hausse du pétrole, mais surtout de la demande asiatique. Quant aux semi-conducteurs, dont la surproduction dès 1996 avait joué un rôle non négligeable dans le déclenchement de la crise asiatique de 1997, leur marché s'est brutalement retourné durant l'été grâce au développement des nouvelles applications de la téléphonie mobile. Sur le marché américain des ferrailles, c'est là aussi la demande asiatique (coréenne en l'occurrence) qui a provoqué le réveil du marché à partir de l'été. Il en est de même pour les produits de la pâte et du papier pour lesquels est même apparue une demande indienne. On pourrait citer aussi le cuir, avec la demande des tanneries asiatiques, et le caoutchouc.

C'est donc l'intensité de la demande qui explique cette inversion de tendance de 1999. Il faut aussi bien sûr tenir compte des réductions de production liées bien souvent aux restructurations en cours chez les grands acteurs internationaux. Qu'il s'agisse de l'aluminium et du cuivre, du papier et des semi-conducteurs, le mouvement de fusions/acquisitions s'est poursuivi à l'échelle mondiale et s'est traduit par nombre de fermetures de mines et d'usines. Enfin, tant la Chine que la Russie ont moins pesé sur les marchés, les incertitudes russes ayant même provoqué la flambée des prix du rhodium et du palladium (mais dans ce dernier cas, les besoins de l'industrie automobile pour les pots catalytiques ont joué un rôle essentiel).

Ce mouvement de reprise a été bien sûr fort inégal suivant les filières et les produits : parmi les métaux, le nickel, l'aluminium et le zinc en ont été les principaux bénéficiaires alors que les prix du plomb ne bougeaient guère et que le réveil du marché de l'étain en fin d'année était surtout dû à l'activité des fonds au LME (London Metal Exchange). Quant au cuivre, il est de tous les produits de base celui pour lequel le niveau d'investissement sur la dernière décennie a été le plus soutenu et dont le prix est resté bien au-dessus de la plupart des coûts de production. Ailleurs, la hausse se cantonne encore à l'aval des filières : ainsi, les ferrailles précèdent l'acier qui s'est surtout illustré en 1999 par le nombre record de procédures antidumping qui ont été déposées presque dans tous les pays du monde, à commencer par les Etats-Unis et l'Europe. De même, la hausse de la pâte à papier ne s'est-elle pas encore transmise à toutes les " sortes " de papier. Le marché de l'alumine (dont le prix est passé de 150 à 380 dollars la tonne) précède aussi celui de l'aluminium. Cela explique nos prévisions optimistes pour l'an 2000. Le mouvement de hausse est en effet à peine entamé et devrait se poursuivre dans un climat conjoncturel partout favorable (même peut-être au Japon…), se traduisant par une croissance soutenue de la demande : + 3,5 % pour l'aluminium, + 3,7 % pour le zinc, + 2,6 % pour l'étain par exemple. La hausse est à peu près partout à l'ordre du jour, sauf dans certains cas où l'on parlera plutôt de consolidation. Sur nombre de marché (pâte à papier, nickel), la principale crainte est que la flambée ne soit trop vive, la hausse trop violente et que tout ceci ne se termine comme une bulle spéculative. Voilà en tout cas un optimisme qui tranche avec le pessimisme agricole.

MARASMES AGRICOLES ET POLITIQUES

Qu’il est loin le temps où l’on célébrait, dans l’euphorie de prix mondiaux soutenus, la fin des politiques agricoles.1995-1997 fut une période euphorique sur les marchés alimentaires et les réformes tant de la politique américaine (le Fair Act de 1996) que la politique agricole commune (le projet d’Agenda 2000) permettaient de penser que l’époque du dirigisme politique en matière agricole était terminée. Avec plus ou moins de bonheur, on s’orientait vers un découplage des aides à l’agriculture, celles-ci n’étant plus liées directement à la production, mais rémunérant en fait les autres fonctions de l’agriculture vis-à-vis de la société, un concept développé sinon appliqué en Europe sous le nom de " multifoncionnalité ". C’est dans ce sens qu’allaient nombre de travaux d’études et de recherches et même quelques premières décisions législatives comme la loi d’orientation agricole française de 1999. Mais ce qui était possible en période de cours mondiaux soutenus est devenu une douce utopie lorsque l’effondrement des prix a commencé à peser sur un monde agricole qui, s’il a perdu beaucoup de son influence politique directe, demeure un enjeu électoral non négligeable.

La chute des cours à partir de 1997 était liée à deux facteurs : d’une part, la fin du phénomène climatique El Niño, et un rebond des productions mondiales, d’autre part la désolvabilisation de quelques-uns des grands débouchés agricoles en Asie, en Russie et même en Amérique latine. Du jour au lendemain, la Russie se mit à demander de l’aide alimentaire, l’Indonésie et même la Corée du Sud des crédits d’achat. De 250 dollars la tonne au plus haut en 1996, les prix du blé chutèrent à moins de 100 dollars.

