ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

les candidats devront traiter au choix, l'un des trois sujets suivants :

SUJET n° 1

«La technologie est la science de l'homme, en tant que créateur et porteur de culture».

Commentez cette assertion (Votre argumentation doit être soutenue par des exemples précis).

SUJET n° 2

Quelles réflexions vous suggèrent la phrase de Tristan Bernard (écrivain français 1866-1947) dans son dictionnaire humoristique A à Z ?

«Si un individu persiste à marcher droit au milieu d'une foule qui zigzague, c'est lui qui aura l'air de zigzaguer. Il faut suivre le roulis et ne pas lui résister».

SUJET n° 3

Evoquant le passé et l'avenir un proverbe bantou s'exprime ainsi :

«La route n'enseigne pas au voyageur ce qui l'attend à l'étape»

Quelles sont les réflexions que vous inspirent ce proverbe?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Dans tout ce qui suit J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $[-1,1]$, de longueur non nulle et tel que, pour tout $x \in J,\ x^2 \in J$. On étudie l'ensemble E_J des applications dérivables de J dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(*)\ \forall x \in J,\ f'(x) = f\left(x^2\right)$$

I - PRELIMINAIRES

❶ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2, -\infty < a < b \leq +\infty$, et g une application n fois dérivable de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n$, la dérivée k-ième $g^{(k)}$ admet une limite λ_k quand la variable tend vers a. On définit alors la fonction $\tilde{g}$ de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{g}(a) = \lambda_0\,;$$
$$\forall x \in]a,b[,\ \tilde{g}(x) = g(x).$$

Démontrer que la fonction $\tilde{g}$ est n fois dérivable sur $[a,b[$ et

$$\forall k,\ 1 \leq k \leq n,\ \tilde{g}^{(k)}(a) = \lambda_k.$$

❷ Soit J un intervalle comme au début. Démontrer que E_J est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions indéfiniment dérivables sur J.

❸ Soit g une fonction dérivable définie sur un intervalle borné $I =]a,b[(-\infty < a < b < +\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a/ On suppose que g et sa dérivée g' sont toutes deux minorées sur I.

Montrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a.

b/ On suppose maintenant que g et sa dérivée g' sont toutes deux majorées sur I. Démontrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a.

❹ On définit une application θ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\theta(-1) = \theta(1) = 0$$
$$\forall x \in]-1,1[, \theta(x) = e^{\omega(x)} \text{ avec } \omega(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

a/ Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$.

b/ Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$, strictement croissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta^{(n)}(1) = \theta^{(n)}(-1) = 0$.

c/ Soit C^∞ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions indéfiniment dérivables de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et D le sous espace de C^∞ des fonctions s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées aux points 1 et -1. Démontrer que l'application linéaire, de C^∞ dans lui même, $f \mapsto \theta f$ (où θf est l'application définie par $\forall x \in [-1,1], \theta f(x) = \theta(x) f(x)$) est injective et à valeurs dans D. En déduire que D est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

II - ETUDE DE $E_{[-1,1]}$

❶ On définit une suite d'entiers $(q_k, k \in \mathbb{N})$ par

$$q_0 = 0;$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ q_{k+1} = 2q_k + 1$$

a/ Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = 2^k - 1$

On note $Q = \left\{\ q_k \ / \ k \in \mathbb{N}\ \right\}$.

Soit $(a_n, n \in \mathbb{N})$ la suite de nombres réels définie par

$$a_0 = 1;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{l=k} q_l}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \notin Q,\ a_n = 0$$

b/ Trouver la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$

c/ Déterminer, pour $x > 1, \lim\limits_{k \to +\infty} a_{q_k} x^{q_k}$

d/ Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 et que l'application

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie sur $[-1,+1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

e/ Démontrer que S est un élément de $E_{[-1,1]}$ tel que $S(0) = 1$.

❷ a/ Donner une majoration que l'on justifiera de $\left|S(x)-\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n\right|$ qui soit valable sur tout le segment $[0,1]$. En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de $S(1)$.

b/ Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe $y = S(x)$; on précisera la concavité.

c/ Etablir la relation : $\int_0^1 S(x)dx = \frac{2}{3}S(1)$

❸ Soient $(a,b) \in [-1,1]^2$ tels que $a \leq 0 \leq b,\ a^2 \leq b,\ J = [a,b]$ et $f \in E_J$.

a/ On suppose que $f(0) = 0$. On pose $M = \sup\{|f(t)| / t \in J\}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, |f(x)| \leq M|x|^{q_n}$.

b/ En déduire que f est nulle.

c/ On ne suppose plus maintenant que $f(0) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in J, f(x) = f(0)S(x)$. En déduire que E_J est de dimension 1.

