AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Données :

Les valeurs numériques suivantes pourront servir dans le problème : e = 2,718 ; 1/e = 0,368 ; cos(51°8) = 0,618 ; $e^{0,618} = 1,86$.

On note par f la fonction numérique définie sur R par $f(x) = e^{-\cos x}$.

1 – Etudier la fonction f : parité, périodicité, dérivée.
Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
Etudier l'existence d'un point d'inflexion.
Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative C de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

f est strictement positive.
En outre, f est paire, $f(-x) = f(x)$, car la fonction cos est paire.
$f(x + 2\pi) = f(x)$; f est périodique de période 2π
On remarque que $f(x + \pi) = e^{-\cos(x+\pi)} = e^{\cos x} = 1/f(x)$.

$f'(x) = \sin x\, e^{-\cos x} = f(x) \sin x$
Sur $[0, \pi]$, la fonction f' est positive, nulle en 0 et en π.
f est donc croissante, de $f(0) = 1/e = 0,368$ à $f(\pi) = e = 2,718$.

Point d'inflexion :
$f''(x) = (\sin^2 x + \cos x)\, f(x) = (-C^2 + C + 1)\, f(x)$ en notant $C = \cos x$

$f''(x) = 0$ si $C^2 - C - 1 = 0$, c'est-à-dire $C = (1 \pm 5^{1/2})/2$; la seule valeur solution possible entre -1 et +1 est $C^* = (1 - 5^{1/2})/2 = -0,618$.
La valeur x^* de l'angle x correspondant à $\cos x^* = -0,618$ est 128°2, légèrement inférieur à $3\pi/4$.
f admet donc un point d'inflexion en $x^* = -0,618$, $f(x^*) = 1,86$.

2 – Dans cette question, on se propose de rechercher les tangentes à *C* issues de l'origine *O*.

2 a – Soit *A* un point de *C* d'abscisse *a*, $0 < a < \pi$.
Ecrire une équation d'une tangente en *A* à *C*.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que cette tangente passe par l'origine *O*.

L'équation générale de la tangente à C en A d'abscisse a est :

$$y - f(a) = (x - a)\ f'(a)$$

$$y = f(a) - a\ f'(a) + x\ f'(a)$$

$$y = (1 - a \sin a)\ f(a) + x \sin a\, f(a)$$

Pour que la tangente passe par O, il faut et il suffit que (1 – a. sin a) = 0.
Comme a est non nul, cela revient à sin a = 1/a.

2 b – On définit la fonction numérique φ sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

Etudier précisément les variations de φ.
Montrer que φ passe par un maximum *M* dont on cherchera le signe.
En déduire que φ s'annule en deux points x_1 et x_2 que l'on positionnera par rapport à $\pi/2$.
Conclure sur le nombre de tangentes à *C* que l'on peut mener depuis l'origine *O*.

$\varphi'(x) = \cos x + 1/x^2$

$\varphi''(x) = -\sin x - 2\,x^{-3}$

On remarque que φ'' *est négative sur* $]0, \pi]$.
Donc φ' *décroît de* $+\infty$ *(pour* $x \to 0$*) à* $(1 - \pi^2)/\pi^2$*, valeur < 0.* φ' *s'annule donc en une valeur x° de x, est > 0 avant, négative après.*

φ *est donc croissante de 0 à x°, puis décroissante de x° à* π.
$\varphi(0) = -\infty$, $\varphi(\pi) = -1/\pi$.

Soit M le maximum de φ*, atteint en x°.*
Calculons $\varphi(\pi/2)$ *et* $\varphi'(\pi/2)$.
$\varphi(\pi/2) = (\pi - 2)/\pi$*, donc > 0.*
$\varphi'(\pi/2) = 4/\pi^2$*, valeur > 0.*

On en déduit aisément que $x° > \pi/2$.
Donc M est > 0, et le graphe de φ *coupe donc l'axe des abscisses en deux points* x_1 *et* x_2 *tels que* $x_1 < \pi/2$.
Pour positionner x_2*, on remarque que* $\varphi(3\pi/4) = (6\pi\, 2^{1/2} - 8)/6\pi$*, donc* $x_2 > 3\pi/4$.