Les marchés avaient déjà connu des périodes de ce type, mais c’était la première fois depuis 1933 que les agriculteurs américains subissaient de plein fouet la rigueur des prix. Jusque-là, ils avaient bénéficié de *deficiency payments*, c’est-à-dire de la différence entre le prix d’objectif et la réalité du marché. Certes, ils bénéficient maintenant d’une aide directe forfaitaire et ils n’ont plus à se soumettre aux contraintes du gel des terres. Mais la chute des prix des céréales, du soja, du coton ou de la viande porcine trouva un écho favorable dans le monde politique, surtout à une période où la Maison Blanche était fragilisée par l’affaire Lewinski et où les Républicains du Congrès, traditionnellement opposés aux cadeaux agricoles, étaient eux-mêmes affaiblis par la chute de Newt Gingricht. Dès 1998, ce sont 12 milliards de dollars qui allèrent en paiement direct à l’agriculture, près du double de ce qui était prévu initialement. Et en 1999, on doubla encore la mise à 22,5 milliards de dollars. Une de ces aides au moins a eu un effet très négatif sur les marchés : il s’agit du *loan deficiency payment* (LDP). La loi agricole de 1996 avait en effet conservé des prix d’intervention appelés *loan rate* et qui, depuis des décennies, jouaient un rôle de plancher pour le marché de Chicago et donc pour marché mondial. Mais au lieu de déclencher à ces niveaux des stockages publics, on avait prévu de payer directement la différence sous forme de LDP. En 1999, il y a eu 6,6 milliards de dollars de paiements sous forme de LDP et les prix ont crevé les planchers des *loan rate*, en particulier pour le maïs et le soja. Des mécanismes de même ordre ont eu un effet tout aussi dépressif sur les marchés d’exportation du riz et du coton.

Le facteur politique américain a été incontestablement l'élément dépressif des marchés d'agriculture tempérée en 1999. Jusque-là, les Etats-Unis avaient toujours joué un rôle modérateur. Le changement, dans un contexte de surenchère politique à l'approche d'échéances électorales majeures et incertaines, n'en a été que plus traumatisant pour des marchés qui ont perdu un de leurs repères.

En face des Etats-Unis, l'Europe en a profité pour faire de l'immobilisme. La nouvelle réforme de la PAC (Politique Agricole Commune) d'avril 1999 s'est certes prononcée pour la baisse des prix d'intervention des céréales et de la viande bovine (à compter du 1er juillet 2000), mais celle-ci est compensée par un système complexe d'aides directes. L'Europe a par ailleurs joué de l'outil classique de l'aide alimentaire pour désengorger certains de ses marchés en crise et exporter ses problèmes. Si la guerre agricole n'est pas ouvertement déclenchée entre Europe et Etats-Unis, on est en pleine phase d'escarmouches sur nombre de marchés, ce qui bien entendu pèse sur les prix. Ceux-ci ont été en 1999 tous orientés à la baisse, les chutes les plus fortes étant à mettre au compte du soja, et surtout de la composante huile qui a entraîné dans sa baisse tous les oléagineux, du coton aux céréales secondaires. Les marchés de viandes (porcine et de volailles) ont aussi souffert, la seule exception étant la viande bovine dans la zone " Pacifique " (c'est-à-dire le flux Etats-Unis et Océanie vers Asie) qui a bénéficié dans les derniers mois de 1999 de la reprise de la demande asiatique.

L'échec de Seattle n'est pas dû à l'agriculture, quoiqu'on ait voulu le faire croire. Il est en effet très probable qu'avec une nuit de négociations supplémentaire, Américains, groupe de Cairns(*). et Européens seraient parvenus à un texte suffisamment vague et ambigu pour satisfaire tout le monde. Mais en l'absence d'accord, et donc de négociations, 1999 risque fort de ressembler à cette année 2000 qui nous attend : des aides américaines au moins aussi importantes dans un climat envenimé par quelques conflits bien médiatisés avec l'Europe et donc des prix toujours aussi déprimés sauf si quelque aléa météorologique ne venait bouleverser la donne. Mais au vu de l'état des stocks chez les grands exportateurs, il faudrait autre chose qu'une simple sécheresse aux Etats-Unis (un classique sur le marché des grains) pour bouleverser des fondamentaux aussi déprimés. Les prix agricoles devraient donc en l'an 2000 rester pour l'essentiel à leurs faibles niveaux actuels, pour les plus optimistes n'attendant la reprise qu'en 2001 (pour le coton par exemple). Autrefois, on disait aux Etats-Unis : farm the programs, not the products ("cultivez les programmes publics et non les produits"). Convenons que la prévision en matière de politique agricole est toujours aussi aléatoire.