ETUDE DE $E_{]0,1[}$

Dans cette partie, le symbole J désigne l'intervalle $]0,1[$.

❶ Soient $f \in E_J, p \in J$ et ($p_n, n \in \mathbb{N}$) la suite définie par :

$$p_0 = p$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \sqrt{p_n}$$

a/ Démontrer que la suite ($p_n, n \in \mathbb{N}$) est strictement croissante et déterminer sa limite.

b/ Démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{k=n}(1+p_{k+1}-p_k), n \in \mathbf{N}\right)$ est convergente.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \sup\{|f(x)| / x \in [p_n, p_{n+1}]\}$.

c/ A l'aide de la relation $f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt$, démontrer l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq M_{n-1}\left(1 + p_{n+1} - p_n\right)$$

En déduire que la suite ($M_n, n \in \mathbb{N}$) est bornée.

d/ Etablir que, pour tout $\alpha \in J, f$ et f' sont bornées sur $\left[\alpha, 1\right[$. Montrer que $f(x)$ a une limite λ quand x tend vers 1 et que, si l'on pose $f(1) = \lambda$, la fonction ainsi prolongée appartient à $E_{]0,1]}$.

❷ Soit $f \in E_J$

a/ On suppose qu'il existe $\beta \in J$ tel que f soit majorée dans $\left]0, \beta\right]$. Etablir que $f(x)$ et $f'(x)$ ont une même limite finie μ quand x tend vers 0. En déduire que f est la restriction de μS à J

b/ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante, on a alors les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon \in J, \ \sup\left\{ f(x) / x \in \left]0, \varepsilon\right] \right\} = +\infty \text{ et } \inf\left\{ f(x) / x \in \left]0, \varepsilon\right] \right\} = -\infty$$

c/ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante

$$Card\left\{ x / x \in \left]0, \varepsilon\right], f(x) = 0 \right\} = +\infty$$

La suite de cette partie est consacrée à la fabrication et à l'étude d'un élément de E_J qui ne soit pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❸ On pose $r_0 = \dfrac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}, r_{n+1} = \sqrt{r_n}$

a/ Démontrer que la suite ($r_n, n \in \mathbb{Z}$) est bien définie et expliciter r_n.

b/ Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}, I_n = \left[r_n, r_{n+1}\right]$. Déterminer $\bigcup_{n \in Z} I_n$.

Soit λ un élément de D où D est défini en I ❹ c/ Démontrer que les formules suivantes

$$\forall x \in I_0, \varphi_0(x) = \lambda(8x-3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_n, \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(r_n) + \int_{r_n}^{x} \varphi_{n-1}(t^2)dt$$

définissent pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application φ_n de I_n dans $\mathbb{R}$.

d/ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n admet dans I_n une dérivée continue et que $\varphi_n^{'}(r_{n+1}) = \varphi_{n-1}(r_n) = \varphi_n(r_n)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée à gauche de φ_{n-1} en r_n et la dérivée de φ_n en ce même point sont égales.

❹ a/ Démontrer que la formule suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_{-m}, \varphi_{-m}(x) = \varphi^{'}_{-\mathbf{m+1}}(\sqrt{x})$$

définit pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, une application φ_{-m} de I_{-m} dans $\mathbb{R}$.

b/ Etablir que pour tout $m \in \mathbb{N}^*, \varphi_{-m}$ est indéfiniment dérivable dans I_{-m} et que φ_{-m} et toutes ses dérivées s'annulent aux deux bornes de I_{-m} .

❺ Démontrer qu'il existe une application ψ_λ de J dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in I_n,\ \psi_\lambda(x) = \varphi_n(x)$$

et montrer que cette fonction ψ_λ appartient à E_J mais que, pour un choix convenable de λ, ψ_λ n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❻ Démontrer que l'application de D dans $E_J, \lambda \mapsto \psi_\lambda$ est linéaire et injective.

En déduire que E_J est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{R}$.

❼ On pose ici $\lambda = \theta$ où θ a été défini au I ❹

a/ Donner le sens de variation de ψ_θ et celui de $\psi_\theta^{'}$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, étudier le signe et le sens de variation de ψ_θ sur $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$.

b/ Donner une minoration du nombre de racines de ψ_θ dans $\left]r_n, r_{n+1}\right[$ pour $n < 0$.

