SESSION

D'AVRIL

1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

Dans tout ce qui suit, J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $[-1,1]$, de longueur non nulle et tel que, pour tout $x \in J, x^2 \in J$. On étudie l'ensemble E_j des aplications dérivables de J dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(*)\ \forall x \in J,\ f'(x) = f\left(x^2\right).$$

Remarque : Il s'agit d'une équation différentielle «non ordinaire». En effet, les équations différentielles ordinaires sous forme «résolue» sont de la forme

$$f'(x) = F\left(x, f(x)\right)$$

ce qui n'est pas le cas ici. Nous n'avons donc à priori aucun résultat d'existence et d'unicité ; le théorème de Gauchy ne s'applique pas ici. Par contre l'application $f \mapsto \left\{x \mapsto f'(x) - f\left(x^2\right)\right\}$ est visiblement linéaire. On a donc une équation différentielle linéaire non ordinaire !

I - PRELIMINAIRES

❶ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, et g une application n fois dérivable de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n$, la dérivée $k-ième$ $g^{(k)}$ admet une limite λ_k quand la variable tend vers a. On définit alors la fonction $\tilde{g}$ de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} & \tilde{g}(a) = \lambda_0 ; \\ \forall x \in\ ]a,b[, \quad & \tilde{g}(x) = g(x). \end{aligned}$$

Solution : Appelons P_n la propriété précédente, et démontrons la par récurrence. P_0 n'est autre que le prolongement par continuité et donc est vraie. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, P_n, vraie et démontrons P_{n+1}. Notons $h = \tilde{g}^n$. Par l'hypothèse P_n, h est une fonction continue sur $[a,b[$, et dérivable sur $]a,b[$. Pour tout $x \in\ ]a,b[$ on a, par le théorème des accroissements finis,

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(a+\theta x) = \tilde{g}^{(n+1)}(a+\theta x)$$

où $\theta]0,1[$. Et donc, comme $\lim_{x\to a}(a+\theta x) = a$

$$\lim_{x\to a}\frac{\tilde{g}^{(n)}(x)-\tilde{g}^{(n)}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\tilde{g}^{(n+1)}(a+\theta x) = \lambda_{n+1}$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

❷ Soit J un intervalle comme au début. Démontrer que E_j est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur ℝ des fonctions indéfiniment dérivable sur J.

Solution : Classique et très simple par récurrence pour la dérivabilité infinie.

❸ Soit g une fonction dérivable définie sur un intervalle borné $I =]a,b[(-\infty < ab + \infty)$ à valeurs dans ℝ.

① On suppose que g et sa dérivée g' sont toutes deux minorées sur I. Montrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

Solution : Si m est un minorant de g'.

On considère la fonction h de I dans ℝ définie par $\forall x \in I, h(x) = g(x) - mx$.

La fonction h est dérivable sur I et sa dérivée h' est positive : $\forall x \in I, h'(x) = g'(x) - m \geq 0$ par la définition de m. h est donc une fonction croissante. Comme elle est minorée, elle admet une limite quand x tend vers a. Il en est de même de g, puisque a est un nombre réel et que $\lim_{x\to a} g(x) = ma + \lim_{x\to a} h(x)$

② On suppose maintenant que g et sa dérivée g' sont toutes deux majorées sur I. Démontrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

Solution : On pose pour $x \in I, \tau(x) = -g(x)$ et on se ramène au cas précédent.

❹ On définit une application θ de $[-1,1]$ dans ℝ par

$$\theta(-1) = \theta(1) = 0$$

$$\forall x \in]-1,1[, \theta(x) = e^{\omega(x)} \text{ avec } \omega(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

① Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$.

Solution : θ est indéfiniment dérivable comme composée de fonctions indéfiniment dérivable

② Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$, strictement croissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta^{(n)}(1) = \theta^{(n)}(-1) = 0$

Solution : Montrons qu'il existe une fraction rationnelle $R_n(x) = \frac{P_n(x)}{\left(x^2-1\right)^N}$, où P_n est un polynôme et N un entier positif, telle que

$$\forall n \in N,\ \forall x \in]-1,1[, \theta^{(n)}(x) = R_n(x)e^{\omega(x)}$$

l'égalité à démontrer est vraie pour $n = 0$ en prenant $P_0 \equiv 1$ et $N = 0$. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, alors

$$\forall x]-1,1[, \left(\theta^{(n)}(x)\right)' = \left(R_n(x)e^{\omega(x)}\right)' = \left(R_n^{'}(x)\omega'(x)\right)e^{\omega(x)}$$

avec

$$R_n^{'}(x) + R_n(x)\omega'(x) = \frac{P_n^{'}(x)\left(x^2-1\right)^2 + \left(2x - 2Nx\left(x^2-1\right)\right)P_n(x)}{\left(x^2-1\right)^{N+2}} = \frac{P_{n+1}(x)}{\left(x^2-1\right)^{N+2}}$$

d'où le résultat par récurrence.

$\theta'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$ est positive pour $x \in]-1,0]$ et négative pour $x \in [0,1[$.

En posant $y = \frac{1}{\left(x^2-1\right)^N}$, ont obtient que $\lim_{x\to\pm 1} \frac{e^{\omega(x)}}{\left(x^2-1\right)^N} = \lim_{y\to -\infty} e^y y^N = 0$ par les propriétés classiques de l'exponentielle, d'où le résultat en utilisant I-❶.

③ Soit C^∞ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions indéfiniment dérivable de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et D le sous espace de C^∞ des fonctions s'annulant ainsi que toutes leur dérivées aux points 1 et -1. Démontrer que l'application linéaire de C^∞ dans lui même $f \mapsto \theta f$ (où θf est l'application définie par $\forall x \in [-1,1], \theta f(x) = \theta(x) f(x)$) est injective et à valeurs dans D. En déduire que D est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.