Philippe Chalmin (CCE International)

(*) Créé en 1986 à l'initiative de l'Australie, le groupe de Cairns regroupe une quinzaine de pays exportateurs de produits agricoles

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
DUREE : 2 HEURES

Calculatrice élémentaire permise.
Les 7 exercices sont indépendants.

1. Considérons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles
$$M_1 = \{(n, n^2, n^3) : n = 0, 1, 2, \ldots\},$$
$$M_2 = \{(n+1, 2n+1, 3n+1) : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$
Soit $V_k, k = 1, 2$, le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant M_k. Calculer la dimension de V_1 et celle de V_2.

2. Une entreprise prend un prêt de 100 000 FF pour un taux d'intérêt de 4%. Le prêt est d'une durée de 5 ans et le montant du remboursement annuel est constant. Quel est ce montant ?

3. Soient c et a_0 deux réels strictement positifs. On définit une suite par récurrence :
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n}, n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer sa limite.

4. Soit D l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \geq 0, y \geq 0$ et $x+y \leq \pi$. On définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$.
   (a) Dessiner l'ensemble D.
   (b) Déterminer tous les minima de f.
   (c) Prouver que f n'a qu'un seul maximum (a, b). Le déterminer et donner la valeur de f en ce point.
   (d) Donner la série de Taylor de f au maximum (a, b) jusqu'à l'ordre 2.

5. La fonction $f(x) = (\sin x \cos x)^{-1}$, est-elle intégrable sur l'intervalle $[\pi/6, \pi/3]$? Si oui, calculer l'intégrale
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}.$$

6. Les limites suivantes existent-elles ? Si oui, donner les valeurs.
   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)}$$
   (b)
   $$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

7. Comment faut-il choisir le rayon r et la hauteur h d'un cylindre de volume donné V pour que sa surface S soit minimale ? (La surface S du cylindre inclut aussi les deux disques en bas et en haut.)

SESSION D' AVRIL 2001

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Les problèmes I et II sont indépendants, ils sont de longueurs équivalentes.

Probleme I

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$. Soit m un réel, on note h_m la fonction définie sur X par $h_m(x) = mx - f(x)$. On note X° l'ensemble des nombres réels m pour lesquels l'ensemble $\{h_m(x), x \in X\}$ est majoré. Lorsque X° est non vide, on associe au couple (X, f) le couple (X°, f°) où f° est une fonction définie sur X° par $f^\circ(m) = \sup\limits_{x \in X}(mx - f(x))$.

1. (a) Montrer que les deux inégalités suivantes sont vraies :

$$\forall x \in X,\ \forall m \in X^\circ,\ f(x) + f^\circ(m) \geq mx$$

$$\forall x \in X,\ f(x) \geq \sup_{m \in X^\circ}(mx - f^\circ(m))$$

   (b) Soient $m_1 \in X^\circ$ et $m_2 \in X^\circ$ tels que $m_1 \leq m_2$, montrer que l'intervalle $[m_1, m_2]$ est inclus dans X°.

   (c) Dans cette question on suppose que $X = [a, b]$ et que f est une fonction définie et continue sur X. Déterminer X° et montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f^\circ(m) = mx_0 - f(x_0)$.

2. On note $X^{\circ\circ} = (X^\circ)^\circ$ et $f^{\circ\circ} = (f^\circ)^\circ$.

   (a) Déterminer (X°, f°) lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$. Dans ce cas, déterminer le couple $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ associé à (X°, f°).

   (b) Quel est l'ensemble X° lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^3}{3}$?

(c) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer (X°, f°) puis $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \alpha x - \beta$.

(d) Déterminer (X°, f°) puis $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ lorsque $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ et $f(-1) = 1$,$f(0) = 0$,$f(1) = 2$ et $f(2) = 1$.

3. Soient f une fonction définie sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur une partie Y non vide de $\mathbb{R}$. On notera $(X, f) \leq (Y, g)$ si et seulement si

$$Y \subset X, \ \ \forall x \in Y, \ f(x) \leq g(x).$$

(a) Montrer que si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (Z, h)$ alors $(X, f) \leq (Z, h)$. Montrer que si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (X, f)$ alors $(X, f) = (Y, g)$.

(b) Montrer que $(X, f) \leq (Y, g)$ implique $(Y^\circ, g^\circ) \leq (X^\circ, f^\circ)$ lorsque X° est non vide.

(c) Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^2$. On note $\phi_{m,p}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_{m,p}(x) = mx - p$. Montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ si et seulement si $m \in X^\circ$ et $p \geq f^\circ(m)$. Pour $m \in X^\circ$ on note φ_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx - f^\circ(m)$. Montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ implique $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (\mathbb{R}, \varphi)$. Quelle interprépation géométrique au graphe de la fonction f peut-on donner de ces propriétés?