❽ Trouver une relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre $\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x)dx$ et $\int_{r_0}^{r_1} \psi_\theta(x)dx$.

Quelle est la nature de $\int_0^1 \psi_\theta(x)dx$?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

COMPOSITION DE CONTRACTION DE TEXTE

DUREE : 3 HEURES

Cette épreuve a pour objet de faire apparaître l'aptitude des candidats à discerner les idées essentielles et à en présenter un exposé synthétique, sans discussion ni commentaire.

Les candidats ne doivent pas seulement découper et regrouper les phrases jugées les plus significatives ; ils doivent repenser ce texte et le résumer en usant d'un style personnel. Le texte résumé doit pouvoir être compris par tout lecteur ignorant le texte original.

Résumer en 250 mots environ ce texte extrait de "Race et histoire" de Lévi-Strauss.

* *
*

Pour comprendre comment, et dans quelle mesure, les cultures humaines diffèrent entre elles, si ces différences s'annulent ou se contredisent, ou si elles concourent à former un ensemble harmonieux, il faut d'abord essayer d'en dresser l'inventaire. Mais c'est ici que les difficultés commencent, car nous devons nous rendre compte que les cultures humaines ne diffèrent pas entre elles de la même façon, ni sur le même plan. Nous sommes d'abord en présence de sociétés juxtaposées dans l'espace, les unes proches, les autres lointaines, mais, à tout prendre, contemporaines. Ensuite nous devons compter avec des formes de la vie sociale qui se sont succédées dans le temps et que nous sommes empêchés de connaître par expérience directe. Tout homme peut se transformer en ethnographe et aller partager sur place l'existence d'une société qui l'intéresse ; par contre, même s'il devient historien ou archéologue, il n'entrera jamais directement en contact avec une civilisation disparue, mais seulement à travers des documents écrits ou les monuments figurés que cette société - ou d'autres - auront laissés à son sujet. Enfin, il ne faut pas oublier que les sociétés contemporaines restées ignorantes de l'écriture furent, elles aussi, précédées par d'autres formes, dont la connaissance est pratiquement impossible, fût-ce de manière indirecte ; un inventaire consciencieux se doit de leur réserver des cases blanches sans doute en nombre infiniment plus élevé que celui des cases où nous nous sentons capables d'inscrire quelque chose. Une première constatation s'impose : la diversité des cultures humaines est, en fait dans le présent, en fait et aussi en droit dans le passé, beaucoup plus grande et plus riche que tout ce que nous sommes destinés à en connaître jamais.

Mais, même pénétrés d'un sentiment d'humilité et convaincus de cette limitation, nous rencontrons d'autres problèmes. Que faut-il entendre par cultures différentes ? Certaines semblent l'être, mais si elles émergent d'un tronc commun elle ne diffèrent pas au même titre que deux sociétés qui à aucun moment de leur développement n'ont entretenu de rapports. Ainsi l'ancien empire des Incas du Pérou et celui du Dahomey en Afrique diffèrent entre eux de façon plus absolue que, disons, l'Angleterre et les Etats-Unis d'aujourd'hui, bien que ces deux sociétés doivent aussi être traitées comme des sociétés distinctes. Inversement, des sociétés entrées récemment en contact très intime paraissent offrir l'image de la même civilisation alors qu'elles y ont accédé par des chemins différents, que l'on n'a pas le droit de négliger. Il y a simultanément à l'oeuvre, dans les sociétés humaines, des forces travaillant dans des directions opposées : les unes tendant au maintien et même à l'accentuation des particularismes ; les autres agissant dans le sens de la convergence et de l'affinité. L'étude du langage offre des exemples frappants de tels phénomènes : ainsi, en même temps que des langues de même origine ont tendance à se différencier les unes par rapport aux autres (tels : le russe, le français et l'anglais), des langues d'origines variées, mais parlées dans des territoires contigus, développent des caractères communs : par exemple, le russe s'est, à certains égards, différencié d'autres langues slaves pour se rapprocher, au moins par certains traits phonétiques, des langues finno-ougriennes et turques parlées dans son voisinage géographique immédiat.

