SESSION

D'AVRIL

1998

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

PARTIE n° 1

Existence du polynôme de meilleure approximation.

❶ E est trivialement un espace vectoriel normé par la norme sup.

❷- Soit d la distance de f à F_p. Par définition, il existe une suite $(g_n)_{n\in IN}$ dans F_p telle que, pour tout n $\|g_n - f\| < d + \frac{1}{n+1}$. Cela implique $\|g_n\| < \|f\| + d + 1$. La boule fermée de F_p $B(0, \|f\| + d + 1)$ est compacte, donc il existe une site extraite de $(g_n)_{n\in IN}$ que l'on continue à appeler $(g_n)_{n\in IN}$ et qui converge vers $g \in F_p$. Par continuité de la norme, on en déduit $\|g - f\| = d$; D'où l'existence de $P = g$.

PARTIE n° 2

Unicité du polynôme de meilleure approximation.

❶ Si $d = 0$, alors $P = f$ et $f \in F_p$. Réciproquement, si $f \in F_p$, $d = 0$ et $P = f$ est unique.

❷ Soit $d \neq 0$, $\alpha = \sup_{x\in[a,b]}\left[P(x) - f(x)\right]$ et $\beta = \inf_{x\in[a,b]}\left[P(x) - f(x)\right]$. On doit déjà avoir $\alpha \leq d$ et $\beta \geq -d$. Si $\alpha < d$, soit $Q = P + \frac{d-\alpha}{2} \in F_p$. Alors :

$\sup_{x\in[a,b]}\left[Q(x) - f(x)\right] = \alpha + \frac{d-\alpha}{2} = \frac{d+\alpha}{2} < d$ et $\inf_{x\in[a,b]}\left[Q(x) - f(x)\right] \geq -d + \frac{d-\alpha}{2} > -d$.

C'est absurde, donc $\alpha = d$; de même, $\beta = -d$.

Or $P - f$ est continue. Donc, il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $P(x_1) - f(x_1) = \alpha = d$ et $A_1 \neq \varnothing$.

On montre de même que $A_{-1} \neq \varnothing$.

❸ $P - f$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$ qui est compact. Elle y est donc uniformément continue et il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, si $|x - y| \leq \gamma$ alors :

$$\left|(P-f)(x) - (P-f)(y)\right| \leq \frac{d}{2}$$

Fixons m entier supérieur ou égal à $\frac{b-a}{\gamma}$. Le découpage tel que $x_k = a + k\frac{b-a}{m}$ répond à la question. On fixe ce découpage dans la suite du problème.

❹ Soit $(x,y) \in A_1 \times A_{-1}$. Alors, $(P-f)(x) - (P-f)(y) = 2d$, donc x et y ne peuvent pas être sur le même segment (saut maximum de $\frac{d}{2}$) ni sur des segments contigus (saut maximum de d). Mais $A_1 \neq \varnothing$ .et $A_{-1} \neq \varnothing$. Donc il y a au moins trois segments différents ($m \geq 3$) et il y a au moins un segment dans I_ε, un segment dans $I_{-\varepsilon}$ (qui sont forcément distincts), d'où $card(I) = r \geq 2$.

❺ Soit $I = \{i_1, ..., i_r\}$ suite strictement croissante telle que $B_j = \left[x_{i_j - 1}, x_{i_j}\right] \subset I_1 \cup I_{-1}$. Puisque $I_1 \cap I_{-1} = \varnothing$, cela implique qu'il existe un unique ε_1 tel que $B_{i_1} \in I_{\varepsilon_1}$.

Donc il existe un seul $j_1 \in I$, $j_1 = \sup i_k$ tels que $B_{i_1},\dots,B_{i_r} \in I_{\varepsilon_1}$; il existe un seul $j_2 \in I$, $j_2 = \sup i_l$ tels que $B_{i_{k+11}},\dots,B_{i_l} \in I_{-\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_2}$; etc.

D'où, de proche en proche, il existe une seule suite $(j_1,\dots,j_q)$ et $q \geq 2$.

❻ Soit $C_k = \bigcup_{j_{k-1}<j\leq j_k} B_j$. On sait que B_{j_k} et $B_{j_{k+1}}$ ne sont pas contigus (id est : $j_{k+1} > j_k + 1$). Cela implique que si $u \in \left]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_k+1}}\right[$, on a $x < u < y$ pour tout $(x,y) \in C_k \times C_{k+1}$.