Solution : Notons Θ l'application linéaire de C^∞ dans lui-même $f \mapsto \theta f$. Le noyau de Θ est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty$ telles que $\forall x \in [-1,+1], \theta(x) f(x) = 0$. Comme, $\forall x \in]1-,+1[, \theta(x) > 0$ on a que $\forall x \in]1-,+1[, f(x) = 0$. Comme f est continue, f est la fonction nulle. Par le théorème de Liebniz, $\Theta(f)^{(n)}(\pm 1) = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \theta^{(p)}(\pm 1) f^{(n-p)}(\pm 1) = 0$ et donc $\forall f \in C^\infty, \Theta(f) \in D$. Comme C^∞ contient les fonctions polynômiales, c'est un espace de dimension infinie. Comme l'image d'une base de cardinal infini par une application linéaire injective est un système libre de cardinal infini, on en déduit que D est de dimension infinie.

II - ETUDE DE $E_{[-1,1]}$

❶ On définit une suite d'entiers $(q_k, k \in \mathbb{N})$ par

$$q_0 = 0;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, q_{k+1} = 2q_k + 1$$

① Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = 2^k - 1$

Solution : Par récurrence évidemment !

On note $Q = \{ q_k \ / \ k \in \mathbb{N} \}$.

Soit $(a_n, n \in \mathbb{N})$ la suite de nombres réels définie par

$$a_0 = 1 \ ;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{l=k} q_l}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \notin Q, a_n = 0$$

② Trouver la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$

Solution : $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}-1} = 0$ et donc d'après le tes de d'Alembert, la série $\sum a_{q_k}$ est convergente d'où $\sum a_n$ est convergente. Par ailleurs, comme, pour $k \geq 1, q_k\, a_{q_k} = a_{q_{k-1}}$, la série $\sum n a_n$ est également convergente.

③ Déterminer, pour $x > 1, \lim\limits_{k \to +\nabla} a_{q_k} x^{q_k}$.

Solution : On a

$$\frac{a_{q_{k+1}} x^{q_{k+1}}}{a_{q_k} x^{q_k}} = \frac{1}{2^{k+1}-1} x^{2^{K+1}} - 2^k \geq \frac{1}{2} \frac{x^{2^k}}{2^k}$$

Or, pour $x > 1, \lim_{n \leftarrow \infty} \frac{x^n}{n} = \infty$ et donc la suite $(a_{q_k} x^{q_k}, k \in \mathbb{N})$ est strictement croissante à partir d'un certain rang et tend vers $+\infty$.

④ Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 et que l'application

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie sur $[-1, +1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Solution : Par le ② ci-dessus, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. Par le ③ ci-dessus $R \leq 1$. On a donc $R = 1$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup \left\{ \left| a_n x^n \right| / x \in [-1, +1] \right\} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-1, +1]$ et donc la fonction de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et continue.

⑤ Démontrer que S est un élément de $E_{[-1,1]}$ tel que $S(0) = 1$.

Solution : Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup \left\{ \left| n a_n x^{n-1} \right| / x \in [-1, +1] \right\} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n < +\infty$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ est normalement convergente sur $[-1, +1]$ et donc S est dérivable sur $[-1, +1]$ et, $\forall x \in [-1, +1], S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Enfin

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k a_{q_k} x^{q_{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{q_{k-1}} x^{2_{q_{k-1}}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{q_k} \left(x^2 \right)^{q_k} = S\left(x^2 \right)$$

et donc $S \in E_{[-1,1]}. S(0) = a_0 = 1$ par construction de la suite $(a_n, n \in \mathbb{N})$.

❷ ① Donner une majoration que l'on justifiera de $\left|S(x)-\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n\right|$ qui soit valable sur tout le segment $[0,1]$. En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de $S(1)$.

Solution : On a :

$$q_0=0, a_{q_0}=1, q_1=1, a_{q_1}=1, q_2=3, a_{q_2}=\frac{1}{3}, q_3=7, a_{q_3}=\frac{1}{21}, q_4=15, a_{q_4}=\frac{1}{315}, q_5=31, a_{q_5}=\frac{1}{9765}$$

Donc si on pose $T(x)=\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n=\sum_{k=0}^{k=4} a_{q_k} x^{q_k}$, on a $T(1)=2.384$ à 10^{-3} près. Par ailleurs, et avec des majorations qui ne font pas dans la dentelle,

$$\left|S(x)-\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n\right| \leq a_{q_5}+\sum_{l=6}^{\infty} \frac{1}{2^l-1} \leq a_{q_5}+\sum_{l=5}^{\infty} \frac{1}{2^l} \leq 2a_{q_5} \leq 10^{-3}$$

et donc $S(1)$ est approchée par défaut par $T(1)=2.384$ à 10^{-3}

② Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe $y=S(x)$; on précisera la concavité.

Solution : Sur $[0,1]$ toutes les dérivées de S sont positives et en particulier la fonction y est croissante et convexe. La fonction de $[-1,+1]$ dans ℝ, $x \mapsto S(x)-S(0)=S(x)-1$ est impaire et le graphe de s est symétrique par rapport au point $(0,1)$. Sur l'intervalle $[-1,0]$ la fonction S est donc croissante et concave.

③ Etablir la formule : $\int_0^1 S(x)dx=\frac{2}{3}S(1)$.

Solution : Par une intégration par partie et un changement de variable $u=x^2$, on obtient

$$\int_0^1 S(x)dx=\left[xS(x)\right]_0^1-\int_0^1 xS'(x)dx=S(1)-\int_0^1 xS\left(x^2\right)dx=S(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 S(u)du$$

d'où le résultat.

❸ Soient $(a,b) \in [-1,1]^2$ tels que $a \leq 0 \leq b, a^2 \leq b, J = [a,b]$ et $f \in E_j$.

① On suppose que $f(0) = 0$. On pose $M = \sup\{|f(t)| / t \in J\}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in J, |f(x)| \leq M|x|^{q_n}.$$

Comme $q_0 = 0$, l'inégalité est vraie pour $n = 0$ par définition de M. Supposons qu'elle soit vrai jusqu'à $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème des accroissements finis on a

$$\forall x \in J, \exists \theta \in \lfloor 0,1 \rfloor, f(x) = f(x) - f(0) = (x-0) f'(\theta x) = xf\left((\theta x)^2\right)$$

et donc

$$|f(x)| \leq |x| M \left|x^2\right|^{q_n} = M|x|^{2q_{n+1}} = M|x|^{q_{n+1}}$$

ce qui démontre le résultat par récurrence.