Puisque l'équation sin x – 1/x = 0 admet deux solutions, on peut donc mener deux tangentes à C passant par l'origine.

3 a – Calculer l’intégrale indéfinie $\Phi(x) = \int \varphi(x)\, dx$.

$\Phi(x) = -\cos x - Ln\, x$
où Ln est le symbole du logarithme népérien.

3b – Calculer l’intégrale $F(a, b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx$.

Etudier la limite de $F(a, b)$ quand a tend vers 0 et b tend vers π.

$F(a, b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \cos a - \cos b + Ln(a/b)$

Quand a tend vers 0 et b tend vers π, $\cos a - \cos b \to 2$ et $Ln(a/b) \to -\infty$, donc $F(a, b) \to -\infty$.

Problème 2

On note $M_4(R)$ l’ensemble des matrices carrées d’ordre 4, à coefficients réels, $U_4(R)$ le sous-ensemble de $M_4(R)$ formé des matrices inversibles, et I la matrice identité d’ordre 4.

1 – On donne la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.
Déterminer l’inverse A^{-1} de A.

Il suffit, par exemple, de calculer le déterminant de A : Det A = 1, non nul. Donc A est inversible (On peut soustraire la 4^e^ colonne à la 1^ère^ colonne, pour calculer Det A).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 7 & -5 & -16 \end{pmatrix}$$

2 – On note par L_i, $i = 1$ à 4, les lignes d’une matrice M de $M_4(R)$; Λ est l’ensemble des lignes de M.
On considère l’ensemble E formé par les trois opérations élémentaires que l’on peut définir sur l’espace Λ des lignes de M ; ces opérations sont :

a) homothétie : $h(L_i) = a\ L_i$, $i = 1$ à 4, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la ligne $a\ L_i$, a étant un nombre réel non nul.

b) mélange : $m(L_i) = L_i + bL_k$, i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la combinaison de L_i et bL_k, b étant un nombre réel.

c) permutation : $p(L_i) = L_k$ et $p(L_k) = L_i$, i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que les lignes L_i et L_k sont permutées.

On appellera de façon générique e une opération quelconque de E, e étant selon les cas h, m ou p.

Montrer que h, m et p, applications de Λ dans Λ, admettent des inverses notées h^{-1}, m^{-1} et p^{-1} que l'on exprimera.

Par rapport à la composition des applications, on trouve aisément :

$$h^{-1}(L_i) = a^{-1}\ L_i$$
$$m^{-1}(L_i) = L_i - bL_k,$$
$$p^{-1} = p$$

3 – Soit M une matrice de $U_4(R)$, et e une application de E.
Par convention, on notera e(M) la matrice de $M_4(R)$ obtenue en appliquant l'opération e à M.

Montrer que $e(M) = e(I)\ M$
Montrer que $e(I)$ est inversible.
En déduire que $(\boldsymbol{e}(M))^{-1} = M^{-1}\ e^{-1}(I)$

Prenons par exemple la permutation des lignes 1 et 2.
Si l'on permute les lignes 1 et 2 de I, par application du produit matriciel, les lignes 1 et 2 de M seront permutées.
On montre aisément que ce résultat est aussi vrai pour h et m.

Soit à montrer que e(I) est inversible.
Supposons e(I) inversible, et prenons le cas particulier où $M = e^{-1}(I)$.
Alors puisque $e(M) = e(I).M$, *on a* $e(e^{-1}(I)) = I = e(I).e^{-1}(I)$.

De même, puisque $e^{-1} \in E$, *on a aussi* $e^{-1}(I).e(I) = e^{-1}(e(I)) = I$.