A partir de maintenant, u_k est fixé et appartient à $\left]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_k+1}}\right[$.

❼ Soit $Q(x) = (x-u_1)\dots(x-u_{q-1})$. La fonction $P-f$ ne s'annule sur aucun B_j (car $\inf\left|P-f\right| \geq d/2$ sur B_j). Il en va trivialement de même pour Q. On en déduit que $(P-f)Q$ est de signe constant sur chacun des C_k.

De plus, lorsque l'on passe de C_k à C_{k+1}, $P-f$ change de signe (signe de ε_k) ainsi que Q (qui franchit un seul zéro). Le signe de $(P-f)Q$ est donc constant sur $\bigcup C_k$.

❽ i) Sur $[a,b]/\bigcup C_k$, $\sup\left|P(x)-f(x)\right| = d_1 < d$ (f ne peut atteindre d ou $-d$ en une borne de C_k, par définition de C_k).

Soit $M = \sup\left|Q(x)\right|$. Alors $\sup\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| \leq d_1 + |\lambda| M$

Finalement, si $|\lambda| < \dfrac{d-d_1}{M}$, alors $\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| < d$

ii) Sur $\bigcup C_k$, $P-f$ et Q ont le même signe. Si on impose $\lambda < 0$, alors :

$$\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| = \left|\left|P(x)-f(x)\right| - |\lambda|\left|Q(x)\right|\right|$$

Or $\left|P(x)-f(x)\right| \geq d/2$; En imposant de plus $|\lambda| M < d/2$, on aura :

$$\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| = \left|P(x)-f(x)\right| - |\lambda|\left|Q(x)\right| < d$$

Récapitulons : en prenant $\lambda < 0$ et $|\lambda| \leq \inf\left(\frac{d-d_1}{2};\frac{d}{2M}\right)$, et puisque $P - f + \lambda Q$ est continue, on aura bien $\|P - f + \lambda Q\| < d$. Mais alors, $Q \notin F_p$ (car sinon, $P + \lambda Q \in F_p$, ce qui est absurde). Donc le degré de Q est supérieur ou égal à $p+1$, ce qui implique $q \geq p+2$.

On peut alors choisir $p+2$ valeurs successives de k, k variant de 1 à $p+2$, telles que sur chaque C_k, il existe y_k tel que $(P-f)(y_k) = \varepsilon_k d$.

❾ i) Si P et P_1 sont dans F_p tels que $\|P - f\| = \|P_1 - f\| = d$, on aura :

$$\left\|\frac{1}{2}(P + P_1) - f\right\| \leq \frac{1}{2}\|P - f\| + \frac{1}{2}\|P_1 - f\| = d$$

Mais $\frac{1}{2}(P + P_1) \in F_p$, on doit donc nécessairement avoir $\left\|\frac{1}{2}(P + P_1) - f\right\| \geq d$; Il y a donc égalité.

ii) Soit x tel que $\frac{1}{2}(P(x) + P_1(x)) - f(x) = d$. Puisque $P(x) - f(x) \leq d$ et $P_1(x) - f(x) \leq d$, on doit en fait avoir : $P(x) - f(x) = P_1(x) - f(x) = d$. On a le même résultat pour les points y où $\frac{1}{2}(P(y) + P_1(y)) - f(y) = -d$.

Mais alors, $P - f$ et $P_1 - f$ prennent les mêmes valeurs aux $p+2$ points y_k ; $P - P_1$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p+1$ qui s'annule $p+2$ fois, donc $P = P_1$.

❿ Soit $R \in F_p$ tel qu'il existe $(z_1,\ldots,z_{p+2})$ dans $[a,b]$ où $R(z_i) - f(z_i) = (-1)^i \zeta \|R - f\|$ quel que soit $i \in \{1,\ldots,p+2\}$. Posons $\|R - f\| = \delta$. Il y a deux cas possibles :

- pour i tel que $(-1)^i \zeta = +1$, $R(z_i) - f(z_i) = \delta \geq d$ et $f(z_i) - P(z_i) \geq -d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \geq 0$.