② En déduire que f est nulle.

Solution : On a, pour tout $x \in]a,b[, |x| < 1$ et donc $|f(x)| \leq \lim\limits_{n \to +\infty} M|x|^{q_n} = 0$. La fonction f est donc nulle sur $]a,b[$ et, par continuité, elle est nulle sur $[a,b]$.

③ On ne suppose plus maintenant que $f(0) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in J$, $f(x) = f(0)S(x)$. En déduire que E_j est de dimension 1.

Solution : Soit pour $x \in [a,b], g(x) = f(x) - f(0)S(x). g$ est un élément de $E_{[a,b]}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $E_{[a,b]}$. Comme $g(0) = f(0) - f(0)S(0) = f(0) - f(0) = 0,\ g$ est nulle par la ①. Donc tout élément de $E_{[a,b]}$ est proportionnel à la restriction de S à $[a,b]$. $E_{[a,b]}$ est donc n espace vectoriel de dimension 1.

III - ETUDE DE $E_{]0,1[}$

Dans cette partie, le symbole J désigne l'intervalle $]0,1[$

❶ Soient $f \in E_j, p \in J$ et ($p_n, n \in \mathbb{N}$) la suite définie par

$$p_0 = p$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \sqrt{p_n}\ .$$

① Démontrer que la suite ($p_n, n \in \mathbb{N}$) est strictement croissante et déterminer sa limite.

Solution : On a que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = p^{\frac{1}{2^n}}$ d'où la croissance et déterminer sa limite.

② Démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right), n \in \mathbf{N}\right)$ est convergente.

Solution : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \geq 1$, donc $\ln\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \geq 0$ et donc, la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right)\right), n \in \mathbf{N}\right)$ est croissante. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \leq p_{k+1}-p_k$, pour tout $\in$ ℕ, $\ln\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right)\right) = \prod_{k=0}^{k=n}\ln\left(1+p_{k+1}-p_k\right) \leq \prod_{k=0}^{k=n}\left(p_{k+1}-p_k\right) = p_{n+1}-p_0 \leq 1$. La suite $\left(\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+p_{k+1}-p_k\right), n \in \mathrm{N}\right)$ est donc convergente puisque croissante et majorée par e.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_n = \sup\left\{\left|f(x)\right| / x \in \left[p_n, p_{n+1}\right]\right\}$$

③ A l'aide de la relation $f(x) = f\left(p_n\right) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt$, démontrer l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n \leq M_{n-1}\left(1+p_{n+1}-p_n\right)$$

En déduire que la suite ($M_n, n \in \mathbb{N}$) est bornée.

Solution : On a $f(x) = f\left(p_n\right) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt = f\left(p_n\right) + \int_{p_n}^{x} f\left(t^2\right)dt$, et donc, comme $\left|f\left(p_n\right)\right| \le M_{n-1}$, pour $x \in \left[p_n, p_{n+1}\right]$,

$$\left|f(x)\right| \le M_{n-1} + \int_{p_n}^{p_{n+1}} \sup\left\{\left|f\left(t^2\right)\right| / t \in \left[p_n, p_{n+1}\right]\right\} \le$$
$$M_{n-1} + \left(P_{n+1} - p_n\right)\sup\left\{\left|f(t)\right| / t \in \left[p_{n-1}, p_n\right]\right\} = M_{n-1}\left(p_{n+1} - p_n\right)$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n \le M_0 \prod_{k=0}^{k=n}\left(1 + p_{k+1} - p_k\right) \le M_0 \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 + p_{k+1} - p_k\right)$$

et donc la suite ($M_n\ n \in \mathbb{N}$) est bornée.

④ Etablir que, pour tout $\alpha \in J, f$ et f' sont bornées sur $\left[\alpha, 1\right[$. Montrer que $f(x)$ a une limite λ quand x tend vers 1 et que, si l'on pose $f(1) = \lambda$, la fonction ainsi prolongée appartient à $E_{]0,1]}$

Solution : Soit $p \in \left]0, \alpha\right]$. On a alors $\left[\alpha, 1\right[\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}\left[p_n, p_{n+1}\right]$ et $\sup\left\{\left|f(t)\right| / t \in \left[\alpha, 1\right[\right\} \le \sup\left\{\sup\left\{\left|f(t)\right| / t \in \left[p_n, p_{n+1}\right]\right\}, n \in \mathrm{N}\right\} \le \sup\left\{M_n / n \in \mathbb{N}\right\} < +\infty$. f est donc bornée sur $\left[\alpha, 1\right[$ et donc f' est aussi bornée puisque, d'après $f'(x) = f\left(x^2\right)$ $\sup\left\{\left|f'(x)\right| / x \in \left[\alpha, 1\right[\right\} = \sup\left\{\left|f\left(x^2\right) / x \in \left[\alpha, 1\right[\right|\right\} = \sup\left\{\left|f(x) / x \in \left[\alpha^2, 1\right[\right|\right\} < +\infty$. L'application g de $\left]-1, -\alpha\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \left]-1, -\alpha\right], g(x) = f(-x)$ vérifie donc les hypothèses du I ❹ et admet donc une limite quand x tend vers -1. La fonction f admet donc une limite notée λ quand x tend vers 1. Soit f la formation de $\left[\alpha, 1\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(1) = \lambda$ et $f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \left[\alpha, 1\right[$. f est bien sur dérivable sur $\left[\alpha, 1\right[$ et $f'(x) = f\left(x^2\right)$ pour tout $x \in \left[\alpha, 1\right[$. f' admet donc λ comme limite quand x tend vers 1. D'après I ❶ f est dans $E_{[\alpha,1]}$.

❷ Soit $f \in E_j$

① On suppose qu'il existe $\beta \in J$ tel que f soit majorée dans $\left]0,\beta\right]$. Etablir que $f(x)$ et $f'(x)$ ont une même limite finie μ quand x tend vers 0. En déduire que f est la restriction de μS à J.