Quand on étudie de tels faits - et d'autres domaines de la civilisation, comme les institutions sociales, l'art, la religion, en fourniraient aisément de semblables - on en vient à se demander si les sociétés humaines ne se définissent pas, en égard à leurs relations mutuelles, par un certain *optimum* de diversité au-delà duquel elles ne sauraient aller, mais en dessous duquel elles ne peuvent, non plus, descendre sans danger. Cet optimum varierait en fonction du nombre des sociétés, de leur importance numérique, de leur éloignement géographique et des moyens de communication (matériels et intellectuels) dont elle disposent. En effet, le problème de la diversité ne se pose pas seulement à propos des cultures envisagées dans leurs rapports réciproques ; il existe aussi au sein de chaque société, dans tous les groupes qui la constituent : castes, classes, milieux professionnels ou confessionnels, etc., développent certaines différences auxquelles chacun d'eux attache une extrême importance. On peut se demander si cette *diversification* interne ne tend pas à s'accroître lorsque la société devient, sous d'autres rapports, plus volumineuse et plus homogène ; tel fut, peut-être, le cas de l'Inde ancienne, avec son système de castes s'épanouissant à la suite de l'établissement de l'hégémonie aryenne.

On voit donc que la notion de la diversité des cultures humaines ne doit pas être conçue d'une manière statique. Cette diversité n'est pas celle d'un échantillonnage inerte ou d'un catalogue desséché. Sans doute les hommes ont-ils élaboré des cultures différentes en raison de l'éloignement géographique, des propriétés particulières du milieu et de l'ignorance où ils étaient du reste de l'humanité ; mais cela ne serait rigoureusement vrai que si chaque culture ou chaque société était liée et s'était développée dans l'isolement de toutes les autres. Or cela n'est jamais le cas, sauf peut-être dans des exemples exceptionnels comme celui des Tasmaniens (et là encore, pour une période limitée). Les sociétés humaines ne sont jamais seules ; quand elles semblent le plus séparées, c'est encore sous forme de groupes et de paquets. Ainsi, il n'est pas exagéré de supposer que les cultures nord-américaines et sud-américaines ont été coupées de presque tout contact avec le reste du monde pendant une période dont la durée se situe entre dix mille et vingt-cinq mille années. Mais ce gros fragment d'humanité détachée consistait en une multitude de sociétés, grandes et petites, qui avaient entre elles des contacts fort étroits. Et à côté des différences dues à l'isolement, il y a celles, tout aussi importantes, dues à la proximité : désir de s'opposer, de se distinguer, d'être soi. Beaucoup de coutumes sont nées, non de quelque nécessité interne ou accident favorable, mais de la seule volonté de ne pas demeurer en reste par rapport à un groupe voisin qui soumettait à un usage précis un domaine où l'on n'avait pas songé soi-même à édicter des règles. Par conséquent, la diversité des cultures humaines ne doit pas nous inviter à une observation morcelante ou morcelée. elle est moins fonction de l'isolement des groupes que des relations qui les unissent.

...

Et pourtant, il semble que la diversité des cultures soit rarement apparue aux hommes pour ce qu'elle est : un phénomène naturel, résultant des rapports directs ou indirects entre les sociétés ; il y ont plutôt vu une sorte de monstruosité ou de scandale ; dans ces matières, le progrès de la connaissance n'a pas tellement consisté à dissiper cette illusion au profit d'une vue plus exacte qu'à l'accepter ou à trouver le moyen de s'y résigner.

L'attitude la plus ancienne, et qui repose sans doute sur des fondements psychologiques solides puisqu'elle tend à réapparaître chez chacun de nous quand nous sommes placés dans une situation inattendue, consiste à répudier purement et simplement les formes culturelles : morales, religieuses, sociales, esthétiques, qui sont les plus éloignées de celles auxquelles nous nous identifions.

... Sans doute les grands systèmes philosophiques et religieux de l'humanité - qu'il s'agisse du bouddhisme, de christianisme ou de l'islam, des doctrines stoïciennes, kantienne ou marxiste - se sont-ils constamment élevés contre cette aberration. Mais la simple proclamation de l'égalité naturelle entre tous les hommes et de la fraternité qui doit les unir, sans distinction de races ou de cultures, a quelque chose de décevant pour l'esprit, parce qu'elle néglige une diversité de fait, qui s'impose à l'observation et dont il ne suffit pas de dire qu'elle n'affecte pas le fond du problème pour que l'on soit théoriquement et pratiquement autorisé à faire comme si elle n'existait pas. Ainsi le préambule à la seconde déclaration de l'Unesco sur le problème des races remarque judicieusement que ce qui convainc l'homme de la rue que les races existent, c'est l' "évidence immédiate de ses sens quand il aperçoit ensemble un Africain, un Européen, un Asiatique et un Indien américain".