Donc e(I) est inversible et $(e(I))^{-1} = e^{-1}(I)$.

e(M) est le produit e(I).M de deux matrices inversibles, donc est inversible, et
$(e(M))^{-1} = M^{-1}\ e^{-1}(I)$

4 – On considère la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $B = e(A)$ où e est une application de E que l'on précisera.
Calculer l'inverse B^{-1} de B.

$B = m(A)$ avec $m(L_1) = L_1 + 2\,L_3$

D'après le résultat de la question 3, $B^{-1} = A^{-1}\, m^{-1}(I)$

Avec l'application m permettant de définir B, on a :

$$m^{-1}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit $A^{-1}.\, m^{-1}(I)$ donne :

$$A^{-1} m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 5 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 7 & -3 & -16 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

5 – Soit L le vecteur-ligne d'élément courant a_i, $i = 1$ à 4, et C le vecteur-colonne d'élément courant b_i, $i = 1$ à 4.
On suppose L et C non nuls.
Quelles sont les dimensions de LC et CL ?

Il est évident que LC est un nombre réel, et CL une matrice de $M_4(R)$.

6 – On suppose que $LC + 1 = 0$.
6a – Calculer $(I + CL)C$
6b – La matrice $I + CL$ est-elle inversible ?

$(I + CL)C = C + CLC = C - C = 0$ puisque $LC = -1$.

Supposons la matrice I + CL inversible.
Il existe alors une matrice E telle que $E(I + CL) = (I + CL)E = I$
Soit $E(I + CL) = I$.
Multiplions à droite par C.
Alors $E(I + CL)C = C \Rightarrow C = 0$, vecteur nul, or C est non nul (question 4).
La matrice (I + CL) n'est donc pas inversible.

7 – On suppose que $LC + 1 \neq 0$.
Montrer que $I + CL$ admet une matrice inverse de la forme $I + k\ CL$, où k est un nombre réel : $(I + CL)^{-1} = I + k\ CL$

Supposons l'existence d'une matrice inverse à (I + CL) de la forme I + k CL, où k est un réel.
Alors $(I + CL)(I + k\ CL) = I = I + k\ CL + CL + k\ CLCL = I + k\ CL + CL + k\ C(LC)L$

Posons $LC = u$, $u \neq 0$ *et* $1 + u \neq 0$
$I = I + k\ CL + CL + ku\ CL$
$(k(u+1) + 1)CL = 0$
$\Rightarrow (k(u+1) + 1) = 0$

Et donc $k = -1/(1+u) = -1/(1+LC)$

$(I + CL)^{-1} = I - CL/(1 + LC)$

8 – Soit une matrice M de $U_4(R)$.
On considère la matrice $N = M + CL$.

8a – Montrer que N est inversible si et seulement si : $LM^{-1}C + 1 \neq 0$.

Multiplions à gauche N par M^{-1}*, ce qui est licite puisque M est inversible.*
$M^{-1}N = I + M^{-1}CL$
Posons $C^* = M^{-1}C$*, C* est un vecteur-colonne de dimension 4.*
On a donc $M^{-1}N = I + C^*L$
D'après la question 7, la matrice $I + C^*L$ *est inversible sous la condition* $LC^* + 1 \neq 0$.

$LC^* + 1 \neq 0 \Leftrightarrow L\ M^{-1}C + 1 \neq 0$

8b – En déduire que, sous cette condition : $N^{-1} = M^{-1} - (M^{-1}CLM^{-1}) / (1 + LM^{-1}C)$

Comme $M^{-1}N = I + M^{-1}CL = I + C^*L$*, d'après la question 7, on a la forme de l'inverse de* $M^{-1}N$.
$(M^{-1}N)^{-1} = I - C^*L/(1 + LC^*) = I - M^{-1}CL/(1 + L\ M^{-1}C)$

$N^{-1}M = I - M^{-1}CL/(1 + L\ M^{-1}C)$

En multipliant à droite par M^{-1}*, on obtient :*

$N^{-1} = M^{-1} - M^{-1}CL\ M^{-1}/(1 + L\ M^{-1}C)$

9 – On considère la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9a – Montrer que la matrice $D - A$ peut être écrite sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

$$D - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est évident que si l'on prend pour vecteur-ligne $L = (0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)$ et pour vecteur-colonne C tel que sa transposée ${}^tC = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, on a $D - A = CL$.
Remarque : le choix de C et L n'est bien sûr pas unique.