Solution : Si f est majorée sur $\left]0,\beta\right]$, il en va de même de f' puisque $\sup\left\{ f'(x)/x \in \left]0,\beta\right]\right\} = \sup\left\{ f\left(x^2\right)/x \in \left]0,\beta\right]\right\} = \sup\left\{ f(x)/x \in \left]0,\beta^2\right]\right\} \le \sup\left\{ f(x)/x \in \left]0,\beta\right]\right\}$ $< +\infty$. Que $f(x)$ admette une limite μ quand x tend vers 0 est alors une conséquence de I ❸. Par $f'(x) = f\left(x^2\right), f'(x)$ admet la même limite μ quand x tend vers 0 et l'application prolongée en 0 est donc un élément de $E_{[0,1]}$. D'après II ❸ ③ f est la restriction de la fonction μS à J.

② En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante, on a alors les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon \in J, \sup\left\{ f(x)/x \in \left]0,\varepsilon\right]\right\} = +\infty \text{ et } \inf\left\{ f(x)/x \in \left]0,\varepsilon\right[\right\} = -\infty$$

Solution : Si f est minorée sur $\left]0,\beta\right]$, la conclusion de la question précédente reste la même, en invoquant toujours I ❸. Donc si f n'est pas la restriction à $\left]0,1\right]$ su multiple de S par une constante, f n'est ni majorée ni minorée sur aucun intervalle $\left]0,\beta\right], \in J$. Ceux sont exactement les propriétés demandées.

③ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante

$$Card\left\{x/x \in \left]0,\varepsilon\right], f(x) = 0\right\} = +\infty$$

Solution : Si la fonction f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur un intervalle $\left]0,\varepsilon\right]$ avec $0 < \varepsilon \le 1$, alors f ne s'annule pas sur un intervalle $\left]0,\varepsilon'\right]$ avec $0 < \varepsilon' \le \varepsilon$, f reste de signe constant sur $\left]0,\varepsilon'\right]$ et donc et majorée ou minorée, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. D'où le résultat.

La suite de cette partie est consacrée à la fabrication et à l'étude d'un élément de E_j qui ne soit pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❸ On Pose $r_0 = \dfrac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $r_{n+1} = \sqrt{r_n}$.

① Démontrer que la suite ($r_n, n \in \mathbb{Z}$) est bien définie et expliciter r_n .

Solution : On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $r_n = \left(1/4^{2^{-n}}\right)$. En effet, la formule est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors $r_{n+1} = \left(1/4^{2^{-n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1/4^{2^{-n+1}}\right)$ et donc elle est vrais pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si elle est vraie pour $-n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $r_{-n-1} = \left(1/4^{2^n}\right)^2 = \left(1/4^{2^{n+1}}\right)$ et donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

② Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $I_n = \left[r_n, r_{n+1}\right]$. Déterminer $\bigcup\limits_{n \in Z} I_n$.

Solution : La suite ($r_n, n \in \mathbb{Z}$) est strictement croissante, $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$ et donc $\bigcup\limits_{n \in Z} I_n = \left]0,1\right[$.

Soit λ un élément de D où D est défini en I ❹.

③ Démontrer que les formules suivantes

$$\forall x \in I_0 \ \varphi_0(x) = \lambda(8x-3)$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_n, \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(r_n) + \int_{r_n}^{x} \varphi_{n-1}(t^2)dt$$

définissent pour tout $n \in \mathbb{N}$, une application φ_n de I_n dans $\mathbb{R}$.

Solution : Si $x \in \left[r_0, r_1\right]$, alors $8x - 3 \in \left[-1, +1\right]$ et donc φ_0 est bien définie. Supposons par récurrence que, jusqu'à l'entier $n \in \mathbb{N}$, φ_k soit définie sur $\left[r_k, r_{k+1}\right]$. Pour $t \in \left[r_{n+1}, r_{n+2}\right], t^2 \in \left[r_n, r_{n+1}\right]$ et donc pour $x \in \left[r_{n+1}, r_{n+2}\right], \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(r_{n+1}) + \int_{r_{n+1}}^{x} \varphi_n(t^2)dt$ est bien définie.

④ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n admet dans I_n une dérivée continue et que $\varphi_n'(r_{n+1}) = \varphi_{n-1}(r_n) = \varphi_n(r_n)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$*, la dérivée à gauche de φ_{n-1} en r_n et la dérivée à droite de φ_n en ce même point sont égales.

Solution : La fonction φ_n est sur I_n une primitive de la fonction $t \mapsto \varphi_{n-1}\left(t^2\right)$. Elle est donc continuement dérivable dans cet intervalle et les dérivées aux bornes de l'intervalle vérifient

$$\varphi_n^{'}\left(r_n\right) = \varphi_{n-1}\left(r_n^2\right) = \varphi_{n-1}\left(r_{n-1}\right) = \varphi_{n-2}\left(r_{n-1}\right)$$
$$\varphi_n^{'}\left(r_{n+1}\right) = \varphi_{n-1}\left(r_{n+1}^2\right) = \varphi_{n-1}\left(r_n\right) = \varphi_n\left(r_n\right)$$

et donc

$$\varphi_{n-1}^{'}\left(r_n\right) = \varphi_{n-1}\left(r_{n-1}\right) = \varphi_n^{'}\left(r_n\right)$$

ce qui est demandé

❹ ① Démontrer que la formule suivante

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_{-m}, \varphi_{-m}(x) = \varphi_{-m+1}^{'}\left(\sqrt{x}\right)$$

définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une application φ_{-m} de I_{-m} dans $\mathbb{R}$.

Solution : Cela se fait par récurrence. Pour $x \in I_{-1} = \left[r_{-1}, r_0\right], \sqrt{x} \in \left[\sqrt{r_{-1}}, \sqrt{r_0}\right] = \left[r_0, r_1\right] = I_0$, et donc $\varphi_{-1}(x) = \varphi_0^{'}\left(\sqrt{x}\right)$ est bien défini. Supposons donc qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que φ_{-k} soit défini sur I_{-k} pour tout $k \in \mathbb{N}$,$1 \le k \le n$, alors pour $x \in I_{-n-1} = \left[r_{-n-1}, r_{-n}\right] = \left[r_{-n}^2, r_{-n-1}^2\right] \sqrt{x} \in I_{-n} = \left[r_{-n}, r_{-n+1}\right]$ et donc la formule $\varphi_{-n-1}(x) = \varphi_{-n}^{'}\left(\sqrt{x}\right)$ définit bien φ_{-n-1} sur I_{-n-1}

② Etablir que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, ϕ_{-m} est indéfiniment dérivable dans I_{-m} et que ϕ_{-m} et toutes ses dérivées s'annulent aux deux bornes de I_{-m}.