- pour i tel que $(-1)^i \zeta = -1$, $R(z_i) - f(z_i) = -\delta \leq -d$ et $f(z_i) - P(z_i) \leq d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \leq 0$.

Si $R \neq P$, $\delta > d$ et $R(z_i) - f(z_i)$ est strictement positif ou strictement négatif selon la parité de i. Donc $R - P$ admet au moins $p+1$ zéros. C'est impossible, donc $R = P$.

En fait, la suite $(z_1,\ldots,z_{p+2})$ caractérise P.

PARTIE n° 3

Exemples.

❶ Soit P_0 le polynôme de meilleure approximation de f dans F_0. Posons $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors $P_0 = \dfrac{M+m}{2}$; En effet :

$\exists x_1 \in [a,b]$, $f(x_1) = M$, ce qui implique $\left(P_0 - f\right)(x_1) = \dfrac{m-M}{2}$

$\exists x_2 \in [a,b]$, $f(x_2) = m$, ce qui implique $\left(P_0 - f\right)(x_2) = \dfrac{M-m}{2}$

Et $\left\|P_0 - f\right\| = \dfrac{M-m}{2}$.

❷ $f(x) = e^x$. Soit P_1 le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1. Posons $P_1(x) = \alpha x + \beta$. D'après la question II-10, il existe z_1, z_2, z_3 tels que $\left(P - f\right)(z_1) = \left(P - f\right)(z_3)$, donc $\left(P - f\right)'$ s'annule une seule fois sur $[a,b]$. On obtient $\alpha - e^x = 0$ (et donc $\alpha > 0$), qui est équivalent à $x = \ln(\alpha) \in [a,b]$. $P - f$ est croissante de a à $\ln(\alpha)$ et décroissante de $\ln(\alpha)$ à b. Donc $\left\|P - f\right\| = -\left(P - f\right)(a) = -\left(P - f\right)(b) = \left(P - f\right)\left(\ln(\alpha)\right)$ ou, de façon équivalente :

$$e^a - \alpha a - \beta = e^b - \alpha b - \beta = \alpha \ln(\alpha) + \beta - \alpha$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{e^b - e^a}{b-a} ; \beta = \frac{1}{2(b-a)}\left[be^a - ae^b + \left(e^b - e^a\right)\left(1 - \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b-a}\right)\right)\right]$$

❸ $a = -b$, $f(x) = x^2 - \varepsilon x$ avec $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x)$: c'est une fonction paire. Le polynôme de meilleure approximation P doit donc être pair aussi, car $Q(x) = P(-x)$ est aussi un polynôme de meilleure approximation, et d'après la question II-10, ce polynôme est unique.

Posons $P(x) = \alpha x^2 + \beta$. Toujours d'après la question II-10, il existe z_1, z_2, z_3, z_4 où $P - f$ vaut $\pm d$. Par parité, il existe z_5 tel que $(P - f)(z_5) = \pm d$ et $z_3 = 0$. Soit $g = P - f$, étudiée sur $[0,b]$. Puisque $g(0) = g(z_5)$, $g'(x) = 2(\alpha - 1)x + 1$ s'annule en $z_4 = \dfrac{-1}{2(\alpha - 1)}$. Cela implique $\alpha - 1 < 0$, et donc g est croissante de 0 à $\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}$ et décroissante de $\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}$ à $b = z_5$. Finalement, $g(0) = -g\left(\dfrac{-1}{2(\alpha-1)}\right) = g(b)$, ce qui implique $\beta = (\alpha - 1)b^2 + b + \beta$ et donc $\alpha - 1 = -1/b$, donc $\dfrac{-1}{2(\alpha-1)} = \dfrac{b}{2}$ et $g\left(\dfrac{b}{2}\right) = -g(0)$ est équivalent à $\alpha \dfrac{b^2}{4} + \beta = -\beta$.

Finalement : $P(x) = (1 - 1/b)x^2 - b/8$

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ $\det(M-\lambda I)=(1-\lambda)^3-\frac{1}{2}(1-\lambda)=(1-\lambda)((1-\lambda)^2-\frac{1}{2})$. Les valeurs propres de la matrice sont : $1, 1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces trois valeurs étant strictement positives, la matrice est définie positive.