Les grandes déclarations des droits de l'homme ont, elles aussi, cette force et cette faiblesse d'énoncer un idéal trop souvent oublieux du fait que l'homme ne réalise pas sa nature dans une humanité abstraite, mais dans des cultures traditionnelles où les changement les plus révolutionnaires laissent subsister des pans entiers et s'expliquent eux-mêmes en fonction d'une situation strictement définie dans le temps et dans l'espace. Pris entre la double tentation de condamner des expériences qui le heurtent affectivement, et de nier des différences qu'il ne comprend pas intellectuellement, l'homme moderne s'est livré à cent spéculations philosophies et sociologiques pour établir de vains compromis entre ces pôles contradictoires, et rendre compte de la diversité des cultures tout en cherchant à supprimer ce qu'elle conserve pour lui de scandaleux et de choquant.

Mais, si différentes et parfois si bizarres qu'elles puissent être, toutes ces spéculations se ramènent en fait à une seule recette, que le terme de *faux évolutionnisme* est sans doute le mieux apte à caractériser. En quoi consiste-t-elle ? Très exactement, il s'agit d'une tentative pour supprimer la diversité des cultures tout en feignant de la reconnaître pleinement. Car, si l'on traite les différents états où se trouvent les sociétés humaines, tant anciennes que lointaines, comme des *stades* ou des *étapes* d'un développement unique qui, partant du même point, doit les faire converger vers le même but, on voit bien que la diversité n'est plus qu'apparente. L'humanité devient une et identique à elle-même ; seulement, cette unité et cette identité ne peuvent se réaliser que progressivement et la variété des cultures illustre les moments d'un processus qui dissimule une réalité plus profonde ou en retarde la manifestation.

... Chaque société peut, de son propre point de vue, répartir les cultures en trois catégories : celles qui sont ses contemporaines, mais se trouvent situées en un autre lieu du globe ; celles qui se sont manifestées approximativement dans le même espace, mais l'on précédée dans le temps ; celles, enfin, qui ont existé à la fois dans un temps antérieur au sien et dans un espace différent de celui où elle se place.

On a vu que ces trois groupes sont très inégalement connaissables. Dans le cas du dernier, et quand il s'agit de cultures sans écriture, sans architecture et à techniques rudimentaires (comme c'est le cas pour la moitié de la terre habitée et pour 90 à 99%, selon les régions, du laps de temps écoulé depuis le début de la civilisation), on peut dire que nous ne pouvons rien en savoir et que tout ce qu'on essaie de se présenter à leur sujet se réduit à des hypothèses gratuites.

Par contre, il est extrêmement tentant de chercher à établir, entre les cultures du premier groupe, des relations équivalant à un ordre de succession dans le temps. Comment des sociétés contemporaines, restées ignorantes de l'électricité et de la machine à vapeur, n'évoqueraient-elles pas la phase correspondante du développement de la civilisation occidentale ? Comment ne pas comparer les tribus indigènes, sans écriture et sans métallurgie, mais traçant des figures sur les parois rocheuses et fabriquant des outils de pierre, avec les formes archaïques de cette même civilisation, dont les vestiges trouvés dans les grottes de France et d'Espagne attestent la similarité ? C'est là surtout que le faux évolutionnisme s'est donné libre cours. Et pourtant ce jeu séduisant, auquel nous nous abandonnons presque irrésistiblement chaque vois que nous en avons l'occasion (le voyageur occidental ne se complaît-il pas à retrouver le "moyen âge" en Orient, le "siècle de Louis XIV" dans le Pékin d'avant la guerre mondiale, l' "âge de la pierre" parmi les indigènes d'Australie et de la Nouvelle-Guinée ?), est extraordinairement pernicieux. Des civilisations disparues, nous ne connaissons que certains aspects, et ceux-ci sont d'autant moins nombreux que la civilisation considérée est plus ancienne, puisque les aspects connus sont ceux-là seuls qui ont pu survivre aux destructions du temps. Le procédé consiste donc à prendre la partie pour le tout, à conclure, du fait que *certains* aspects de deux civilisations, (l'une actuelle, d'autre disparue) offrent des ressemblances, à l'analogie de *tous* les aspects. Or non seulement cette façon de raisonner est logiquement insoutenable, mais dans bon nombre de cas elle est démentie par les faits.