Solution : A nouveau par récurrence φ_0 est la composée de deux fonctions de classe C^∞ et donc de classe C^∞. La fonction λ et toutes ses dérivées s'annulent en ± 1, donc la fonction φ_0 et toutes ses dérivées s'annulent en r_0 et r_1. Supposons donc qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que φ_{-k} soit de classe C^∞ sur I_{-k} et s'annule ainsi que toutes ses dérivées en r_{-k} et r_{-k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n.\varphi_{n-1}$ est alors la composée de deux fonctions de classe C^∞ et donc est de classe C^∞. Comme $\varphi_{-n}^{'}$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées en r_{-n-1} et r_{-n}.

❺ Démontrer qu'il existe une application ψ_k de J dans ℝ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in I_n, \psi_k(x) = \varphi_n(x)$$

et montrer que cette fonction ψ_k appartient à E_j mais que, pour un choix convenable de λ, ψ_k n'est pas la restriction à J de produit de S par une constante.

Solution : la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \left]r_n, r_{n+1}\right[, \psi_k(x) = \varphi_n(x),$$

définie ψ_κ sur $\bigcup_{n\in Z} \left]r_n, r_{n+1}\right[$ et cette fonction ψ_κ est bien sur continuement dérivable sur $\bigcup_{n\in Z} \left]r_n, r_{n+1}\right[$. Il reste à vérifié que ψ_κ est bien définie aux points $\left\{\ r_n, n \in \mathbb{Z}\ \right\}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{Z},\ \varphi_n(r_{n+1}) = \varphi_{n+1}(r_{n+1})$. La formule de l'énoncé définit donc bien ψ_κ et la fonction est continue sur J. Comme pour tout $n \in \mathbb{Z},\ \varphi_n^{'}(r_{n+1}) = \varphi_{n+1}^{'}(r_{n+1})$.la fonction est aussi dérivable sur J. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in I_n, \varphi_n^{'}(x) = \varphi_{n-1}(x^2)$ et donc pour tout $x \in J, \psi_\lambda^{'}(x) = \psi_\lambda(x^2)$. La fonction ψ_κ est donc un élément de E_j. Cette fonction s'annule une infinité de fois au voisinage de 0. Si elle se prolonge en 0, sa limite en 0 est donc nulle et elle est la restriction à J de la fonction $\lim_{x\to 0} \psi_\kappa(x) S \equiv 0$ et λ est la fonction nulle. Il suffit donc de choisir $\lambda \in D, \lambda \equiv 0.$

❻ Démontrer que l'application de D dans $E_j, \lambda \mapsto \psi_\lambda$ est linéaire et injective. En déduire que E_j est un espace vectoriel de dimension infinie sur ℝ.

Solution : l'application de D dans $E_j, \lambda \mapsto \psi_\lambda$ est linéaire par construction, et si ψ_κ est la fonction nulle, alors λ est la fonction nulle par construction. Par un raisonnement identique au I ❹, E_j est alors de dimension infinie.

❼ On pose ici $\lambda = \theta$ où θ est défini au I ❹.

① Donner le sens de variation de ψ_θ et celui de $\psi_\theta^{'}$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Etudier le signe et le sens de variation de ψ_θ sur $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$.

Solution : Par construction, ψ_θ est positive ou nulle sur l'intervalle I_0 et donc, strictement croissante et positive sur tous les intervalles $I_n, n \in \mathbb{N}^*$. Donc ψ_θ est positive et croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$ et sa dérivée y est positive. Sur $\left[\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right], \psi_y(x) = \theta'\left(8\sqrt{x}-3\right)$ est négative pour $x \in \left[\frac{1}{16},\frac{9}{64}\right]$ et positive pour $x \in \left[\frac{9}{64},\frac{1}{4}\right]$. De plus $\psi_\theta^{'}(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}\theta''\left(8\sqrt{x}-3\right)$ s'annule en un seul point x_1 de $\left[\frac{1}{16},\frac{9}{64}\right]$ et en un seul point x_2 de $\left[\frac{9}{64},\frac{1}{4}\right], \psi_\theta$ est donc croissante sur $\left[\frac{1}{16},x_1\right]$, décroissante sur $\left[x_1,x_2\right]$ et croissante sur $\left[x_2,\frac{1}{4}\right]$.

② Donner sommairement l'allure de la représentation graphique de ψ_θ sur $\left[\frac{1}{16},1\right[$.

③ Donner une minoration de nombre de 0 de ψ_θ dans $\left]r_n,r_{n+1}\right[$ pour $n<0$.

Solution : Sur I_{-1}, ψ_θ admet un 0. On va démontrer par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sur I_{-n}, ψ_θ admet au moins n 0. La propriété est vrai pour $n=1$. Supposons la vraie pour $n+10$. Par le théorème des accroissements, finis sur $I_{-n}, \psi_0^{'}$ admet au moins $n+10$. Donc sur I_{-n-1}, ψ_θ admet au moins $n+10$.

❽ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x)dx = (-2)^n \int_{r_0}^{r_1} \psi_\theta(x)dx$$

En déduire la nature de $\int_0^1 \psi_\theta(x)dx$.