9b – Montrer que D est inversible.

$D = A + CL$, avec A inversible (question 1).
D est donc de la forme de la matrice $N = M + CL$ de la question 8, avec $M = A$.
Pour savoir si D est inversible, il faut que la condition $LA^{-1}C + 1 \neq 0$ (question 8a) soit vérifiée.
Avec A^{-1} déterminée à la Q1, et les valeurs de C et L choisies en Q9a, on vérifie aisément que $LA^{-1}C = 0$ et donc que $LA^{-1}C + 1 = 1$.
D est donc inversible.

9c – Calculer D^{-1}

Puisque $D= A + CL$, avec L et C trouvés en (9a), d'après la question 8b, on a :
$D^{-1} = A^{-1} - (A^{-1}CLA^{-1}) / (1 + LA^{-1}C)$
D'où puisque $LA^{-1}C + 1 = 1$
$D^{-1} = A^{-1} - (A^{-1}CLA^{-1})$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -14 & 10 & 35 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 11 & -8 & -26 \end{pmatrix}$$

10 – On considère la matrice F définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & x & y & 1 \end{pmatrix}$$

où x et y sont deux réels.

10a – Montrer que $F = A + G$, où G est une matrice que l'on explicitera.

Il est évident que tous les éléments de G sont nuls, sauf la dernière ligne qui s'écrit :
$(0 \quad (x-1) \quad y \quad 0)$

10b – Montrer que G peut être mis sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

Il est évident que si l'on prend pour vecteur-ligne $L = (0 \quad (x-1) \quad y \quad 0)$ *et pour vecteur-colonne C tel que sa transposée* ${}^tC = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$, *on a* $G = CL$.

10c – En déduire la relation $t(x, y) = 0$ que doivent vérifier x et y pour que F ne soit pas inversible.

1^{er} cas : si $x = 1$ *et* $y = 0$, *G est nulle et F = A, donc inversible (retour à la question 1).*

2ème cas : $LA^{-1}C = -8(x-1) + 10y$
D'après la question 8a, la condition de non inversibilité de F est donc :
$-8(x-1) + 10y + 1 = 0$,
soit $t(x, y) = 8x - 10y - 9 = 0$

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

1 – On considère deux nombres entiers relatifs a et b.
Montrer que le nombre $n = ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

2 – Montrer que le produit P de trois nombres entiers naturels, pairs, consécutifs, est divisible par 48.

1 – Soit $n = ab(a - b)(a + b)$
Si a et/ou b sont divisibles par 3, n l'est également.
Supposons que a et b ne sont pas des multiples de 3.
Alors $a = 3p+1$ ou $3p+2$, et $b = 3q+1$ ou $3q+2$.
Soit $a = 3p+1$ et $b = 3q+1$: alors $a - b = 3(p - q)$ est donc divisible par 3, donc n également.
Soit $a = 3p+1$ et $b = 3q+2$: alors $a + b = 3(p + q + 1)$ est donc divisible par 3, donc n également.

2 – Soient trois nombres entiers naturels pairs consécutifs a, b et c.
On peut les écrire $a = 2p$, $b = 2p + 2$ et $c = 2p + 4$.

Alors $P = 8p(p+1)(p+2)$
P est donc divisible par 8.
Montrons que $p(p+1)(p+2)$ est divisible par $6 = 2x3$.
p, p+1 et p+2 étant trois entiers consécutifs, il y a forcément parmi eux un multiple de 2 et un multiple de 3.
D'où le résultat.