❷ Soit $X=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$. La matrice de la projection orthogonale sur F au sens du produit scalaire défini par M est égale à : $X(X^{'}MX)^{-1}X^{'}M$, où $M^{'}$ désigne la transposée de M.

Calculons $P_F(u)$ pour $u\in\mathbf{R}^3$,

$X^{'}M=\begin{pmatrix}1/2&1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$ et $X^{'}MX=I_2$, d'où $X(X^{'}MX)^{-1}X^{'}M=\begin{pmatrix}0&0&0\\1/2&1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$

Pour $u=(x,y,z)$, on a $P_F(u)=(0,\frac{1}{2}x+y,\frac{1}{2}x+z)$

EXERCICE n° 2

❶ La décomposition de ϕ en carrés selon la méthode de Gauss donne :

$$\phi(x)=2x_1x_2+x_1(3x_3+4x_4)+5x_2x_3$$
$$\phi(x)=\frac{1}{2}(2x_2+3x_3+4x_4)(2x_1+5x_3)-\frac{5}{2}x_3(3x_3+4x_4)$$

On détermine alors deux formes linéaires l_1 et l_2 sur E par :

$$l_1 + l_2 = 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \text{ et } l_1 - l_2 = 2x_1 + 5x_3$$

On obtient,

$$l_1 = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \text{ et } l_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$

De même, on détermine deux formes linéaires l_3 et l_4 sur E par :

$l_3 + l_4 = 3x_3 + 4x_4$ et $l_3 - l_4 = x_3$, d'où
$l_3 = 2(x_3 + x_4)$ et $l_4 = x_3 + 2x_4$

On obtient ainsi,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(l_1^2 - l_2^2) \ -\frac{5}{2}(l_3^2 - l_4^2)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)^2 - 10(x_3 + x_4)^2 + \frac{5}{2}(x_3 + 2x_4)^2$$

La signature de ϕ est donc (2,2,n-4). Si $n = 4$, ϕ est non dégénérée.

❷ Pour obtenir une base ϕ -orthogonale de E, il suffit de transformer la base initiale de E par la matrice P définie par son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans cette base ϕ s'écrit : $\phi(x) = \frac{1}{2}X_1{}^2 - \frac{1}{2}X_2{}^2 - 10X_3{}^2 + \frac{5}{2}X_4{}^2$

EXERCICE n° 3

❶ Les vecteurs de F sont invariants par S_F et P_F. On a $E = F \oplus F^{\perp}$, donc pour tout $x \in E$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$. Géométriquement on obtient $S_F(x) = x - 2(x - P_F(x))$ ou encore $S_F = 2P_F - I$.

❷ Pour $F = Vect(a)$ et pour $x \in E$, on a :

$$P_F(x) = \frac{(x,a)}{\|a\|^2}a \text{ et } S_F(x) = 2\frac{(x,a)}{\|a\|^2}a - x$$

En effet, $e = \frac{a}{\|a\|}$ est une base orthonormée de F, donc $P_F(x) = \lambda e$ avec $\lambda(x,e) = (x, \frac{a}{\|a\|}) = \frac{1}{\|a\|}(x,a)$

Pour $F = a^{\perp}$, comme $E = Vect(a) \oplus a^{\perp}$, on a $P_E = I = P_{vect(a)} + P_{a^{\perp}}$. On en déduit :

$S_F = 2P_F - I = 2(I - P_a) - I = I - P_a$ et

$S_F(x) = x - 2\dfrac{(x,a)}{\|a\|^2}a$

❸ Pour $F = Vect(a)$, $P_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$ et $S_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & 0 & . \\ . & 0 & -1 & 0 \\ 0 & . & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pour $F = a^{\perp}$, $P_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & 1 & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$ et $S_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . \\ . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE n° 4

❶ On a $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & . & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & . \\ 0 & 1 & a+b & ab & 0 \\ . & 0 & . & . & ab \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

❷ On vérifie que $D_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

PROBLEME

❶ $X'X = \begin{pmatrix} X'_1 \\ . \\ X'_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & . & X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & . & \langle x_i, x_j \rangle \\ . & . & . \\ \langle x_i, x_j \rangle & . & \|x_p\|^2 \end{pmatrix} = G(x_1, \ldots, x_p)$,

$X'X$ est appelée matrice de Gram.