Solution : Comme $\psi_\theta(x)$ admet une limite quand x tend vers 1, le seul problème pour la convergence de $\int_{r_0}^{r_1}\psi_\theta(x)dx$ est en 0. Si cette intégrale convergeait, on aurait

$$\int_0^{r_0}\psi_\theta(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{r_{-n-1}}^{r_{-n}}\psi_\theta(x)dx$$

cette dernière série étant convergente. Or pour $n\in\mathbb{N}$, en faisant une intégration par partie, puis en faisant le changement de variable $u=x^2$

$$\begin{aligned}\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}}\psi_\theta(x)dx&=\left[x\psi_\theta\right]_{r_{-n}}^{r_{-n+1}}-\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}}x\psi_\theta'(x)dx\\&=0-\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}}x\psi_\theta\left(x^2\right)dx=\frac{-1}{2}\int_{r_{-n+1}}^{r_{-n}}\psi_\theta(u)du\end{aligned}$$

d'où ensuite par récurrence, $\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}}\psi_\theta(x)dx=(-2)^n\int_{r_0}^{r_1}\psi_\theta(x)dx$. Comme $\int_{r_0}^{r_1}\psi_\theta(x)dx>0$, on en déduit la divergence de la série $\sum\int_{r_{-n-1}}^{r_{-n}}\psi_\theta(x)dx$ et donc la divergence de l'intégrale $\int_0^1\psi_\theta(x)dx$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

***CORRIGE DE LA* DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ On vérifie aisément que $A' A = I$.

❷ La matrice A est donc inversible et $A' = A^{-1}$. Cette égalité montre que A est une matrice orthogonale et ses valeurs propres sont de module égal à 1. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3, les valeurs propres sont $1, e^{i\alpha} et\, e^{-i\alpha}$.

D'autre part, l'opérateur Trace est invariant par changement de base, donc : $-\frac{1}{3} = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 1 + 2\cos\alpha$, d'où $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, puis $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Les deux autres valeurs propres sont $\frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$

EXERCICE n° 2

❶ On vérifie que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I - M$.

❷ On a $M^2 + M - 2I = 0$ et $P(x) = x^2 + x - 2$ répond à la question.

❸ M étant symétrique, elle est diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour λ valeur propre de M, on a : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, d'où $\lambda = 1$ ou -2. La trace étant invariante par changement de base, on a aussi : $1 - 2 + \lambda = Tr(M) = -3$, d'où $\lambda = -2$. En conclusion, $\lambda = 1$ est une valeur propre simple et $\lambda = -2$ une valeur propre double.

❹ Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est nécessairement un polynôme du premier degré, c'est-à-dire :

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + (aX + b)$$

Pour $X = 1$, on obtient $1 = a + b$ et pour $X = -2$, $(-2)^n = -2a + b$. La résolution du système donne :

$$a = \frac{1-(-2)^n}{3} \text{ et } b = \frac{2+(-2)^n}{3}$$

❺ $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + (aM + bI)$ et comme $M^2 + M - 2I = 0$, on obtient $M^n = aM + bI$ ou encore,

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

❻ On obtient $U_{n+1} = M^n U_1 = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a \\ b+a \\ b+a \end{pmatrix}$, d'où

$x_{n+1} = y_{n+1} = z_{n+1} = 1$

EXERCICE n° 3

❶ On vérifie aisément que l'on a une norme, en effet,

(1) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \underset{x \neq 0}{Sup}\|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x$ (car $f(0) = 0$).
(2) $\forall \lambda \in R, \|\lambda f\| = |\lambda| \times \|f\|$
(3) $\forall f, g \in L(E), \|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|, \ \forall x \in E$, d'où $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

❷ Si $I - (P - Q)$ n'est pas inversible, alors
$\exists u \neq 0, (I - (P - Q))(u) = 0$, d'où $u = (P - Q)(u)$ et $\|u\| = \|(P-Q)u\| \leq \|P - Q\| \times \|u\| < \|u\|$, ce qui est impossible.

Comme $I - (P - Q)$ est inversible, il existe un endomorphisme v de E tel que :
$(I - (P - Q))v = I$, d'où $P(I - (P - Q))v = P$ ou encore $(P - P^2 + PQ)v = P$ et $PQv = P$ car $P^2 = P$. Pour tout x de E, on a $P(x) = PQ(v(x))$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(P)$, alors $y = P(x) = PQ(v(x))$ et $t = Q(v(x)) \in \mathrm{Im}\, Q$ vérifie $y = P(t)$, donc P est surjective.

Soit $y \in \mathrm{Im}(Q)$ tel que $P(y)=0$ et $Q(y)=y$, alors $(I-P-Q)y=0$, d'où $y=0$.

P est donc une application bijective de $\mathrm{Im}(Q)$ sur $\mathrm{Im}(P)$

P étant un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Im}(Q)$, les dimensions sont égales.

EXERCICE n° 4

❶ Soient $x_1=(x_{11},x_{21},x_{31})$, $x_2=(x_{12},x_{22},x_{32})$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$. Pour $z=(1,0,0)$, on obtient $y_1=x_{21}x_{32}-x_{22}x_{31}$ puis pour $z=(0,1,0)$, $y_2=x_{31}x_{12}-x_{32}x_{11}$. Enfin avec $z=(0,0,1)$, on a $y_3=x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12}$.

❷ On vérifie que les composantes des deux vecteurs de l'égalité du double produit vectoriel sont identiques. Si $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $w=(w_1,w_2,w_3)$, la première composante est $x_2w_1w_2+x_3w_1w_2+x_1(w_1^2-1)$, sachant que le vecteur w est unitaire. Il en est de même pour les deux autres composantes.

On a $u^2(x)=(x\wedge w)\wedge w=(w.x)w-x$ et $u^3(x)=-u(x)$ car $w\wedge w=0$.

Soit x un vecteur propre non nul, associé à la valeur propre réelle λ, on a :

$$u^3(x)=\lambda^3x=-\lambda x \text{ et } \lambda^3+\lambda=0\text{, d'où } \lambda=0.$$

Le sous espace propre associé est défini par : $x\wedge w=0$, ce qui correspond à la droite vectorielle engendrée par w.

❸ On a $\varphi_\alpha=id+\alpha u$. Si φ_α n'était pas inversible, il existerait $\alpha\neq 0$ tel que

$$\det(id+\alpha u)=0=\alpha^3\det(u+\frac{1}{\alpha}id)$$

donc $-\dfrac{1}{\alpha}$ serait un vecteur propre de u.