Remarque : $P \geq 48$. En effet, les 3 premiers entiers pairs sont 2, 4 et 6, dont le produit fait 48.

Problème 1

1 – Soit la fonction f définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$f(x) = x \sin x$$

1a – Calculer la dérivée f' de f.

$f'(x) = x \cos x + \sin x$

1b – La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$f'(0) = 0$
Cependant, pour savoir si une fonction est dérivable en un point x_0, il faut étudier la limite, quand x tend vers x_0, du taux d'accroissement $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$.
Ici $x_0 = 0$, et $(f(x) - f(0))/(x - 0) = \sin x$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.
f est donc dérivable en 0.

1c – Etudier précisément la fonction f sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

On remarque immédiatement que f est paire : $f(-x) = f(x)$, et on peut donc restreindre l'étude à $[0, \pi/2]$.
Sur cet intervalle, f' est positive (car x, sinx et cosx ≥ 0), et $f'(0) = 0$ et $f'(\pi/2) = 1$.
Donc f est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, avec de $f(0)= 0$ à $f(\pi/2) = \pi/2$.

1d – Calculer une primitive F de f : $F(x) = \int f(x)\,dx$

En intégrant par parties : $F(x) = \int x.\sin x.dx = -x.\cos x + \int \cos x\,dx = -x.\cos x + \sin x$

2 – On considère maintenant la fonction g définie sur R par :

$$g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$

2a – La fonction g est-elle continue en 0 ?

$|g(x)| \leq |x| . |\sin(1/x)| \leq |x|$ *puisque* $|\sin(1/x)| \leq 1$.

Donc quand x tend vers 0, g(x) tend vers 0.
La fonction g est donc continue en 0.

2b – Etudier la parité de g

$g(-x) = g(x)$, g est paire.

2c – Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$

Sur cet intervalle, les fonctions identité et sinus sont dérivables. g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$$g'(x) = \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x})$$

On remarque que g' n'est pas définie en 0.

2d – g est-elle dérivable en 0 ?

Calculons la limite de $(g(x) - g(0))/(x - 0) = \sin(1/x)$ quand $x \to 0$.

Au voisinage de 0, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et $\sin(\frac{1}{x})$ oscille entre -1 et $+1$. le taux d'accroissement de g en 0 n'a pas de limite, g n'est donc pas dérivable en 0.

2e – Soit G la courbe représentative de g dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de G situés sur les bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Cela revient à résoudre les équations $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ ou -1.

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = 1$, $\frac{1}{x} = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = 1$

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = -1$, $\frac{1}{x} = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(3\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = -1$.

3 – On considère maintenant la fonction h définie sur R par :

$$h(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0$$

3a – La fonction h est-elle continue en 0 ?

Comme en (2a), h est majorée par x^2, et donc quand x tend vers 0, h(x) tend vers 0.
La fonction h est donc continue en 0.

3b – Etudier la parité de h

h est impaire.

3c – Montrer que h est dérivable en tout point x non nul ; h est-elle dérivable en 0 ?

Pour tout $x \neq 0$, h est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$h'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$

Calculons la limite de $(h(x) - h(0))/(x - 0) = x.\sin(\frac{1}{x}) = g(x)$ quand $x \to 0$.

D'après la question (2a), g tend vers 0 quand $x \to 0$, et h est dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$.

3d – Soit H la courbe représentative de h dans un repère orthonormé usuel.
Quels sont les points de H situés sur les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = -x^2$?
Calculer les pentes des tangentes en ces points.

Cela revient à résoudre les équations $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ ou -1, comme en (2e).

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = 1$, $\frac{1}{x} = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(\pi + 4k\pi)$
Comme $h'(x) = 2x.\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$: $h'(2/(\pi + 4k\pi)) = 4/(\pi + 4k\pi)$

Pour $\sin(\frac{1}{x}) = -1$, $\frac{1}{x} = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in N$.
D'où : $x = 2/(3\pi + 4k\pi)$
$g'(2/(\pi + 4k\pi)) = 4/(3\pi + 4k\pi)$.