Jusqu'à une époque relativement récente, les Tasmaniens, les Patagons possédaient des instruments de pierre taillée, et certaines tribus australiennes et américaines en fabriquent encore. Mais l'étude de ces instruments nous aide fort peu à comprendre l'usage des outils de l'époque paléolithique. Comment se servait-on des fameux "coups-de-poing" dont l'utilisation devait pourtant être si précise que leur forme et leur technique de fabrication sont restées standardisées de façon rigide pendant cent ou deux cent mille années, et sur un territoire s'étendant de l'Angleterre à l'Afrique du Sud, de la France à la Chine ? ... Quelle pouvait être la technologie des cultures tardenoisiennes qui ont abandonné derrière elles un nombre incroyable de minuscules morceaux de pierre taillée, aux formes géométriques infiniment diversifiées, mais fort peu d'outils à l'échelle de la main humaine ? Toutes ces incertitudes montrent qu'entre les sociétés paléolithiques et certaines sociétés indigènes contemporaines existe toujours une ressemblance : elle se sont servies d'un outillage de pierre taillée. Mais, même sur le plan de la technologie, il est difficile d'aller plus loin : la mise en oeuvre du matériau, les types d'instruments, donc leur destination, étaient différents et les uns nous apprennent peu sur les autres à ce sujet. Comment donc pourraient-ils nous instruire sur le langage, les institutions sociales ou les croyances religieuses ?

Une des interprétations les plus populaires, parmi celles qu'inspire l'évolutionnisme culturel, traite les peintures rupestres que nous ont laissées les sociétés du paléolithique moyen comme des figurations magiques liées à des rites de chasse. La marche du raisonnement est la suivante : les populations primitives actuelles ont des rites de chasse, qui nous apparaissent souvent dépourvus de valeur utilitaire ; les peintures rupestres préhistoriques, tant par leur nombre que par leur situation au plus profond des grottes, nous semblent sans valeur utilitaire ; leurs auteurs étaient des chasseurs : donc elles servaient à des rites de chasse. Il suffit d'énoncer cette argumentation implicite pour en apprécier l'inconséquence. Du reste, c'est surtout parmi les non-spécialistes qu'elle a cours, car les ethnographes, qui ont, eux, l'expérience de ces populations primitives si volontiers mises "à toutes les sauces" par un cannibalisme pseudo-scientifique peu respectueux de l'intégrité des cultures humaines, sont d'accord pour dire que rien, dans les faits observés, ne permet de formuler une hypothèse quelconque sur les documents en question.

Par l'état de ses civilisation, l'Amérique précolombienne, à la veille de la découverte, évoque la période néolithique européenne. Mais cette assimilation ne résiste pas davantage à l'examen : en Europe, l'agriculture et la domestication des animaux vont de pair, tandis qu'en Amérique un développement exceptionnellement poussé de la première s'accompagne d'une presque complète ignorance (ou, en tout cas, d'une extrême limitation) de la seconde. En Amérique, l'outillage lithique se perpétue dans une économie agricole qui, en Europe, est associée au début de la métallurgie.

Il est inutile de multiplier les exemples. Car les tentatives faites pour connaître la richesse et l'originalité des cultures humaines, et pour les réduire à l'état de répliques inégalement arriérées de la civilisation occidentale, se heurtent à une autre difficulté, qui est beaucoup plus profonde : en gros (et exception faite de l'Amérique), toutes les sociétés humaines ont derrière elles un passé qui est approximativement du même ordre de grandeur. Pour traiter certaines sociétés comme des "étapes" du développement de certaines autres, il faudrait admettre qu'alors que, pour ces dernières, il se passait quelque chose, pour celles-là il ne se passait rien - ou fort peu de choses -. Et en effet, on parle volontiers des "peuples sans histoire" (pour dire parfois que ce sont les plus heureux). Cette formule elliptique signifie seulement que leur histoire est et restera inconnue, mais non qu'elle n'existe pas. Pendant des dizaines et même des centaines de millénaires, là-bas aussi, il y a eu des hommes qui ont aimé, haï, souffert, inventé, combattu. En, vérité, il n'existe pas de peuples enfants ; tous sont adultes, même ceux qui n'ont pas tenu le journal de leur enfance et de leur adolescence.