Dans $u^3+u=0$, on remplace u en fonction de φ_α, à savoir

- si $\alpha\neq 0$, on trouve $\varphi_\alpha^3-3\varphi_\alpha^2+(3+\alpha^2)\varphi_\alpha-(1+\alpha^2)id=0$, et
- si $\alpha=0$, $(\varphi_\alpha-id)^3=0$

On peut choisir,

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + (3+\alpha^2)x - (1+\alpha^2).$$

❹ On a $\varphi_\alpha \circ (\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = (1+\alpha^2)id$, d'où

$$\left(\varphi_\alpha\right)^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2}(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3+\alpha^2)id) = id - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}u + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}u^2$$

EXERCICE n° 5

Une matrice A commute avec toutes les matrices si et seulement si elle commute avec toutes les matrices E_{ij} de la base canonique.

On vérifie que

$$\forall(\alpha,\beta) \in [1,n] \times [1,n], \text{ on a } A_{\alpha i}\delta^j_\beta = A_{j\beta}\delta^i_\alpha$$

Pour $\beta = j$, il vient $A_{\alpha i} = A_{jj}\delta^i_\alpha$.

Donc, si $\alpha \neq i$, $A_{\alpha i} = 0$ et si $\alpha = i$: $A_{ii} = A_{jj}$

Les termes diagonaux sont égaux et les termes non diagonaux sont nuls. A est nécessairement une matrice scalaire. La réciproque est évidente.

PROBLEME

❶ Supposons que f soit la composée d'une projection p et d'une homothétie h, on a $p \circ p = p$ et $h = \lambda Id$. On obtient $f(x) = p \circ h(x) = \lambda p(x)$ donc $f \in L_\lambda$.

On pose $p(x) = \dfrac{1}{\lambda} f(x)$ et $h(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$. On vérifie que $p \circ p = p$.

❷ Soit $y \in \mathrm{Im}\, f \cap Ker\ f$. On obtient : $f(y) = 0$ et $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$, d'où $f(y) = f^2(x) = 0 = \lambda f(x)$ et $y = f(x) = 0$

❸ Soit $f, g \in L_\lambda$. $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $(f+g) \circ (f+g) = \lambda(f+g)$ ou encore $f \circ g + g \circ f = 0$.

Si $f \circ g = g \circ f$, il est clair que $(f+g) \in L_\lambda$.

Réciproquement, on a

$$f \circ g + g \circ f = 0 \quad (1)$$

On multiplie (1) par f à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $f \circ g - g \circ f = 0$ (2);

La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

❹

$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f) \circ f = (g \circ g) \circ (f \circ f) = \lambda_1 \lambda_2 (g \circ f)$, donc $\mu = \lambda_1 \lambda_2$.

❺ $v \circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aI) \circ (u - aI) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 I = \lambda(u - aI)$

Par hypothèse, $u^2 - (a+b)u + abI = 0$, d'où $u^2 = (a+b)u - abI$. On trouve donc $\lambda = b - a$.

De même $w \circ w \in L_\mu$ avec $\mu = a - b$.

Par ailleurs, $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aI) + \beta(u - bI)$. Ceci est vérifié pour $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = 0$, ce qui donne

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$

On a $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$ car $v \circ w = w \circ v = 0$.

D'autre part $v^n = \lambda^{n-1} v$ et $w^n = \mu^{n-1} w$. On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

❻ Le polynôme caractéristique de A est

$(\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$, d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$(A+I)\left(A^2-A-2I\right)=(A+I)^2(A-2I)=0$$

Si un tel polynôme existe c'est forcément $(A+I)(A-2I)$, on calcule cette expression et on trouve $(A+I)(A-2I)=0$

On obtient, par exemple, $a=-1$ et $b=2$.

$$A^n=\frac{2^n}{3}(A+I)-\frac{(-1)^n}{3}(A-2I)=\frac{(2^n+(-1)^n)}{3}A+\frac{(2^n+2(-1)^n)}{3}I$$

Concours CESD 1999

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

Première Partie

Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples.

1. Supposons tout d'abord qu'il existe une approximation de Padé d'ordre (p, q) donnée par les polynômes P et Q ; en multipliant par $Q(x)$ l'inégalité donnée par la condition (C2) nous obtenons :

$$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq M|Q(x)||x|^{p+q+1}.$$

La fonction polynôme $Q(x)$ est bornée sur $]-\alpha, \alpha[$, mettons par M', d'où :

$$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq MM'|x|^{p+q+1},$$

ce qui fournit (C3) à notation près.
Plus intéressant est la réciproque : partons de (C1), (C3). Avec les notations de l'énoncé, $Q(0) = 1$ d'où $\alpha' > 0$ tel que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-\alpha', \alpha'[$. Si $\beta = \min(-\alpha, \alpha')$, la fonction continue $1/Q(x)$ est bornée sur $]-\beta, \beta[$, mettons par M''. Il vient alors

$$\text{pour tout } x \in]-\beta, \beta[\text{ on a } |f(x) - P(x)/Q(x)| \leq MM''|x|^{p+q+1},$$

ce qui donne (C2).
Soit enfin une approximation de Padé donnée par les polynômes P et Q, la fonction $h(x) = Q(x)f(x) - P(x)$ est de classe C^∞ et vérifie $h(x) = O(x^{p+q+1})$. Par l'unicité des développements limités :

$$h(0) = h'(0) = \cdots = h^{p+q}(0) = 0.$$

D'autre part h est développable en série entière au voisinage de 0 - en effet, f et Q le sont, et il suffit de réorganiser le produit $f(x)Q(x)$ sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ où le développment converge absolument - la nullité des dérivées de h en 0 jusqu'à l'ordre $p + q$ montre que :

$$h(x) = \sum_{k \geq p+q+1} a_k x^k$$

pour $x \in]-\alpha, \alpha[$, avec a_k réels. D'où la conclusion avec $h(x) = \sum_{k \geq 0} a_{p+q+1+k} x^k$.