❷ On choisit x_{p+1} orthogonal à tous les vecteurs $\{x_1,\dots,x_p\}$ et unitaire, puis x_{p+2} orthogonal à tous les vecteurs $\{x_1,\dots,x_p,x_{p+1}\}$ et unitaire. Ainsi, on obtient par la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned}
&\langle x_i, x_j\rangle = 0, \forall 1 \le i \le p, \forall p+1 \le j \le n\\
&\langle x_j, x_j\rangle = 1,\ \forall p+1 \le j \le n\\
&\langle x_i, x_j\rangle = 0,\ \forall p+1 \le i, j \le n\ i \ne j
\end{aligned}$$

Ceci correspond à l'égalité demandée.

D'autre part, $(\det \hat{X})^2 = \det \hat{X}^{'} \hat{X} = \det X^{'} X$ et $\det G(x_1,\dots,x_p) = \det X^{'} X = \det X^{'} X.\det I_{n-p} = \det G(x_1,\dots,x_n)$, d'où l'égalité.
Il est clair qu'alors $\det G(x_1,\dots,x_p) > 0$.
On peut compléter les deux familles libres de vecteurs $\{x_1,\dots,x_p\}$ et $\left\{x_1,\dots,x_{p-1},x_p + \sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i\right\}$, qui engendrent le même sous-espace vectoriel, par les mêmes vecteurs $\{x_{p+1},\dots,x_n\}$ et obtenir ainsi,

$$(\det \hat{X})^2 = \det G(x_1,\dots,x_p) \text{ et } (\det \hat{X})^2 = \det G(x_1,\dots,x_{p-1},x_p + \sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i)$$

D'où le résultat demandé :

$$\det G(x_1,\dots,x_{p-1},x_p) = \det G(x_1,\dots,x_{p-1},x_p + \sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i)$$

❸ On a $P_F(y) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j$. Si $y \notin F$, les vecteurs $\{x_1,\dots,x_p,y\}$ sont indépendants et on applique le résultat précédent à l'ordre $p+1$ (dans ce cas le vecteur $y - P_F(y)$ est orthogonal à F). Si $y \in F$, $y - P_F(y) = 0$ et $y = P_F(y) = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j$., dans ce cas les deux déterminants sont nuls.

$$G(x_1,\dots,x_p,y - P_F(y)) = \begin{pmatrix} X^{'}X & 0 \\ 0 & \|y - P_F(y)\|^2 \end{pmatrix}$$

On a les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\det G(x_1,\dots,x_p,y - P_F(y)) = \det G(x_1,\dots,x_p,y)\\
&\det G(x_1,\dots,x_p,y - P_F(y)) = \det G(x_1,\dots,x_p,y) \times \|y - P_F(y)\|^2\\
&(d(y,F))^2 = \|y - P_F(y)\|^2
\end{aligned}$$

On en déduit,

$$(d(y,F))^2 = \frac{\det G(x_1,\ldots,x_p,y)}{\det G(x_1,\ldots,x_p)}$$

❹ $G(x_1,\ldots,x_p,y) = \begin{pmatrix} X'X & X'y \\ y'X & \|y\|^2 \end{pmatrix}$.

D'où $\det G(x_1,\ldots,x_p,y) = \det X'X \times \det(\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y)$

ou encore,

$$\det G(x_1,\ldots,x_p,y) = (\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y) \times \det G(x_1,\ldots,x_p)$$

D'autre part, $(d(y,F))^2 = \|y - P_F(y)\|^2 = \|y - X(X'X)^{-1}X'y\|^2$

En développant cette dernière expression, on obtient :

$\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y = (d(y,F))^2$ et donc,

$$(d(y,F))^2 = \frac{\det G(x_1,\ldots,x_p,y)}{\det G(x_1,\ldots,x_p)}$$

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

*

* *

PARTIE n° 1

❶ On a trivialement que $\|\|A\|\| = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $\|\|\lambda A\|\| = |\lambda|\|\|A\|\|$ quel que soit λ appartenant à ℝ. Pour prouver la troisième propriété, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \left(\|\|A\|\| + \|\|B\|\|\right)\|x\|$, ce qui implique bien que $\|\|A+B\|\| \leq \|\|A\|\| + \|\|B\|\|$

❷ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|ABx\| \leq \|\|A\|\|\|Bx\| \leq \|\|A\|\|\|\|B\|\|\|x\|$, ce qui implique bien que $\|\|AB\|\| \leq \|\|A\|\|\|\|B\|\|$

❸ ① $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]|x_j| \leq \max_{1\leq j\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)$, et donc $\|\|A\|\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, excepté la composante j pour laquelle $\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]$ est maximal, on voit que $\|\|A\|\|_1 \geq \max_{1\leq j\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right]$; d'où l'égalité demandée.