On pourrait sans doute dire que les sociétés humaines ont inégalement utilisé un temps passé qui, pour certaines, aurait même été du temps perdu ; que les unes mettaient les bouchées doubles tandis que les autres musaient le long du chemin. On en viendrait ainsi à distinguer entre deux sortes d'histoires : une histoire progressive, acquisitive, qui accumule les trouvailles et les inventions pour construire de grandes civilisations, et une autre histoire, peut-être également active et mettant en oeuvre autant de talents, mais où manquerait le don synthétique qui est le privilège de la première. Chaque innovation, au lieu de venir s'ajouter à des innovations antérieures et orientées dans le même sens, s'y dissoudrait dans une sorte de flux ondulant qui ne parviendrait jamais à s'écarter durablement de la direction primitive.

Cette conception nous paraît beaucoup plus souple et nuancée que les vues simplistes dont on a fait justice aux paragraphes précédents. Nous pourrons lui conserver une place dans notre essai d'interprétation de la diversité des cultures et cela sans faire injustice à aucune.

Lévi-Strauss
Race et histoire
1952 UNESCO
(Denoël 1987)
(Flio-Essars 1985)

Concours CESD 1999

Epreuve de Calcul Numérique

Durée : 2 heures
Calculatrices permises

Soit f une fonction réelle égale à la somme d'une série entière de terme général $(a_n x^n)_{x \in \mathbb{N}}$; le rayon de convergence R est supposé strictement positif. Dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$ la valeur de $f(x)$ est donc donnée par la relation :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Etant donné deux entiers naturels p et q, on dit que la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(C1) Il existe deux polynômes réels P et Q de degré respectivement égal à p et à q tels que $Q(0) = 1$ et tels que la fraction rationnelle P/Q est irréductible.

(C2) Il existe deux réels α et M avec $0 < \alpha \leq R, M > 0$, tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

$$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}| \leq M|x|^{p+q+1}.$$

Première Partie

Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples.

1. Démontrer que, pour que la fonction f admette une approximation de Padé d'ordre (p, q), il faut et il suffit que la condition (C1) ci-dessus et la condition (C3) ci-après soient satisfaites :

   (C3) Il existe deux réels α et M avec $0 < \alpha \leq R, M > 0$, tels que les trois fonctions f, P et Q aient la propriété :

   $$\text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[\text{ on a } |Q(x)f(x) - P(x)| \leq M|x|^{p+q+1}.$$

   En déduire que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q), il existe une fonction g somme d'une série entière telle que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$ les fonctions f, P, Q et g vérifient la relation :

   $$Q(x)f(x) - P(x) = x^{p+q+1}g(x).$$

2. Démontrer que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p, q), les polynômes P et Q sont définis de manière unique. La fraction rationnelle P/Q sera désignée par le symbole $[p/q]_f$ et sera appelée approximation de Padé d'ordre (p, q) de f.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel p, la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre $(p, 0)$. Préciser $[p/0]_f$.
4. Soient P et Q deux polynômes de degré respectivement égal à p et à q tels que $Q(0) = 1$ et tels que la fraction rationnelle P/Q soit irréductible ; démontrer que, pour que la fraction rationnelle P/Q soit l'approximation de Padé d'ordre (p, q) de f, il faut et il suffit que les valeurs prises par la fraction rationnelle P/Q et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p+q$ en 0 soient égales respectivement aux valeurs prises par la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p + q$ en 0.
5. Supposons que la fonction f soit définie par la relation : $f(x) = 1 + x^2$. Existe-t-il une approximation de Padé d'ordre $(1, 1)$ de cette fonction f ?
6. Supposons que la fonction f soit définie par la relation :

   $$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1+3x}}.$$

   (a) Démontrer l'existence d'un développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 ; déterminer son rayon de convergence et ses trois premiers termes.

   (b) Calculer les approximations de Padé $h_1 := [2/0]_f$, $h_2 := [0/1]_f$ et $h_3 := [1/1]_f$.

(c) Dresser le tableau des valeurs prises par les fonctions $f - h_3$ et $h_1 - f$ à 10^{-6} près lorsque la variable prend les valeurs suivantes : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 et 10.

Deuxième Partie

Approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle.