4. (a) Montrer que pour tout couple (X, f) avec $X \neq \emptyset$ alors $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) \leq (X, f)$

(b) Montrer que si $X \neq \emptyset$ et $X^\circ \neq \emptyset$ alors $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) = (X^\circ, f^\circ)$

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Notons $X = [-a, a]$. Soit f la fonction définie sur X par $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Déterminer la droite passant par le point $A = (-a, f(-a))$ est tangente en un point A' distinct de A à la courbe représentative de f. Donner les coordonnées de A'. Déterminer X°.

Probleme II

A $n \in \mathbb{N}$, on associe les fonctions y_n et z_n définies, pour $x \in [-1,1]$ par : $y_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $z_n(x) = \sin(n \arccos x)$.

1. (a) Etudier la parité de y_n et z_n suivant la valeur de n. Calculer $y_n(0)$, $z_n(0)$, $y_n(1)$ et $z_n(1)$.

   (b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, y_n et z_n sont dérivables sur $]-1,1[$. Donner l'expression de $y_n'(x)$ en fonction de x et $z_n(x)$, ainsi que l'expression de $z_n'(x)$ en fonction de x et $y_n(x)$.

   (c) les rapports
   $$\frac{\cos(n\theta)-1}{\cos\theta - 1};\ \frac{\sin(n\theta)}{\cos\theta - 1}$$
   ont-ils une limite finie lorsque θ tend vers 0? Etudier la dérivabilité de y_n et z_n aux points $x=1$ et $x=-1$.

   (d) Calculer les racines des équations $y_n(x) = 0$ et $z_n(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[0,1]$.
   Déterminer l'ensemble A_n des valeurs de $x \in [0,1]$ pour lesquelles $y_n(x) \geq 0$ ainsi que l'ensemble B_n des valeurs $x \in [0,1]$ pour lesquelles $z_n(x) \geq 0$.
   Etudier les variations de $y_n(x)$ et $z_n(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[0,1]$.

2. (a) Exprimer $y_0(x)$ et $z_0(x)$ ainsi que $y_1(x)$ et $z_1(x)$ sous une forme ne faisant pas intervenir de fonctions trigonométriques.

   (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2}(x) + y_n(x)$ en fonction de x et $y_{n+1}(x)$, puis $z_{n+2}(x) + z_n(x)$ en fonction de x et $z_{n+1}(x)$.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est une fonction polynôme et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :
   $$z_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,g_n(x)$$
   où g_n est une fonction polynôme. Préciser les degrés de y_n et g_n.

   (d) Retrouver ces derniers résultats en posant $\arccos x = \theta$ et en utilisant les formules de Moivre.

   (e) Intégrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'équation différentielle :
   $$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$
   où v est la fonction inconnue et θ la variable. En déduire que y_n et z_n sont deux solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :
   $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$
   Donner les solutions générales sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle.

3. Dans la suite du problème on désigne par $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $]-1,1[$.

   (a) Soit n un entier naturel et f la fonction de trois variables réelles x, α, α' définie sur $\mathbb{R}^3$ par

   $$f(x, \alpha, \alpha') = (1-x^2)\alpha' + (2n-1)x\alpha$$

   Montrer que l'application notée F qui a toute fonction $y \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$ associe la fonction $Y(x) = f(x, y(x), y'(x))$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$. Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$ l'équation $F(y) = g$ est une équation différentielle que nous noterons

   $$f(x, y(x), y'(x)) = g.$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$. En déduire l'existence d'une fonction $u \in \mathrm{Ker}(F)$ telle que $u(0) = 1$. Donner l'expression de $u(x)$ pour $x \in]-1,1[$

   (c) Soit une fonction $y \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$ et $Y = F(y)$ son image par F. Vérifier que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$ la fonction $Y^{(k)}(x)$ (dérivée k^{ieme} de Y) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire à exprimer des dérivées $y^{(k+1)}(x), y^{(k)}(x), y^{(k-1)}(x)$ dont les coefficients dépendent de x. En déduire que pour tout entier $p \geq 1$

   $$u^{(2p)}(0) = (-1)^p 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2p+1)$$

   et donner la valeur de $u^{(2p-1)}(0)$. Préciser la valeur de $u^{(2n)}(0)$.

   (d) Intégrer sur l'intervalle $]-1,1[$ l'équation différentielle $f(x, y, y') = \lambda y$ où λ est une constante. Déterminer les valeurs de λ telles que l'équation différentielle admet des solutions y qui sont des fonctions polynômes. Expliciter, pour chacune des valeurs de λ trouvées, le polynôme solution P_λ tel que $P_\lambda(0) = 1$.