2. Donnons nous deux approximations de Padé de f à l'ordre (p, q), soit (P_0, Q_0) et (P_1, Q_1) ; par inégalité triangulaire et (C2) nous obtenons $\beta > 0, C > 0$ tels que :
$$\text{pour tout } x \in]-\beta, \beta\,[\text{ on a } |\frac{P_0(x)}{Q_0(x)} - \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}| \leq C|x|^{p+q+1}.$$
Q_0Q_1 étant bornée sur $]-\beta, \beta\,[$, il vient :
$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = O(x^{p+q+1}).$$
$P_0Q_1 - P_1Q_0$ est un polynôme de degré $\leq p + q$; l'unicité des développements limités amène $P_0Q_1 - P_1Q_0 = 0$. Comme P_0/Q_0 et P_1/Q_1 sont irréductibles et $Q_0(0) = Q_1(0) = 1$, nous obtenons $(P_0, Q_0) = (P_1, Q_1)$.
3. Visiblement, $[p/0]_f = P/1$ avec $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$.
4. Si P/Q est une approximation de Padé d'ordre (p, q), les fonctions de classe C^∞, f et P/Q, ont le même développement limité d'ordre $p+q$ en 0 puisque, g étant bornée au voisinage de 0
$$Q(x)f(x) - P(x) = O(x^{p+q+1}).$$
L'unicité du développement limité donne $f^{(k)}(0) = (P/Q)^k(0), k = 0, \dots, p + q$. La réciproque est aussi simple.
5. Si une telle approximation de Padé existe elle prend la forme :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax + b}{cx + d},$$
dont le développement limité d'ordre 3 en 0 est :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = b + (a - bc)x + (bc^2 - ac)x^2 + O(x^3).$$
Il faut donc que $b = 1, a = c, bc^2 - ac = 1$, ce qui est impossible, puisque les premières deux équations entraînent $bc^2 - ac = 0$.
6. (a) Rappelons que la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ admet, pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, un développement en série entière de rayon 1 en 0. De ce fait, $(1 + x)^{1/2}$ et $(1 + 3x)^{-1/2}$ admettent des développements en série entière absolument convergents sur $] - 1/3, 1/3[$. On peut donc effectuer le produit et obtenir un développement de f en série entière $\sum b_nx^n$ sur $] - 1/3, 1/3[$. Sie le rayon R de ce développement est $> 1/3$, la somme $g(x)$ de $\sum b_nx^n$ possède une limite finie en -1/3+0, donc f aussi, ce qui est exclu. Enfin, les trois premiers termes du développement limité de f sont 1, $-x$ et $5x^2/2$.
   (b) Par des développements limités, compte-tenu de la forme que peuvent prendre les les approximants de Padé, on trouve
$$h_1 = 1 - x + 5x^2/2, h_2 = 1/(1 + x), h_3 = \frac{3x + 2}{5x + 2}.$$

(c)

$$f - h_3(0,1) = 1,3310^{-4},$$
$$f - h_3(0,2) = 6,4110^{-4},$$
$$f - h_3(0,5) = 31,8110^{-4},$$
$$f - h_3(0,1) = 71,7810^{-4},$$
$$f - h_3(0,1) = 197,0110^{-4}.$$
$$h_1 - f(0,1) = 0,005133,$$
$$h_1 - f(0,2) = 0,033975$$
$$h_1 - f(0,5) = 0,350403,$$
$$h_1 - f(1) = 1,792893,$$
$$h_1 - f(0,1) = \text{beaucoup}.$$

Deuxième Partie

Approximation de Padé d'ordre $(p,1)$ de la fonction exponentielle.

1. Toujours par les mêmes méthodes, on trouve :
$$\frac{2+x}{2-x}.$$
2. On cherche donc $b \in \mathbb{R}^*$ et un polynôme P de degré $\leq p$ tels que :
$$(1+bx)(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!}+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+O(x^{p+2})) - P(x) = O(x^{p+2}).$$
Il faut déjà annuler le coefficient de x^{p+1}, donc $\frac{b}{p!}+\frac{1}{(p+1)!}=0$, soit $b = -\frac{1}{p+1}$. De là :
$$P(x) = (1-\frac{x}{p+1})(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!}) + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$
$$= 1 + (\frac{1}{1!}-\frac{1}{p+1}) + \cdots + (\frac{1}{p!}-\frac{1}{(p-1)!(p+1)})x^p.$$
Choisissons une entier $N > x$. Alors pour tout $p \geq N$ on a:
$$(1-\frac{x}{p+1})R_p(x) = P(x) = (1-\frac{x}{p+1})(1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!}) + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$
qui tend visiblement vers e^x lorsque p tend vers $+\infty$. Comme $\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$ et $1-\frac{x}{p+1}$ convergent uniformément vers 0 et 1 sur $[-A, A]$,
$$R_p(x) = (1+x+\cdots+\frac{x^p}{p!}) + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!(1-\frac{x}{p+1})}$$

converge uniformément vers e^x pour $p \geq [A] + 1$.

3. (a) On reprend les calculs ci-dessus :

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!(1 - \frac{x}{p+1}} - \sum_{k \geq p+1} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour $|x| < p + 1$ on a

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{p+1}} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(p+1)^k}$$

et

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k \geq 1} (\frac{1}{(p+1)^k} - \frac{1}{(p+2)\ldots(p+k+1)}) x^{k-1},$$

donc $c_k := \frac{1}{(p+1)^{k+1}} - \frac{1}{(p+2)\ldots(p+k+1)}$ conviennent. Enfin, le critère d'Alembert montre que le rayon de convergence de $\sum c_k x^k$ est $p + 1$.

(b) Si $p > [A] + 1$, le calcul ci-dessus montre que $R_p(x) - e^x$ est somme sur $[0, A]$ d'une série entière à coefficients positifs, d'où le premier point. La majoration demandée est alors issue du développement en série entière, par exemple :

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{A^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k \geq 1} (\frac{A}{p+1})^k,$$

d'où, pour tout $x \in [0, A]$ et $p \geq [A] + 1$

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{1}{p+1} \frac{A^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{1 - \frac{A}{p+1}}.$$

(c) Ici $A = 1$, donc pour $p \geq 2$ et $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}} \frac{1}{p+1} \frac{x^{p+2}}{(p+1)!},$$

soit

$$0 \leq R_p(x) - e^x \leq \frac{x^{p+2}}{p(p+1)!} < e^x - S_p(x),$$

dès que $x > 0$. Donc $R_p(x)$ est plus proche que $S_p(x)$.