1. Déterminer l'approximation de Padé d'ordre $(1, 1)$ de la fonction exponentielle
$$x \mapsto e^x.$$
2. Déterminer, pour tout entier $p \geq 2$ l'approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle. Soit R_p la fraction rationnelle obtenue. Préciser le plus grand intervalle ouvert centré en 0 dans lequel la fraction R_p est définie et continue. Démontrer que, pour tout réel x, il existe un entier N tel que la suite de réels $((R_p(x))_{p \geq N}$ soit convergente et de limite e^x.
Est-il possible de démontrer, de manière analogue, une convergence uniforme dans un intervalle $[-A, A]$, $A > 0$, vers la fonction exponentielle ?
3. (a) L'entier p étant fixé, déterminer un intervalle centré en 0 et une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels tels que la relation
$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$
ait lieu pour tout x de cet intervalle. Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général $c_k x^k$.
(b) Démontrer que, pour tout intervalle $[0, A]$, $A > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $p > N$ l'inégalité
$$e^x \leq R_p(x)$$
ait lieu pour tous $x \in [0, A]$. En déduire, sous ces hypothèses sur p et x, une majoration de la différence $R_p(x) - e^x$.
(c) Il sera admis que, p étant toujours un entier, si x est un réel compris entre 0 et $p + 1$, la différence entre e^x et la somme $S_p(x)$ des $p + 1$ premiers termes de son développement en série entière dans un voisinage de 0 vérifie la double inégalité :
$$\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leq e^x - S_p(x) \leq \frac{x^{p+1}}{p!(p+1-x)}.$$
Est-ce que, en supposant maintenant x compris entre 0 et 1, le réel $R_p(x)$ est plus proche de e^x que $S_p(x)$?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

Soit $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$

❶ Calculer $A'A$.

❷ En déduire, sans calculer le polynôme caractéristique de A, les valeurs propres de la matrice A.

EXERCICE n° 2

Soit $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

❶ Calculer M^2.

❷ Trouver un polynôme P du second degré tel que $P(M)=0$.

❸ La matrice M est-elle diagonalisable?. Si oui, déterminer ses valeurs propres.

❹ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où $n \in N^*, n>2$.

❺ En déduire M^n.

❻ Soit, pour $n>0$, $U_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Résoudre le système $U_{n+1}=MU_n$ de condition initiale $U_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE n° 3

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n $(n \geq 1)$. On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E. Pour $f \in L(E)$, on pose :

$$\|f\| = \underset{x \neq 0}{Sup} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

❶ Vérifier que la notation précédente permet de définir une norme sur E.

❷ Soient P et Q deux projections définies sur E et telles que $\|P-Q\|<1$.

Montre que $I-(P-Q)$ est inversible.

Montrer que l'application P est une bijection de $\mathrm{Im}(Q)$ sur $\mathrm{Im}(P)$ (Im désigne l'image).

En déduire que $\dim \mathrm{Im}(P) = \dim \mathrm{Im}(Q)$.

EXERCICE n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3, il existe un unique vecteur y de R^3 vérifiant :

$$\det(x_1, x_2, z) = y.z, \quad \forall z \in R^3$$

Ce vecteur y s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2, et on note $y = x_1 \wedge x_2$ (dans la relation précédente $y.z$ désigne le produit scalaire et $\det$ le déterminant).

❶ Calculer dans une base orthonormée de R^3, les composantes de $x_1 \wedge x_2$ en fonction de celles de x_1 et x_2.

❷ On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme u de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$.

Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$

Montrer qu'il existe un réel k tel que $u^3 = ku$

En déduire les valeurs propres réelles de u et les sous espaces propres associés.

❸ Pour tout réel α, on note φ_α l'application définie sur R^3 par

$$\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$$

Montrer que φ_α est un automorphisme de R^3.

Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

❹ En déduire qu'il existe $(a,b,c) \in R^3$ tel que $(\varphi_\alpha)^{-1} = a\,Id + bu + cu^2$ où Id désigne l'application identique. Calculer (a,b,c) en fonction de α .

EXERCICE n° 5

Déterminer l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec toutes les matrices de cet ensemble.

PROBLEME

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant :

$f \circ f = \lambda f$, où λ est un réel non nul.

On note $L_\lambda = \{f | f \circ f = \lambda f\}$.

❶ Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

❷ Montrer que pour toute fonction f de L_λ, le noyau de f et l'image de f sont deux sous espaces supplémentaires de E

❸ Soit $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$

❹ Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2.

❺ Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à une famille de L_λ et vérifiant $(u - a \times Id) \circ (u - b \times Id) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.

Montrer que $v = u - a \times Id$ et $w = u - b \times Id$ appartiennet à des familles de L_λ.

Ecrire u sous la forme $u = \alpha v + \beta w$ et en déduire u^n.

❻ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $(A - aI)(A - bI) = 0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n.