Problème 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1 – On considère une courbe C du plan définie comme l'ensemble des points M de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, dépendant d'un paramètre réel t.
On donne, pour $t \in R$:

$x(t) = t + t^2/2$
$y(t) = t - t^2/2$

1 a – Etudier, dans le même tableau de variations, les variations de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

$x'(t) = t + 1$
$y'(t) = 1 - t$

Pour $t \in R$, $x(t)$ décroit de $+\infty$ à $-1/2$, lorsque t va de $-\infty$ à -1, puis croît jusqu'à $+\infty$ pour t allant de -1 à $+\infty$; $x(t)$ s'annule en $t = 0$.
En outre, $x(1) = 3/2$

$y(t)$ croît de $-\infty$ à $1/2$, lorsque t va de $-\infty$ à $+1$, puis décroît jusqu'à $-\infty$ pour t allant de 1 à $+\infty$; $y(t)$ s'annule en $t = 0$.
En outre, $y(-1) = -3/2$.

1b – Etudier les points de la courbe *C* en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

Cela revient à résoudre $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.
$x'(t) = 0$ pour $t = -1$ (le point associé est $(-1/2, -3/2)$).
$y'(t) = 0$ pour $t = 1$ (le point associé est $(3/2, 1/2)$).

1c – Préciser les points d'intersection de *C* avec les axes *Ox* et *Oy*. Donner un vecteur directeur des tangentes en ces points.

Avec l'axe des ordonnées : $x(t) = 0$ pour $t = 0$ et -2
Pour $t = 0$, le point est O (0, 0)
Pour $t = -2$, le point correspondant est A(0, -4)

Avec l'axe des abscisses : $y(t) = 0$ pour $t = 0$ et 2
Pour $t = 0$, le point est O (0, 0)
Pour $t = 2$, le point correspondant est B(4, 0)

La courbe C coupe donc les axes en trois points : O, A et B.

Vecteur directeur des tangentes en O, A et B :
En O, $x' = 1$ et $y' = 1$; en A, $x' = -1$ et $y' = 3$; en B, $x' = 3$ et $y' = -1$.

1d – Donner graphiquement l'allure de la courbe *C*, en positionnant les points remarquables déterminés.

1e – Donner l'équation cartésienne $v(x, y) = 0$ de la courbe *C*.

On remarque que $t = (x + y)/2$
En reportant dans la définition de $x(t)$, on a :

$$x = (x + y)^2/8 + (x + y)/2$$

En développant, on obtient :

$$v(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$$

2 – On se propose de déterminer précisément ce qu'est la courbe *C*.

2 a – Le plan étant assimilé au plan complexe, on considère l'application h qui, à tout point M d'affixe z du plan, associe un point M' d'affixe Z, définie par :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,z$$

Donner de façon précise la nature de l'application h.

On remarque que $Z = h(z) = e^{i\pi/4} z$

H est donc une rotation de centre O et d'angle π/4.

2b – Soit M le point d'affixe $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.
Déterminer les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de M', image de M par h.
Donner une équation cartésienne $\varphi(X, Y) = 0$ de la courbe C' des points M'.
Comment appelle-t-on la courbe C' ?
En déduire le nom de la courbe C.

Soit $z(t) = \rho\, e^{i\theta} = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta$, avec $x(t) = \rho \cos\theta$ et $y(t) = \rho \sin\theta$.

$Z = h(z) = e^{i\pi/4} z = \rho\, e^{i(\theta+\pi/4)} z$

D'où $X(t) = (x(t) - y(t))/2^{1/2}$ *et* $Y(t) = (x(t) + y(t))/2^{1/2}$

On en déduit : $Y = 2^{1/2} t$ *et* $X = 2^{-1/2} t^2$

D'où la relation $\varphi(X, Y) = 0 = 4.2^{1/2} X - Y^2$
La courbe C' est une parabole d'axe Ox.