② $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.\|x\|_\infty$, et donc $\|\|A\|\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ tel que, si i atteint le maximum de $\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$, alors $x_j = \mathrm{sgn}(a_{ij})$, on voit que $\|\|A\|\|_\infty \geq \max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$; d'où l'égalité demandée.

❹ On a trivialement que $\left\|A\right\|_E = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $\left\|\lambda A\right\|_E = |\lambda|\left\|A\right\|_E$ quel que soit λ appartenant à $\mathbb{R}$. Pour prouver la troisième propriété, on se sert de l'inégalité de Minkowski, qui nous dit que : $\left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_{i,j}\left(a_{ij} + b_{ij}\right)^2\right)^{1/2}$.

Le coefficient à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de $A^t A$, que l'on note c_{ij}, est égal à $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$; par conséquent, $tr\left(A^t A\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,k} a_{ki}^2$, d'où l'expression demandée.

Cette norme ne peut pas être subordonnée, parce que, si *I* désigne la matrice identité, on a trivialement : $\left\|I\right\|_E = \sqrt{n}$, alors que pour toute norme subordonnée, on doit avoir $\left\|I\right\| = 1$.

PARTIE n° 2

❶ Soit $x \in IR^n$ tel que $(A + \Delta A)x = 0$. On doit alors avoir : $x = -A^{-1}\Delta A x$. Mais, si $x \neq 0$, on aurait $\left\|A^{-1}\Delta A x\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|\left\|\Delta A\right\|\left\|x\right\| < \left\|x\right\|$ ce qui implique une contradiction.

❷ ① x et Δx existent puisque A et $A + \Delta A$ sont inversibles.

② D'après la question 2 de la première partie, on doit avoir $\chi(A) \geq \left\|I\right\| = 1$.

③ On a $A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x = \Delta b$, ce qui implique : $\Delta x = A^{-1}(\Delta b - \Delta A x - \Delta A \Delta x)$. Par conséquent, $\left\|\Delta x\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|\left(\left\|\Delta A\right\|\left\|\Delta x\right\| + \left\|\Delta A\right\|\left\|x\right\| + \left\|\Delta b\right\|\right)$. Puisque $Ax = b$, on doit avoir $\frac{\left\|A\right\|\left\|x\right\|}{\left\|b\right\|} \geq 1$. On a donc : $\left\|\Delta x\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|\left(\left\|\Delta A\right\|\left\|\Delta x\right\| + \left\|\Delta A\right\|\left\|x\right\| + \frac{\left\|A\right\|\left\|x\right\|}{\left\|b\right\|}\left\|\Delta b\right\|\right)$; cette dernière expression est clairement équivalente à celle qui est demandée.

Cette inégalité permet de majorer l'erreur relative $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$, à partir des bornes relatives imposées a priori sur b et A. Plus $\frac{\chi(A)}{1-\chi(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est petit, plus l'erreur relative est faible. Or, pour $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ fixé, $\frac{\chi(A)}{1-\chi(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est une fonction croissante du coefficient de conditionnement de A. Il est donc préférable d'avoir une matrice au coefficient de conditionnement faible, et donc le plus proche de 1 possible.

PARTIE n° 3

❶ Les solutions sont $(1,1,1,1)$, $(9.2,-12.6,4.5,-1.1)$ et $(-81,137,-34,22)$ respectivement.

❷ Pour la norme $\|.\|_2$, on a $\|A\|_2 = 30.2887$, $\chi(A) = 2984$, $\|b\|_2 = 60.0249$, $\|x\|_2 = 2$. Dans le second système, on a $\|\Delta b\|_2 = 0.2$, $\|\Delta A\|_2 = 0$ et $\|\Delta x\|_2 = 16.3969$ (par rapport au premier système). On vérifie alors aisément la majoration demandée.