Le courbe C' est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$. La courbe C est donc l'image de C' par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/4$.
C'est donc encore une parabole, dont l'axe est la deuxième bissectrice.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

a) $(289.381/60.408)^{1/60} - 1 = 2{,}65\%$

b) $289.381 \times (1{,}0265)^{30} = 633.370$

c) Il s'agit de comparer le chiffre précédent à 502.003. Cela signifie donc que le taux d'accroissement annuel devrait diminuer selon les experts qui ont établi l'estimation dans le document remis. Les causes peuvent être le vieillissement de la population, la baisse du taux de fécondité, etc.

Question 2

a) L'espérance de vie est passée de 50,0 ans à 49,6 ans alors que la mortalité infantile a diminué (104 à 90). Or, c'est souvent cet indicateur (mortalité infantile) qui est corrélé à l'espérance de vie : quand la mortalité infantile baisse, l'espérance de vie augmente et réciproquement. Cela n'est donc plus vrai dans le cas présent et pour la période récente. La zone étudiée « Afrique de l'ouest » est toutefois relativement épargnée quand on la compare avec la baisse de certaines zones, notamment l'Afrique australe où l'espérance de vie est passée de 61,3 ans à 46,4 ans. Cela est probablement du aux ravages du Sida. Constat identique au sein de la zone « Afrique de l'ouest » (cf. tableau A.3) où le taux de mortalité diminue moins vite que par le passé, voire augmente dans certains pays, notamment en Côte d'Ivoire et au Togo.

b) L'évolution de l'espérance de vie entre les deux périodes 2000/2004 et 1990/1994 est donnée dans le tableau ci-après :

Pays	Evolution de l'espérance de vie (en années)
Bénin	-0,7
Burkina Faso	-1,8
Cap Vert	+3,8
Côte d'Ivoire	-7,3
Gambie	+3,1
Ghana	+1,0
Guinée	+4,3
Guinée-Bissau	+2,3
Liberia	+2,1
Mali	+1,1
Mauritanie	+3,1
Niger	+3,5
Nigeria	-0,5
Sénégal	+2,5
Sierra Leone	-0,3
Togo	-3,9

c) Il faut éliminer les pays pour lesquels il manque la donnée sur le taux de prévalence. Seulement 11 couples de valeurs sont pris en compte et on obtient un coefficient de détermination de 0,778.

d) Ce taux de détermination est élevé. On en déduit que le SIDA a bien impacté la baisse de l'espérance de vie.

Question 3

a)

Pays	Indice 2001
Bénin	127,6
Burkina Faso	126,9
Cap Vert	122,6
Côte d'Ivoire	95,9
Gambie	159,1
Ghana	122,2
Guinée-Bissau	139,7
Mali	129,1
Mauritanie	123,0
Niger	111,5
Nigeria	120,6
Sénégal	131,1
Togo	111,3

b) L'indicateur a diminué en Côte d'Ivoire, seul pays de la zone à baisser, alors qu'il n'était pas spécialement haut en niveau en 1980. On constate qu'en moyenne, les pays ont progressé de 20 points sur cet indicateur et que la Gambie fait exception avec une évolution de presque 60 points.

c) Le calcul demandé est impossible puisque les 20 points indiqués sont en évolution, et non en niveau.

Question 4

a) Niger, Burkina Faso, Guinée, Angola, Congo, Tchad, Ouganda, Somalie.

b) Sénégal, Gambie, Gabon, Sao Tomé et Principe, Comores, Soudan, Erythrée.

c) Kenya, Malawi, Tanzanie, Zambie, Côte d'Ivoire, Cameroun, Centrafrique

d) Sierra Leone, Congo (RD), Burundi, Rwanda